سلسلۂ مطبوعاتِ علمیۂ جامعۂ عثمانیہ

جبر و مقابلہ

حصۂ دوم

(برائے انٹرمیڈیٹ)

(مصنفہ ہال اینڈ نائٹ)

مترجمۂ

مولوی شیخ برکت علی صاحب۔ ایم۔ اے

پروفیسر ریاضی کلیۂ جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۶ھ م سنہ ۱۳۳۷ف م سنہ ۱۹۲۸ء

دیباچہ

جبر و مقابلہ

حصۂ دوم

اِس کتاب کو "ابتدائی جبر و مقابلہ برائے مدارس فوقانیہ"[1] کے سلسلہ میں تصور کرنا چاہیئے۔ پہلے چند ابواب کو نسبت، تناسب، تغیر اور سلسلوں پر زیادہ مفصل بحث کے لئے مخصوص کر دیا گیا ہے جن پر ابتدائی جبر و مقابلہ میں سطحی طور پر بحث کی گئی تھی۔ بنا بریں ہم نے کتاب ہذا میں ایسے مسائل اور مشقیں مندرج کی ہیں جن کا اندراج ابتدائی کتاب میں نامناسب تھا۔

اس لحاظ سے اس کتاب کا میدان طالب علم کے لئے تقریباً نیا تصور ہو سکتا ہے اور اس کے مضامین کی وسعت خاص اہمیت رکھتی ہے۔ ان مضامین پر ہم نے عمیق اور بسیط بحث کرنے کی کوشش کی ہے اور ہر دو مسائل اور مشقوں کو پوری تفصیل سے پیش کیا گیا ہے اور ایسا کرنا ہمارے ذاتی تعلیمی تجربہ کی بنا پر ضروری معلوم ہوتا ہے۔

اس کتاب میں ہمارا مقصد یہ رہا ہے کہ مضمون کے جملہ ضروری حصوں پر ایسی بسط و شرح سے بحث کی جائے جو ایک جلد کی ضخامت کے لحاظ سے ناموزوں نہ ہو لیکن آخر کے بعض ابواب میں جگہ کی قلت کی وجہ سے مضمون کا محض سرسری خاکا پیش کرنا ہی ممکن ہو سکا ہے۔ مؤخر الذکر صورتوں میں ہم نے صرف اس غایت کو ملحوظ رکھا ہے کہ ابتدائی تعلیم کے اغراض کے مطابق مضمون کی محض سطحی تشکیل کر دی جائے اور عمیق تعلیم کے لئے طالب علم کو خاص خاص کتابوں کے مطالعہ کے لئے ہدایات دیے جائیں۔

---

[1] Elementary Algebra for Schools

ترتیب و اجتماع کے باب میں ہم ریورنڈ ڈبلیو۔ اے۔ وٹ ورتھ[ط]
کے نہایت مرہونِ احسان ہیں جنہوں نے ہمیں ازراہِ کرم اپنی کتاب Choice and Chance میں کے ثبوتوں کے استعمال کرنے کی اجازت دی۔ کئی سالوں
تک ہم نے تعلیم دینے میں انہی ثبوتوں کو استعمال کیا ہے۔ اور چونکہ ان کا استدلال
عام عقل اور ابتدائی اصولوں پر مبنی ہے اس لئے ہمیں یقین ہے کہ ان ثبوتوں کی بنا
پر جبر و مقابلہ کے اس حصہ کو سمجھنے میں مبتدی کو زیادہ آسانی ہوگی بہ نسبت ایسے ثبوتوں
کے جو بالعموم جبر و مقابلہ کی دیگر کتب نصاب میں پائے جاتے ہیں۔

استدقاق اور اتساع کی بحث ہمیشہ مبتدی کے لئے پہلی مرتبہ قدرے مشکل
معلوم ہوتی ہے۔ اس میں شک نہیں کہ اس مضمون کی اندرونی مشکلات درحقیقت
زیادہ ہیں۔ احاطۂ ریاضی میں عام طور پر جو اہمیت اس کو دیجاتی ہے اور جس نامکمل
طریق پر اسے بحث میں لایا جاتا ہے ان ہر دو وجوہ کی بنا پر یہ مشکلات اور بھی
بڑھ جاتی ہیں۔ اس بنا پر اس باب کو ہم نے معمول سے ذرا بعد میں رکھا ہے۔ اس
کے حصوں کی تشکیل اور ترتیب میں، نیز متن کی توضیح کے لئے مناسب امثلہ کے
انتخاب میں نہایت غور و خوض سے کام لیا گیا ہے اور ہم نے اس سے پہلے تہائی
قیمتوں اور معدوم کسور کے دو ابواب درج کر دینے سے اس کو حتی الوسع زیادہ
دلچسپ اور سہل بنانے کی کوشش کی ہے۔

سلسلوں کو جمع کرنے کے باب میں ہم نے "فرقوں کے طریقہ" پر و
نیز اس کی وسیع اور اہم مثالوں پر بہت زور دیا ہے۔ اس طریقہ کی بنیاد محدود
فرقوں کے احصا میں ایک نہایت مشہور ضابطہ پر مبنی ہے جس کو خالص جبریت
کے بغیر جبر و مقابلہ کے درس میں داخل کرنا نامناسب معلوم ہوتا ہے۔ محدود
فرقوں کے ضابطہ کا جو ثبوت ہم نے دفعات ۳۹۵ اور ۳۹۶ میں دیا ہے اس
کے متعلق ہمارا خیال ہے کہ یہ بالکل نیا اور طبع زاد ہے اور اس ضابطہ کے مطابق
"فرقوں کے طریقے" کی تشریح کے ضمن میں ہم نے سلسلوں کی چند ایسی دلچسپ

[ط] Rev. W. A. Whitworth

مثالیں درج کی ہیں جن کو اس کے بغیر بہت دیر تک ملتوی رکھنا پڑتا تھا۔

احتمال کے باب میں ہمیں ریورنڈ ٹی۔سی۔سمنز۔ کرائسٹ کالج بریکن سے نہایت اہم اور قابل قدر امداد ملی ہے۔ اور ہم تہِ دل سے اُن کے ممنون ہیں نہ صرف اس لئے کہ انہوں نے کتاب پر نکتہ سنجی کر کے اس کی اصلاح فرمائی بلکہ اس لئے بھی کہ انہوں نے بہت سی دلچسپ اور خود ساختہ مثالیں اندراج کے لئے ہم پہنچائیں۔

آج کل تحلیلی مخروطات یا ہندسۂ مجسمات تحلیلی کی کسی کتاب کو مقطعات اور ان کے استعمال کے متعلق معلومات حاصل کئے بغیر پڑھنا اور سمجھنا تقریباً ناممکن ہے۔ اس خیال سے ہم نے باب ۳۳ میں مقطعات پر مختصر اور ابتدائی بحث کی ہے۔ اور ہمیں امید ہے کہ طالب علم کو مضمون ریاضی کی مکمل اور وسیع تعلیم کے لئے تیار کرنے میں یہ مختصر سا ابتدائی بیان کافی اور مفید ثابت ہوگا۔

آخری باب میں مساواتوں کے نظریہ پر کل مفید مسائل جو پہلے مطالعہ کے لئے مفید ہو سکتے ہیں درج کئے گئے ہیں۔ مساواتوں کا نظریہ جبر و مقابلہ کی تعلیم کے سلسلے میں اس طرح قدرتی طور پر خود بخود پیدا ہو جاتا ہے کہ ایسے مسائل کو یہاں درج کرنے کے لئے جن کو بالعموم علیحدہ کتب درسیہ میں درج کیا جاتا ہے ہمیں کسی معذرت کی ضرورت نہیں در اصل بتیسویں باب کا بہت سا حصہ اس منزل سے بہت پہلے پڑھ لینا فائدہ سے خالی نہیں۔ اور ابواب ماقبل کے مشکل دفعات سے قبل اس کا مطالعہ نہایت سہولت بخش ثابت ہوگا۔

یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ ہر باب کو بذات خود اتنا مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے جتنا کہ ممکن ہے اس لئے ان کے مطالعہ کی ترتیب کو اُستاد کی رائے اور مصلحت کے لحاظ سے بدلا جا سکتا ہے باایں ہمہ اس کی سفارش کی جاتی ہے کہ جملہ دفعات جن پر یہ نشان * دیا گیا ہے پہلی قرأت میں ترک کی جا سکتی ہیں۔

کتاب ہذا کی ترتیب میں جن اصحاب اور کتب سے ہم نے مدد حاصل کی ہے

Brecon ، Christ's College ، T. C. Simmons ، ١

اُن کے ضمن میں ایک کتاب ایسی اہم ہے جس کے متعلق یہ کہنا دشوار ہے کہ ہم اس کے کس حد تک زیر احسان ہیں۔ ٹاڈہنٹر کا الجبرا فار سکولز اینڈ کالجز[1] ایک عرصہ سے کتبِ درسیہ میں نہایت مشہور اور مسلمہ کتاب مانی جاتی ہے یہاں تک کہ موجودہ زمانہ میں جبر و مقابلہ کی کسی درسی کتاب کی تصنیف کا اس کی اثر پذیری سے مستغنی ہونا ناممکن ہے۔ بایں ہمہ اگرچہ ٹاڈہنٹر کا الجبرا مسلسل ہمارے طلبہ کے استعمال میں رہا ہے تاہم ہم نے اس کی ترتیب و تشکیل سے بہت حد تک فائدہ نہیں اُٹھایا۔ بہت سے ابواب میں ہم نے اس امر کو فائدہ بخش تصور کیا ہے کہ متبادل ثبوت مندرج کئے جائیں۔ نیز ہم نے متن کی عبارت کی تکمیل کے لئے بہت سے نوٹوں کا اضافہ بھی کیا ہے۔ یہ نوٹ جو موجودہ کتاب میں متفرق مقامات پر پائے جاتے ہیں گذشتہ بیس سال کے عرصہ میں مختلف اوقات پر فراہم کئے گئے ہیں۔ اس لئے یہ امر مشکل ہو گیا ہے کہ جن صورتوں میں دیگر مصنفین سے مدد حاصل کی گئی ہے اُن کا شکریہ ادا کیا جائے۔ بہیئتِ مجموعی ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہم شلومِلچ[2]، سیرٹ[3] اور لورنٹ[4] کے رہینِ منت ہیں۔ انگریزی مصنفین میں ٹاڈہنٹر کے الجبرا کے علاوہ ہم نے اکثر ڈی مارگن[5]۔ کولینزو[6]۔ گروس[7] اور کرسٹل[8] کی تصنیفات سے مدد حاصل کی ہے۔

ریورنڈ[9] والسٹن ہولم، ڈی۔ ایس سی پروفیسر ریاضی رائل انڈین انجینیرنگ کالج کی اس عنایت کے ہم خاص طور پر ممنونِ احسان ہیں کہ انہوں نے ازراہِ کرم اپنی فراہم کردہ امثلہ کی فہرست میں سے ہمیں سوالات منتخب کرنے کی اجازت عطا فرمائی۔ اور اس سے ہمارے آخری ابواب کو جو فائدہ پہنچا ہم اس کا اظہار شکریہ کے بغیر نہیں کر سکتے۔

اب ہم دیگر احباب و اصحاب کا شکریہ ادا کرتے ہیں جنہوں نے پروف کے مطالعہ اور تصحیح میں ہمیں بے حد مدد دی ہے۔ بالخصوص ہم ریورنڈ ایچ۔ سی واٹسن کلفٹن کالج کے مشکور ہیں کہ انہوں نے ازراہِ کرم تمام کتاب کی نظرِ ثانی

ا؎ Todhunter's Algebra for Schools & Colleges

۲؎ Sehlômilch

۳؎ Serret

۴؎ Laurent ۵؎ DeMorgan ۶؎ Colenso ۷؎ Gross ۸؎ Chrystal

۹؎ Rev. J†. Wolstenholme

اس کے ہر حصہ میں بہت سی قابلِ قدر تجویزات پیش کیں۔

ایچ۔ ایس ہال

مئی ۱۸۸۸ء ایس۔ آر نائٹ

اشاعتِ سوم کا دیباجہ

اس اشاعت میں متن اور مثالیں نی الجملہ وہی ہیں جو اشاعت ماقبل میں تھیں
دفعات بدل دی گئی ہیں اور سب مثالوں کی از سرِ نو تصدیق کی گئی ہے
اس میں تین سو مثالوں کے ایک مجموعہ کا اضافہ بھی کیا ہے جو ترقی یافتہ
اعلیٰ مدارج کے طلبا کے لئے مفید ثابت ہوگا۔ یہ مثالیں کلیتًہ نہیں
دہ تر وظائف کے اور سینٹ ھاؤس کے پرچوں سے حاصل کی گئی ہیں۔
کے ہر حصہ کی توضیح پر خاص توجہ دی گئی ہے اور مشہور یونیورسٹیوں اور
روں کے امتحانات میں سے بھی مناسب مواد فراہم کیا گیا ہے۔

مارچ ۱۸۸۹ء

فہرست مضامین

جبر و مقابلہ (حصۂ دوم)

مضمون	دفعہ
اٹھارہواں باب	
سود اور سالیانہ	
کسی رقم مفروضہ کا سود اور کُل زر بحساب سودِ مفرد	۱
کسی رقم مفروضہ کی مِتّی اور قیمت حاضرہ بحساب سودِ مفرد	۲
کسی رقم مفروضہ کا سود اور کُل زر بحساب سودِ مرکب	۳
ظاہری اور اصلی سالانہ شرح کا سود	۴
کسی رقم مفروضہ کی قیمت حاضرہ اور مِتّی بحساب سودِ مرکب	۵
امثلہ نمبری ۱۸ (ل)	۶
سالیانہ۔ تعریفات	۷
ایک سالیانہ ادا نہیں کیا گیا اُس کا کُل زر بحساب سودِ مفرد	۸
ایک سالیانہ ادا نہیں کیا گیا اُس کا کُل زر بحساب سودِ مرکب	۹
ایک سالیانہ کی قیمتِ حاضرہ بحساب سودِ مرکب	۱۰
ایک ملتوی سالیانہ کی قیمتِ حاضرہ بحساب سودِ مرکب	۱۱

کتنے سالوں کی خرید
تجدید اجارہ کا جرمانہ
امثلہ نمبری ۱۸ (ب)

انیسواں باب

لا تساویات

ابتدائی مسئلے

دو مثبت مقداروں کا اوسطِ حسابی اُن کے اوسطِ ہندسی سے بڑا ہوتا۔
دو مقداروں کا حاصل جمع معلوم ہو تو اُن کا حاصلِ ضرب بڑے سے بڑا
اگر یہ مقداریں مساوی ہوں : نیز اگر حاصلِ ضرب معلوم ہو تو اِن ک
چھوٹے سے چھوٹا ہوگا اگر یہ مقادیر برابر ہوں۔
مثبت مقادیر کی کسی تعداد کا اوسطِ حسابی اُن کے اوسطِ ہندسی سے بڑا
ا، ب، ج، .... کا حاصل جمع معلوم ہے؛ $ا^{ل}\ ب^{م}\ ج^{ن}$ کی بڑی سے
قیمت دریافت کرو۔
اعظم اور اقل قیمتوں کی آسان صورتیں
امثلہ نمبری ۱۹ (ا)
ان مثبت مقادیر کی م ویں قوتوں کا اوسطِ حسابی ہمیشہ اُن مقدار
اوسطِ حسابی کی م ویں قوت سے بڑا ہوتا ہے باستثنائے اُس صور
جبکہ م صفر اور ایک کے درمیان واقع ہو۔
اگر ا اور ب مثبت صحیح عدد ہیں، اور ا > ب، تو

$$\left(1+\frac{لا}{ا}\right)^{ا} > \left(1+\frac{لا}{ب}\right)^{ب}$$

اگر ۱ > لا > ما > ۰، تو $\left(\frac{1+لا}{1-لا}\right)^{ما} > \left(\frac{1+ما}{1-ما}\right)^{لا}$

انتیسواں باب ۱۸۹

سلسلوں کا جمع کرنا "

چونتیسواں باب

متفرق مسائل و امثلہ

بسم اللہ الرحمن الرحیم

جبر و مقابلہ

اٹھارواں باب

سود اور سالیانہ

۲۲۹۔ اس باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ کس طرح سود اور مثنی کے سوالات جبریہ ضوابط کو استعمال کرنے سے آسانی سے حل ہو جاتے ہیں۔

ہم الفاظ 'سود'، 'مثنی' اور قیمت حاضرہ کو انہی معنوں میں استعمال کرینگے جن میں یہ اصطلاحیں علم حساب کی عام کتابوں میں استعمال ہوتی ہیں لیکن سود کی شرح کو اس طرح بیان کرنے کی بجائے کہ ۱۰۰ پونڈ پر فی سال اس قدر سود ہے یہ زیادہ آسان ہوگا کہ اس کو یوں بیان کیا جائے کہ ایک پونڈ کا ایک سال کا سود اس قدر ہے۔

۲۳۰۔ کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مفرد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصل زر ص پونڈ ہے، ایک پونڈ کا سود ایکسال میں ش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن، سود س اور کل زر ک ہے۔
چونکہ ص کا ایک سال کا سود ص ش ہے، اس لئے اس کا

ن سال کا سود ص ن ش ہے،

پس س = ص ن ش .... (۱)

نیز ک = ص + س

اس لئے ک = ص (۱ + ن ش) .... (۲)

(۱) اور (۲) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر ہمیں ص، ن، ش، س میں سے یا ص، ن، ش، ک میں سے کوئی تین مقادیر معلوم ہوں تو چوتھی مقدار معلوم ہو سکتی ہے۔

۲۳۱ — کسی رقم مفروضہ کی متی اور قیمت حاضرہ کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مفرد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رقم مفروضہ ص ہے اور قیمت حاضرہ ح، نیز متی م ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا سود ش ہے اور سالوں کی تعداد ن ہے۔

چونکہ ح ایک ایسی رقم ہے جس کو سود پر قرض دینے سے ن سالوں میں اس کا کل زر ص ہو جاتا ہے اس لئے

ص = ح (۱ + ن ش)

$$\therefore \text{ح} = \frac{\text{ص}}{\text{۱ + ن ش}}$$

$$\text{اور م} = \text{ص} - \text{ح} = \text{ص} - \frac{\text{ص}}{\text{۱ + ن ش}}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{\text{ص ن ش}}{\text{۱ + ن ش}}$$

نوٹ — م کی جو قیمت مساوات بالا سے حاصل ہوتی ہے، اس کو "اصلی متی" کہتے ہیں۔ لیکن عملی طور پر جب کوئی رقم واجب الادا ہونے کی معینہ تاریخ سے قبل ادا کی جاتی ہے تو ساہوکار قرضہ میں سے اصلی متی وضع کرنے کی بجائے قرضہ پر کا سود وضع کر لیتے ہیں، جو رقم اس طرح سے وضع کی جاتی ہے اس کو "ساہوکاری متی" کہتے ہیں، پس

ساہوکاری متی $= ص\, ن\, ش_1$

اصلی متی $= \dfrac{ص\, ن\, ش_1}{1 + ن\, ش_1}$

مثال ۔ ۱۹۰۰ پونڈ کے لئے 'اصلی متی' اور 'ساہوکاری متی' کا فرق ۶ شلنگ ۸ پنس ہوتا ہے جبکہ رقم تاریخ مقررہ سے ۴ ماہ قبل ادا کیجائے شرح فیصد بحساب سود مفرد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک پونڈ کا ایک سال کا سود $ش_1$ ہے، تب

ساہوکاری متی $= \dfrac{1900\, ش_1}{3}$

اور اصلی متی $= \dfrac{\dfrac{1900\, ش_1}{3}}{1 + \dfrac{1}{3} ش_1}$

$\therefore \dfrac{1900\, ش_1}{3} - \dfrac{\dfrac{1900\, ش_1}{3}}{1 + \dfrac{1}{3} ش_1} = \dfrac{1}{3}$

جس سے $1900\, ش_1^2 = 3 + ش_1$

$\therefore ش_1 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{22800 + 1}}{3800} = \dfrac{-1 \pm 151}{3800}$

منفی اصل کو نظر انداز کرنے سے $ش_1 = \dfrac{152}{3800} = \dfrac{1}{25}$

$\therefore$ شرح فیصد $= 100\, ش_1 = 4$

۲۳۲ ۔ کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر کسی دی ہوئی مدت میں بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصل زر ص ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر

ش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن ہے، سود س ہے اور کل زر ک ہے۔

پہلے سال کے آخر میں ص کا کل زر = ص ش اور چونکہ یہ دوسرے سال کے لئے اصل زر ہے اس لئے دوسرے سال کے آخر میں کل زر ص ش × ش یعنی ص ش^{۲} ہے، اسی طرح سے تیسرے سال کے آخر میں کل زر = ص ش^{۳} اور علیٰ ہذا القیاس ن سالوں کے بعد کل زر ص ش^{ن} ہے۔

پس ک = ص ش^{ن}

س = ص (ش^{ن} - ۱)

نوٹ۔ اگر ایک پونڈ کے ایک سال کے سود کو ش$_{۱}$ سے تعبیر کیا جائے تو

ش = ۱ + ش$_{۱}$

۲۲۳۔ بیوپار میں اگر مدت کے اندر سال کی کوئی کسر شامل ہو تو رواجاً کسر مذکور کے لئے سود بحساب سود مفرد محسوب کیا جاتا ہے

پس ایک پونڈ کا کل زر $\frac{۱}{۲}$ سال میں ۱ + $\frac{ش_{۱}}{۲}$ ہوگا اور ص کا کل زر بحساب سود مرکب $\frac{۲}{۳}$ ۴ سال میں ص ش^{۴} (۱ + $\frac{۲}{۳}$ ش$_{۱}$) ہوگا، اسی طرح سے ص کا کل زر ن + $\frac{۱}{ع}$ سال میں

ص ش^{ن} (۱ + $\frac{ش_{۱}}{ع}$) ہوگا۔

اگر سود سال میں ایک سے زیادہ بار واجب الادا ہو تو ظاہری سالانہ شرح میں اور اس شرح میں جو فی الحقیقت وصول ہوتی ہے اختلاف ہوتا ہے، مؤخر الذکر کو اصلی سالانہ شرح سے موسوم کیا جاسکتا ہے، مثلاً اگر سود سال میں دوبارہ واجب الادا ہو اور ظاہری سالانہ شرح ش$_{۱}$ ہو تو ایک سال کا کل زر نصف سال کے بعد

$1 + \frac{ش_1}{2}$ ہوگا اور اس لئے ایک پونڈ کا کل زر پورے سال میں

$(1 + \frac{ش_1}{2})^2$ یعنی $1 + ش_1 + \frac{ش_1^2}{4}$ ہوگا پس اصلی سالانہ شرحِ

سود $ش_1 + \frac{ش_1^2}{4}$ ہوگی۔

۲۳۴۔ اگر سود سال میں ق بار واجب الادا ہو اور ظاہری سالانہ شرح $ش_1$ ہو تو ظاہر ہے کہ ایک پونڈ کا سود $\frac{1}{ق}$ سال کے ہر وقفہ کے لئے $\frac{ش_1}{ق}$ ہوگا اس لئے ص کا کل زر ن

سال میں یعنی ق ن وقفوں میں $ص(1 + \frac{ش_1}{ق})^{ن ق}$ ہوگا۔

اس کو یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ "ایک سال میں ق مرتبہ سود اصل زر میں بدل جاتا ہے"

اگر سود ہر لمحہ اصل زر میں متبدل ہوتا رہے تو ق لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے۔

اس صورت میں کل زر کی قیمت نکالنے کے لئے فرض کرو کہ $\frac{ش_1}{ق} = \frac{1}{لا}$

یعنی $ق = ش_1 لا$

$$کل\ زر = ص(1 + \frac{ش_1}{ق})^{ق ن} = ص(1 + \frac{1}{لا})^{لا ن ش_1}$$

$$= ص\{(1 + \frac{1}{لا})^{لا}\}^{ن ش_1}$$

$$= ص\ و^{ن ش_1}$$

[دیکھو حصہ اول، صفحہ ۴۵۹] کیونکہ ق کے لاانتہا بڑھ جانے سے لا بھی لاانتہا بڑھ جاتا ہے۔

۲۳۵۔ کسی رقم مفروضہ کی قیمت حاضرہ اور مُتّی کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رقم مفروضہ ص ہے اور قیمت حاضرہ ح ہے،

نیز منتی م ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر ش ہے اور سالوں کی تعداد ن ہے۔ اب چونکہ ح ایک ایسی رقم ہے کہ اگر اس کو سود پر قرض دیا جائے تو ن سالوں میں اس کا کل زر ص ہو جاتا ہے اسلئے

$$\text{ص} = \text{ح}\ \text{ش}^{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{\text{ص}}{\text{ش}^{\text{ن}}} = \text{ص}\ \text{ش}^{-\text{ن}}$$

$$\text{اور}\ \text{م} = \text{ص}\left(١ - \text{ش}^{-\text{ن}}\right)$$

مثال — ٦٧٢ پونڈ کچھ عرصہ کے بعد واجب الادا ہیں، اس رقم کی قیمت حاضرہ ١٢٦ پونڈ ہے، اگر سود مرکب بشرح $\frac{١}{٦}$٤ فی صد محسوب کیا جائے تو مدت معلوم کرو جبکہ

لوک ٢ = ٠٣٠١٠٣، لوک ٣ = ٤٧٧١٢،

یہاں $\text{ش}_{١} = \frac{\frac{٢٥}{٦}}{١٠٠} = \frac{١}{٢٤}$، اور $\text{ش} = \frac{٢٥}{٢٤}$

فرض کرو کہ سالوں کی تعداد ن ہے، تب

$$٦٧٢ = ١٢٦\left(\frac{٢٥}{٢٤}\right)^{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ن}\ \text{لوک}\ \frac{٢٥}{٢٤} = \text{لوک}\ \frac{٦٧٢}{١٢٦}$$

$$\text{ن}\ \text{لوک}\ \frac{١٠٠}{٩٦} = \text{لوک}\ \frac{١٦}{٣}$$

$$\therefore \text{ن}\ (\text{لوک}\ ١٠٠ - \text{لوک}\ ٩٦) = \text{لوک}\ ١٦ - \text{لوک}\ ٣$$

$$\text{ن} = \frac{٤\,\text{لوک}\ ٢ - \text{لوک}\ ٣}{٢ - ٥\,\text{لوک}\ ٢ - \text{لوک}\ ٣}$$

$$ن = \frac{٫۷۲۷۰۰}{٫۰۱۷۷۳} = ۴۱ \text{ تقریباً}$$

پس مدت تقریباً ۴۱ سال ہے۔

امثلہ نمبری ۱۸ (ل)

حسب ضرورت ذیل کے لوکارتم استعمال کئے جائیں،

لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰ ، لوک ۳ = ٫۴۷۷۱۲۱۳

لوک ۷ = ٫۸۴۵۰۹۸۰ ، لوک ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷

۱۔ ۱۰۰ پونڈ کا کل زر ۵۰ سال میں ۵ فیصد شرح سے بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

لوک ۱۱۴٫۶۷۴ = ۲٫۰۵۹۴۶۵۰

۲۔ ایک رقم کا سود مفرد ۹۰ پونڈ ہے اور اس کی متی اسی شرح پر اسی مدت میں ۸۰ پونڈ ہے، رقم معلوم کرو۔

۳۔ ایک رقم ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کتنے سال میں دگنی ہو جائے گی۔

۴۔ ۱۰ ہزار پونڈ کی رقم ۸ سال کے بعد واجب الادا ہے، اس کی قیمت حاضرہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سودِ مرکب دریافت کرو،

لوک ۶۷۶۸۳٫۹۴ = ۴٫۸۳۰۴۸۵۶

۵۔ ایک ہزار پونڈ ۱۰ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کتنے سالوں میں ۲۵۰۰ پونڈ ہو جائینگے۔

۶۔ ثابت کرو کہ بحساب سود مفرد کسی رقم کی متی اس رقم اور اس کے سود کے اوسطِ موسیقی کے نصف کے مساوی ہوتی ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کوئی رقم ۱۰۰ سال میں سو گنا سے زیادہ ہو جاتی ہے۔

۸۔ کونسی رقم ۱۲ سال میں ۶ فیصد شرح پر بحساب سودِ مرکب

ایک ہزار پونڈ ہو جائے گی۔

لوک ۱۰۶ = ۲٫۰۲۵۳۰۵۹

لوک ۴۹۶۹۷ = ۴٫۶۹۶۳۲۹۲

۹۔ ایک شخص ایک ساہوکار سے ۶۰۰ پونڈ قرض لیتا ہے اور ہر چھ ماہ کے بعد ۱۸ فیصد کا اضافہ کر کے نیا تمسک تحریر کر دیتا ہے۔ بتاؤ کہ کتنا وقت گزرنے کے بعد تمسک ۶ ہزار پونڈ تک پہنچ جائے گا۔

لوک ۱۱۸ = ۲٫۰۷۱۸۸۲

۱۰۔ ایک فارذنگ ۲۰۰ سال میں ۶ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کیا ہو جائے گا۔ معلوم ہے

لوک ۱۰۶ = ۲٫۰۲۵۳۰۵۹

لوک ۱۱۵٫۱۲۷۰ = ۲٫۰۶۱۱۸۰۰

سالیانہ

۲۳۶۔ سالیانہ سے ایک ایسی معینہ رقم مراد ہوتی ہے جو خاص شرائط کے ماتحت مقررہ مساوی وقفوں کے بعد ادا کی جاتی ہے اور یہ ادائی ہر سال میں ایک بار یا کئی بار عمل میں آتی ہے۔ جب تک اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے ادائی مذکور سالانہ سمجھی جائے گی۔

میعادی سالیانہ سے مراد وہ سالیانہ ہے جو سالوں کی ایک خاص تعداد کے لئے غیر مشروط طور پر واجب الادا ہو۔

حیاتی سالیانہ سے مراد وہ سالیانہ ہے جو ایک شخص کو یا کئی اشخاص کے پس ماندہ کو تا زیست واجب الادا ہو۔

ملتوی سالیانہ سے وہ سالیانہ مراد ہے جو سالوں کی کسی خاص تعداد کے گزرنے کے بعد شروع ہو۔ جب یہ کہا جائے کہ سالیانہ ن سالوں کے لئے ملتوی کیا گیا ہے تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ سالیانہ ن سالوں کے بعد شروع ہوگا اور پہلی قسط (ن + ۱) ویں سال کے

آخر میں ادا کی جائے گی۔

اگر سالیانہ ایسا ہو جو ہمیشہ کے لئے جاری رہے تو اس کو دوامی سالیانہ یا محض **دوامی** کہتے ہیں، اگر یہ چند سالوں کے گذرنے کے بعد شروع ہونے والا ہو تو اسے **ملتوی دوامی** کہتے ہیں۔

اگر کوئی سالیانہ تعدد سالوں تک ادا نہ ہوا ہو تو اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ سالیانہ اتنے سالوں سے "برآئندہ" ہے۔

۲۳۷۔ ایک سالیانہ سالوں کی ایک خاص تعداد تک ادا نہیں کیا گیا۔ اس کا کل زر بحساب سودِ مفرد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ = ا ہے اور ایک پونڈ کا ایک سال کا سود ش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن ہے اور کل زر ک ہے

پہلے سال کے آخر میں واجب الادا رقم ا ہے، اور اس رقم کا کل زر باقی (ن - ۱) سال کے لئے ا + (ن - ۱) ش ا ہے

دوسرے سال کے آخر میں مزید رقم ا واجب الادا ہے، اور اس رقم کا کل زر باقی (ن - ۲) سال کے لئے ا + (ن - ۲) ش ا ہے

علیٰ ہذا القیاس

اب چونکہ ک یعنی کل زر مطلوبہ ان تمام کل زروں کے مجموعہ کے مساوی ہے

$$\therefore \text{ک} = \{\text{ا} + (\text{ن} - ۱)\,\text{ش}\,\text{ا}\} + \{\text{ا} + (\text{ن} - ۲)\,\text{ش}\,\text{ا}\} + \dots \dots \{\text{ا} + \text{ش}\,\text{ا}\} + \text{ا}$$

جہاں سلسلہ بالا میں رقموں کی تعداد ن ہے

$$\therefore \text{ک} = \text{ن}\,\text{ا} + (۱ + ۲ + ۳ + \dots + \overline{\text{ن} - ۱})\,\text{ش}\,\text{ا}$$

$$= \text{ن}\,\text{ا} + \frac{\text{ن}(\text{ن} - ۱)}{۲}\,\text{ش}\,\text{ا}$$

۲۳۸۔ ایک سالیانہ سالوں کی ایک خاص تعداد تک ادا نہیں کیا گیا اس کا کل زر بحساب سودِ مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ا ہے اور ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر ش ہے نیز سالوں کی تعداد ن ہے اور حملہ کل زر مطلوب ک ہے۔

پہلے سال کے آخر میں ا واجب الادا ہے اور اس کا کل زر باقی (ن-۱) سال کے لئے اش^ن-۱ کے مساوی ہے، دوسرے سال کے آخر میں ایک اور رقم ا واجب الادا ہے اور اس کا کل زر باقی (ن-۲) سال کے لئے اش^ن-۲ ہے، اور علیٰ ہٰذا القیاس

$$\therefore ک = اش^{ن-۱} + اش^{ن-۲} + \ldots\ldots اش^۲ + اش + ا$$

$$= ا(۱ + ش + ش^۲ + \ldots\ldots \text{تا ن رقوم})$$

$$= ا \frac{ش^ن - ۱}{ش - ۱}$$

۲۳۹۔ جب سالیانوں کی قیمت حاضرہ معلوم کرنا ہو تو رواجاً ہمیشہ سود مرکب کے حساب سے شمار کرتے ہیں۔ اگر سود بحساب سود مفرد شمار کیا جائے تو نتائج ہمیشہ متضاد اور ناقابل اعتماد حاصل ہوتے ہیں۔ اس موضوع پر نیز سالیانوں کے مضمون کے متعلق مزید معلومات حاصل کرنے کے لئے طالب علم کو چاہئے کہ انسٹی ٹیوٹ آف ایکچوئریز (Institute of actuaries) کی کتب درسیہ حصص اول و دوم کا اور نیز انسائیکلوپیڈیا بریٹانیکا Encyclopaedia Britannica میں سالیانوں کی دفعہ کا مطالعہ کرے۔

۲۴۰۔ ایک سالیانہ سالوں کی محدود تعداد کے لئے جاری رہنے والا ہے، اس کی قیمت حاضرہ بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ا ہے، ایک پونڈ کا کل زر ایک سال میں ش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن ہے اور مطلوبہ قیمت حاضرہ ح ہے۔

سالیانہ ا جو ایک سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت حاضرہ $ا\,ش^{-۱}$ ہے

سالیانہ ا جو ۲ سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت حاضرہ $ا\,ش^{-۲}$ ہے

سالیانہ ا جو ۳ سال کے بعد واجب الادا ہے اسکی قیمت حاضرہ $ا\,ش^{-۳}$ ہے

علیٰ ہذا القیاس [ملاحظہ ہو دفعہ ۲۳۵]

اب چونکہ ح ان تمام حاضرہ قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے

$$\therefore ح = ا\,ش^{-۱} + ا\,ش^{-۲} + ا\,ش^{-۳} + \ldots\ldots \text{تا ن رقوم}$$

$$= ا\,ش^{-۱}\,\frac{۱ - ش^{-ن}}{۱ - ش^{-۱}}$$

$$= ا\,\frac{۱ - ش^{-ن}}{ش - ۱}$$

نوٹ ـ ک کی جو قیمت دفعہ ۲۳۸ میں معلوم کی گئی ہے اس کو $ش^{ن}$ پر تقسیم کرنے سے بھی مندرجہ بالا جواب حاصل ہو سکتا ہے۔

نتیجہ صریح ـ اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو اس سے دوامی سالیانہ کی قیمت حاضرہ حاصل ہوتی ہے

$$ح = \frac{ا}{ش - ۱} = \frac{ا}{ش_۱}$$

۱۴۲ ـ اگر ایک سالیانہ ا کی قیمت حاضرہ ع ا ہو تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ سالیانہ کی قیمت ع سالوں کی خرید کے مساوی ہے۔

دوامی سالیانہ کی صورت میں $ع\,ا = \frac{ا}{ش_۱}$

$$\text{اس لئے}\quad م = \frac{1}{ش} = \frac{100}{\text{شرح فیصد}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ یہ معلوم کرنے کے لئے کہ کوئی دوامی سالیانہ کتنے سالوں کی خرید کے مساوی ہے ہمیں ۱۰۰ کو شرح فیصد پر تقسیم کرنا پڑتا ہے۔

بہت سے سرکاری تمسکوں میں، نیز رجسٹری شدہ کمپنیوں کے سرمایہ میں اور ریل کے حصے وغیرہ خریدنے میں جو روپیہ لگایا جاتا ہے وہ بعد ازاں واگذاشت نہیں کیا جا سکتا، اس لئے اس روپیہ سے جو مسلسل آمدنی ہوتی رہتی ہے وہ دوامی سالیانوں کی بہترین مثال ہے۔ گورنمنٹ کے اعتبار کی بہترین جانچ اس امر سے ہو سکتی ہے کہ اس کے تمسکات کی قیمت کتنے سالوں کی خرید کے مساوی ہے۔ مثلاً $\frac{1}{2}$ ۲ فیصد والا ۹۰ پر کا "کونسول" ۳۶ سال کی خرید کے مساوی ہے، مصر کے ۴ فیصد والے سرمایہ کی قیمت ۹۶ پر ۲۴ سال کی خرید کے مساوی ہے اور آسٹریا کے ۵ فیصد والے سرمایہ کی قیمت ۸۰ پر صرف ۱۶ سال کی خرید کے مساوی ہے۔

۲۴۲ — ایک ملتوی سالیانہ ع سالوں کے بعد شروع ہوگا اور ن سال تک جاری رہے گا، اس کی قیمت حاضرہ بحساب سودِ مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ا ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کُل زر ش ہے اور قیمت حاضرہ ح ہے۔

پہلی قسط (ع + ۱) ویں سال کے آخر میں ادا ہوتی ہے [دفعہ ۲۳۶] اس لئے پہلی، دوسری، تیسری قسطوں کی حاضرہ قیمتیں بالترتیب

$$ا ش^{-(ع+1)}،\quad ا ش^{-(ع+2)}،\quad ا ش^{-(ع+3)}، \ldots\ldots$$

ہیں —

$$\therefore \text{ح} = \text{ا} \, \text{ش}^{-(\text{ع}+1)} + \text{ا} \, \text{ش}^{-(\text{ع}+2)} + \text{ا} \, \text{ش}^{-(\text{ع}+3)} + \dots \text{تا ن رقوم}$$

$$= \text{ا} \, \text{ش}^{-(\text{ع}+1)} \times \frac{1 - \text{ش}^{-\text{ن}}}{1 - \text{ش}^{-1}}$$

$$= \frac{\text{ا} \, \text{ش}^{-\text{ن}}}{\text{ش} - 1} - \frac{\text{ا} \, \text{ش}^{-\text{ع} - \text{ن}}}{\text{ش} - 1}$$

نتیجہ صریح ـ ایک ملتوی دوامی کا اجرا ع سالوں کے بعد شروع ہوگا، اس کی قیمت حاضرہ ضابطۂ ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$\text{ح} = \frac{\text{ا} \, \text{ش}^{-\text{ع}}}{\text{ش} - 1}$$

۱۴۳ ـ **ملک** سے ایسی جائداد مراد ہوتی ہے جس سے دوامی سالیانہ حاصل ہوتا رہے، اس دوامی سالیانہ کو محاصل کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ کسی ملک کی قیمت وہی ہوگی جو ایک ایسے دوامی سالیانہ کی قیمت حاضرہ ہو جو محاصل کے مساوی ہے۔

دفعہ ۱۴۲ سے ظاہر ہے کہ اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ کسی پٹہ دار کو کھیت مول لینے کے لئے "کتنے سالوں کی خرید" ادا کرنی پڑتی ہے تو ۱۰۰ کو سالوں کی اس تعداد پر تقسیم کرنے سے ہم سود کی شرح فیصد معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال ـ ایک ملک کا حق بازگشت ۶ سال کے بعد ہونے والا ہے اس کو ۲۰ ہزار پونڈ میں خرید کر لیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب خریدار کو کس قدر محاصل وصول ہونے چاہئیں، معلوم ہے

لوک ۱٫۰۵ = ۰٫۰۲۱۱۸۹۳، لوک ۱٫۳۴۰۰۹۶ = ۰٫۱۲۷۱۳۵۸

یہاں محاصل ایک ایسے دوامی سالیانہ کی سالانہ قیمت کے مساوی ہیں جس کا اجرا ۶ سال کے بعد ہونے والا ہو اور جو ۲۰ ہزار پونڈ میں

خریدی جاسکتی ہو۔
فرض کرو کہ سالیانہ کی قیمت ا پونڈ فی سال ہے، چونکہ ش = ۱٫۰۵

اس لئے $۲۰۰۰۰ = \frac{ا \times (۱٫۰۵)^{-۲}}{۰۵}$

$\therefore ا \times (۱٫۰۵)^{-۲} = ۱۰۰۰$

لوک ا - ۲ لوک ۱٫۰۵ = ۳
لوک ا = ۳٫۱۲۷۱۳۵۸ = لوک ۱۳۴۰٫۰۹۶ ۱
$\therefore$ ا = ۱۳۴۰٫۰۹۶ اور حاصل = ۱۳۴۰ پونڈ ۱ شلنگ ۱۱ پنس

۲۴۴۔ فرض کرو کہ پٹہ دار نے کوئی خاص رقم ادا کر کے کسی مِلک کا اجارہ (ع + ق) سالوں کے لئے حاصل کیا۔ ق سال گزر جانے پر وہ ع + ن سالوں کے لئے نیا اجارہ حاصل کرنا چاہتا ہے، جو رقم اسے اس غرض کے لئے ادا کرنی پڑتی ہے اسے ن سال کیلئے تجدید اجارہ کا جرمانہ کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ مِلک کی سالانہ قیمت ا ہے، چونکہ پٹہ دار (ع + ن) سال میں سے ع سال کی رقم ادا کر چکا ہے اس لئے جرمانہ اُس ملتوی سالیانہ ا کی قیمت حاضرہ کے مساوی ہوگا جو ع سال کے بعد شروع ہو کر ن سال تک جاری رہے، پس

$$\text{جرمانہ} = \frac{ا ش^{-ع}}{ش - ۱} - \frac{ا ش^{-ع-ن}}{ش - ۱} \quad \ldots\ldots \text{[دفعہ ۲۴۲]}$$

امثلہ ۱۸ (ب)

جب تک کہ اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے سود کو ہمیشہ سود مرکب تصور کیا جائے۔

۱۔ ۱۲۰ پونڈ کا ایک سالیانہ ۶ سال تک ادا نہیں ہوا۔ اگر

اس کا کل زر ۶۷۲ پونڈ ہو تو بحساب سود مفرد شرح فیصد دریافت کرو۔

۲۔ ۱۰۰ پونڈ کے ایک سالیانہ کا کل زر ۲۰ سال میں $\frac{1}{2}$ ۴ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب معلوم کرو، معلوم ہے

لوک ۱٫۰۴۵ = ۰٫۰۱۹۱۱۶۳،

لوک ۲٫۴۱۱۷ = ۰٫۳۸۲۳۲۶۰

۳۔ ایک ملک ۱۷۵۰ پونڈ میں خریدی گئی، بتاؤ کہ یہ کس شرح فیصد کے موافق اجارہ پر دی جائے کہ مالک کو قیمت خرید پر ۴ فیصد نفع ہو۔

۴۔ ایک ملک کی سالانہ آمدنی ۱۲۰ پونڈ ہے، اس کو ۴ ہزار پونڈ پر فروخت کرایا گیا ہے، سود کی شرح دریافت کرو۔

۵۔ اگر سود کی شرح $\frac{1}{2}$ ۳ فی صد ہو تو بتاؤ کہ ایک ملک کے لئے کتنے سال کی خرید، بطور قیمت ادا کرنی پڑے گی۔

۶۔ اگر ایک دوامی سالیانہ کی قیمت ۲۵ سال کی خرید کے مساوی ہو تو ۶۲۵ پونڈ کے ایک ایسے سالیانہ کا کل زر دریافت کرو جو ۲ سال تک جاری رہنے والا ہو۔

۷۔ اگر ایک دوامی سالیانہ کی قیمت ۲۰ سال کی خرید کے مساوی ہو، تو وہ سالیانہ معلوم کرو جو ۳ سال تک جاری رہے اور جو ۲۵۲۲ پونڈ میں خریدا جاسکے۔

۸۔ ۴۰۰ پونڈ سالانہ کی ایک ملک کا اجرا ۱۰ سال کے بعد شروع ہونے والا ہے، اگر سود کی شرح ۴ فیصد ہو تو بتاؤ کہ اب یہ ملک کتنے میں خریدی جاسکتی ہے،

لوک ۱۰۴ = ۲٫۰۱۷۰۳۳۳،

لوک ۶٫۷۵۵۶۵ = ۰٫۸۲۹۶۶۷۰

۹۔ اگر سود ہر لمحہ واجب الادا ہو تو بتاؤ کہ کونسی رقم ۵۰ سال میں ۲ فیصد شرح پر ۵۰۰ پونڈ ہو جائے گی (ی$^{-1}$ = ۰٫۳۶۷۸)

۱۰۔ ایک سالیانہ کے لئے جو ن سال تک جاری رہنے والا ہے '۲۵ سال کی خرید' ادا کرنی پڑتی ہے اور ایک اور سالیانہ کے لئے جو ۲ ن سال تک جاری رہنے والا ہے '۴۰ سال کی خرید' ادا کرنی پڑتی ہے، شرح فیصد دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک شخص ۵ ہزار پونڈ ۴ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب قرض لیتا ہے، اگر اصل زر اور سود دونوں کو ۱۰ مساوی سالانہ قسطوں سے ادا کرنا مطلوب ہو تو ہر ایسی قسط کی مقدار معلوم کرو

لوک ۱٫۰۴ = ۰٫۰۱۷۰۳۳۳

اور لوک ۶۷۵۵۶۵ = ۵٫۸۲۹۶۶۷

۱۲۔ ایک شخص کے پاس ۲۰ ہزار پونڈ راس المال ہے اور اس پر اُسے ۵ فیصد کے حساب سے سود ملتا ہے، اگر وہ ۱۸۰۰ پونڈ سالانہ خرچ کرے تو ثابت کرو کہ وہ سترھویں سال کے اختتام سے قبل تباہ ہو جائے گا۔

لوک ۲ = ۰٫۳۰۱۰۳۰۰

لوک ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳

لوک ۷ = ۰٫۸۴۵۰۹۸۰

۱۳۔ ایک ملک کے سالانہ محاصل ۵۰۰ پونڈ ہیں، اور اسے ۲۰ سال کے لئے اجارہ پر دیا گیا ہے، اگر ۷ سال کے بعد پٹہ کی تجدید کرانا منظور ہو تو 'جرمانہ' کی مقدار معلوم کرو جبکہ سود کی شرح ۶ فیصد ہو۔

لوک ۱٫۰۶ = ۲٫۰۲۵۳۰۵۹

لوک ۴٫۶۸۸۳۸۵ = ۰٫۶۷۱۰۲۳۳

لوک ۳٫۱۱۸۰۴۲ = ۰٫۴۹۳۸۸۲۰

۱۴۔ اگر ایک سالیانہ کو ن، ۲ ن، ۳ ن سال تک جاری رکھنے کے لئے بالترتیب ا، ب، ج سال کی خرید ادا کرنی پڑے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^{2} - \text{اب} + \text{ب}^{2} = \text{اج}$$

۱۵ - ایک دوامی سالیانہ ایسا ہے کہ اس کی رُو سے پہلے سال کے آخر میں ۱۰ پونڈ واجب الادا ہوتے ہیں، دوسرے سال کے آخر میں ۲۰ پونڈ اور تیسرے کے آخر میں ۳۰ پونڈ علیٰ ہذا القیاس ہر سال کے آخر میں ۱۰ پونڈ کا اضافہ ہوتا جاتا ہے، اگر سود کی شرح ۵ فیصد فی سال ہو تو سالیانہ کی قیمت حاضرہ معلوم کرو۔

انیسواں باب

لا تساویات

۲۴۵ - کوئی مقدار ا کسی دوسری مقدار ب سے بڑی اُس وقت کہلاتی ہے جبکہ ا - ب مثبت ہو، مثلاً ۲ بڑا ہے -۳ سے کیونکہ ۲ -(-۳) یعنی ۵ مثبت ہے نیز مقدار ب، ا سے چھوٹی اُس وقت کہلاتی ہے جبکہ ب - ا منفی ہو مثلاً -۵ چھوٹا ہے -۲ سے کیونکہ -۵ -(-۲) یعنی -۳ منفی ہے۔ ظاہر ہے کہ اس تعریف کے بموجب صفر کو ہر منفی مقدار سے بڑا سمجھنا چاہئے۔

باب ہذا میں تاوقتیکہ اس کے خلاف بالتصریح بیان نہ کیا جائے حروف سے ہمیشہ حقیقی مثبت مقداریں تعبیر ہونگی۔

۱۴۶ - اگر ا > ب تو ظاہر ہے کہ

$$ا + ج > ب + ج$$

$$ا - ج > ب - ج$$

$$ا ج > ب ج$$

$$\frac{ا}{ج} > \frac{ب}{ج}$$

یعنی لا تساوی برقرار رہے گی اگر اس کے طرفین میں ایک ہی مثبت

مقدار جمع کردی جائے، یا طرفین سے ایک ہی مثبت مقدار تفریق کردی جائے یا طرفین کو ایک ہی مثبت مقدار سے ضرب یا تقسیم کردیا جائے۔

۲۴۷ — اگر ا - ج > ب

تو دونوں جانب ج جمع کردینے سے ا > ب + ج

اس سے ظاہر ہے کہ کسی لاتساوی میں ایک طرف کی کسی رقم کو اس کی علامت بدل کر دوسری طرف منتقل کرسکتے ہیں۔

اگر ا > ب تو صریحاً ب < ا

یعنی اگر کسی لاتساوی کے طرفین کا باہم تبادلہ کردیا جائے تو لاتساوی کی علامت الٹ جاتی ہے۔

اگر ا > ب تو ا - ب مثبت ہوگا اور ب - ا منفی،

یعنی - ا - (- ب) منفی ہوگا اسلئے

- ا < - ب

پس اگر کسی لاتساوی میں اس کی سب رقوم کی علامات بدل دی جائیں تو لاتساوی کی علامت الٹ جاتی ہے۔

نیز اگر ا > ب تو - ا < - ب

اسلئے - اج < - ب ج

پس اگر کسی لاتساوی کے طرفین کو کسی منفی مقدار سے ضرب دیا جائے تو لاتساوی کی علامت الٹ جاتی ہے۔

۲۴۸ — اگر ا۱ > ب۱، ا۲ > ب۲، ا۳ > ب۳، ... ام > بم

تو ظاہر ہے کہ

ا۱ + ا۲ + ا۳ + ... + ام > ب۱ + ب۲ + ب۳ + ... + بم

اور ا۱ ا۲ ا۳ .... ام > ب۱ ب۲ ب۳ ... بم

۲۴۹ — اگر $ا > ب$ اور ن اور ق مثبت صحیح عدد ہوں

تو $\sqrt[ق]{ا^{ن}} > \sqrt[ق]{ب^{ن}}$

یعنی $ا^{\frac{ن}{ق}} > ب^{\frac{ن}{ق}}$ اور بنابریں $ا^{\frac{ن}{ق}} > ب^{\frac{ن}{ق}}$ یعنی

$ا^{ن} > ب^{ن}$ جہاں ن کوئی مثبت مقدار ہے

نیز $\frac{1}{ا^{ن}} < \frac{1}{ب^{ن}}$ یعنی $ا^{-ن} < ب^{-ن}$

۲۵۰ — ہر حقیقی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے، یعنی یہ صفر سے بڑا ہوتا ہے، مثلاً $(ا - ب)^{2}$ مثبت ہے

$\therefore ا^{2} - ۲\,ا ب + ب^{2} > ۰$

$\therefore ا^{2} + ب^{2} > ۲\,ا ب$

اسی طرح سے $\frac{لا + ما}{۲} > \sqrt{لا\,ما}$

یعنی دو مثبت مقداروں کا اوسطِ حسابی اُن کے اوسطِ ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

اگر مقادیر مذکورہ برابر ہوں تو لاتساوی، تساوی بن جاتی ہے۔

۲۵۱ — جن لاتساویات میں ترتیب حروف متشاکل ہو اُن میں خصوصیت کے ساتھ دفعہ ماقبل کے نتائج بہت مفید اور کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

مثال ۱ — اگر ا، ب، ج مثبت مقادیر کو تعبیر کریں تو ثابت کرو

$$ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} > ب\,ج + ج\,ا + ا\,ب$$

اور $۲(ا^{3} + ب^{3} + ج^{3}) > ب\,ج(ب + ج) + ج\,ا(ج + ا)$

$+ ا\,ب(ا + ب)$

چونکہ ب² + ج² > ۲ ب ج .... (۱)

ج² + ا² > ۲ ج ا

ا² + ب² > ۲ ا ب

اس لئے جمع کرنے سے ا² + ب² + ج² > ب ج + ج ا + ا ب

نیز یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ یہ جواب ا، ب، ج کی تمام حقیقی قیمتوں کیلئے درست ہے

نیز (۱) کی رو سے ب² - ب ج + ج² > ب ج ..... (۲)

∴ ب³ + ج³ > ب ج (ب + ج) .... (۳)

(۳) کے مماثل دو اور متشاکل لا تساویات لکھنے اور جمع کرنے سے

۲ (ا³ + ب³ + ج³) > ب ج (ب + ج) + ج ا (ج + ا)
+ ا ب (ا + ب)

اس میں ایک بات قابل غور ہے وہ یہ کہ (۳) (۲) کے طرفین کو جزو ضربی (ب + ج) سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے، لیکن اگر جزو ضربی (ب + ج) منفی ہو تو لا تساوی درست نہیں رہے گی۔

مثال ۲۔ اگر لا کوئی حقیقی قیمت اختیار کر سکے تو بتاؤ کہ رقوم لا³ + ۱ اور لا² + لا میں سے کونسی رقم بڑی ہے۔

(لا³ + ۱) - (لا² + لا) = لا³ - لا² - (لا - ۱)

= (لا² - ۱) (لا - ۱)

= (لا - ۱)² (لا + ۱)

اس میں (لا - ۱)² ہمیشہ مثبت رہتا ہے، اس لئے لا³ + ۱ لا² + لا سے بڑا ہوگا اگر (لا - ۱) مثبت ہو اور چھوٹا ہوگا اگر یہ منفی ہو

یعنی ... بڑا ہوگا اگر $x > -1$ اور چھوٹا ہوگا اگر $x < -1$
اگر $x = -1$ تو لاتساوی، تساوی بن جاتی ہے۔

۲۵۲ — فرض کرو کہ ا اور ب دو مثبت مقداریں ہیں جن کا حاصل جمع ج ہے اور حاصل ضرب ض ہے۔

چونکہ ۴ ا ب = (ا + ب)^2 − (ا − ب)^2

اس لئے ۴ ض = ج^2 − (ا − ب)^2

اور ج^2 = ۴ ض + (ا − ب)^2

پس اگر ج کی قیمت معلوم ہو تو ض کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی اگر ا = ب اور اگر ض کی قیمت معلوم ہو تو ج کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہوگی اگر ا = ب، بالفاظ دیگر اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل جمع معلوم ہو تو اُن کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا اگر یہ مقداریں مساوی ہوں اور اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل ضرب معلوم ہو توان کا مجموعہ چھوٹے سے چھوٹا ہوگا اگر یہ مقادیر برابر ہوں۔

۲۵۳ — اُس حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو جس کے اجزائے ضربی کا حاصل جمع مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ن اجزائے ضربی ا، ب، ج ..... ک ہیں اور اُن کا حاصل جمع مستقل اور س کے مساوی ہے۔

حاصل ضرب ا ب ج ..... ک پر غور کرو۔ فرض کرو کہ ا اور ب دو غیر مساوی اجزائے ضربی ہیں، اگر ہم ان اجزائے ضربی کی بجائے دو مساوی اجزائے ضربی $\frac{ا + ب}{۲}$، $\frac{ا + ب}{۲}$ لکھ دیں تو حسب دفعہ ماقبل اِن کا حاصل جمع تو نہیں بدلتا مگر حاصل ضرب بڑھ جاتا ہے، پس جب تک حاصل ضرب میں دو غیر مساوی اجزائے ضربی شریک رہیں ہم ہمیشہ اِن کے حاصل جمع کو کم و بیش کئے بغیر حاصل ضرب کو بڑھا سکتے ہیں۔ اِس سے ظاہر ہے کہ حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا

اگر اس کے اجزائے ضربی سب باہم مساوی ہوں۔ موجودہ صورت میں ان اجزائے ضربی میں سے ہر ایک $\frac{س}{ن}$ کے مساوی ہے اور

حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت $\left(\frac{س}{ن}\right)^{ن}$ یا

$$\left(\frac{ا + ب + ج + \cdots + ک}{ن}\right)^{ن}$$

نتیجہ صریح ۔ اگر ا، ب، ج، ... ک غیر مساوی ہوں تو

$$\left(\frac{ا + ب + ج + \cdots ک}{ن}\right)^{ن} > ا ب ج \cdots ک$$

یعنی $\frac{ا + ب + ج + \cdots ک}{ن} > (ا ب ج \cdots ک)^{\frac{1}{ن}}$

الفاظ 'اوسطِ حسابی' اور 'اوسطِ ہندسی' کے معنوں میں توسیع کرنے سے یہ نتیجہ ذیل کے الفاظ میں بھی بیان ہو سکتا ہے۔
مثبت مقادیر کی کسی تعداد کا اوسطِ حسابی اُن کے اوسطِ ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

مثال ۔ ثابت کرو کہ $(1^{ر} + 2^{ر} + 3^{ر} + \cdots + ن^{ر})^{ن} > ن^{ن} (\underline{|ن})^{ر}$

جہاں ر سے مراد کوئی حقیقی مقدار ہے۔

چونکہ $\frac{1^{ر} + 2^{ر} + 3^{ر} + \cdots + ن^{ر}}{ن} > (1^{ر} \times 2^{ر} \times 3^{ر} \times \cdots \times ن^{ر})^{\frac{1}{ن}}$

$\therefore \left(\frac{1^{ر} + 2^{ر} + 3^{ر} + \cdots + ن^{ر}}{ن}\right)^{ن} > 1^{ر} \times 2^{ر} \times 3^{ر} \cdots ن^{ر}$ یعنی $> (\underline{|ن})^{ر}$

جس سے نتیجہ مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو جاتا ہے۔

۲۵۴ ۔ اگر ل، م، ن ..... مثبت صحیح عدد ہوں تو

$ا^{ل} ب^{م} ج^{ن}$ ..... کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو جہاں
$ا + ب + ج + ...$ مستقل ہے۔

چونکہ ل، م، ن ..... مستقل ہیں اسلئے $ا^{ل} ب^{م} ج^{ن}$ ..... کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جب $\left(\frac{ا}{ل}\right)^{ل} \left(\frac{ب}{م}\right)^{م} \left(\frac{ج}{ن}\right)^{ن}$ کی قیمت بڑی سے بڑی ہو، لیکن موخرالذکر جملہ $ل + م + ن + ...$ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن کا حاصل جمع $ل\left(\frac{ا}{ل}\right) + م\left(\frac{ب}{م}\right) + ن\left(\frac{ج}{ن}\right) +$ ..... یعنی $ا + ب + ج + ...$ ہے جو مستقل ہے۔

پس $ا^{ل} ب^{م} ج^{ن}$ کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ اجزائے ضربی

$$\frac{ا}{ل}،\ \frac{ب}{م}،\ \frac{ج}{ن}،\ .....$$

سب باہم مساوی ہوں یعنی

$$\frac{ا}{ل} = \frac{ب}{م} = \frac{ج}{ن} = \frac{ا + ب + ج + ...}{ل + م + ن + ...}$$

لہذا بڑی سے بڑی قیمت ہوگی $ل^{ل} م^{م} ن^{ن} .... \left(\frac{ا+ب+ج+....}{ل+م+ن+....}\right)^{ل+م+ن+...}$

مثال۔ لا کی کسی حقیقی قیمت کے لئے جو تعداداً ا سے کم ہو $(ا + لا)^{۳} (ا - لا)^{۴}$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

جملہ مذکورہ بڑے سے بڑا ہوگا جب $\left(\frac{ا+لا}{۳}\right)^{۳} \left(\frac{ا-لا}{۴}\right)^{۴}$ بڑے

بڑا ہو، لیکن اس جملہ کے اجزائے ضربی کا مجموعہ $۲\left(\frac{ا+لا}{۲}\right)+۴\left(\frac{ا-لا}{۴}\right)$
یعنی ۲ ا ہے، اس لئے $(ا+لا)^{۲}\,(ا-لا)^{۴}$ کی قیمت بڑی سے بڑی

اس وقت ہوگی جبکہ $\frac{ا+لا}{۲}=\frac{ا-لا}{۴}$ یعنی $لا=-\frac{ا}{۳}$

لہذا اس کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{۴^{۴}\times ۲^{۲}}{۳^{۶}}\,ا^{۶}$ ہے۔

۲۵۵۔ بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں اکثر اوقات اوپر کے طریقوں کی نسبت زیادہ آسانی سے درجہ دوم کی ایک مساوات کو حل کرنے سے معلوم ہوسکتی ہیں۔ اس کی چند مثالیں باب نہم میں دی جا چکی ہیں۔ یہاں ہم ایک اور مثال درج کرتے ہیں۔

مثال۔ ایک طاق عدد کو دو ایسے صحیح حصوں میں تقسیم کرو جن کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہو۔

فرض کرو کہ مذکورہ بالا طاق عدد ۲ن + ۱ ہے اور اس کے حصے لا اور ۲ن + ۱ − لا ہیں، نیز ان کا حاصل ضرب ما ہے،
تب $(۲ن+۱)لا-لا^{۲}=ما$

جس سے $۲لا=(۲ن+۱)\pm\sqrt{(۲ن+۱)^{۲}-۴ما}$

لیکن علامت جذر کے اندر کی رقم مثبت ہونی چاہئے، اس لئے صریحاً ما، $\frac{۱}{۴}(۲ن+۱)^{۲}$ یعنی $ن^{۲}+ن+\frac{۱}{۴}$ سے بڑا نہیں ہو سکتا
نیز چونکہ ما صحیح عدد ہے اس لئے اس کی بڑی سے بڑی قیمت $ن^{۲}+ن$ ہوسکتی ہے۔ ما کی اس قیمت کی رو سے لا = ن + ۱ یا ن
پس دو حصے ن اور ن + ۱ ہیں۔

۲۵۶۔ بعض اوقات ہم ذیل کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔

مثال ـ (ا + لا)(ب + لا) / (ج + لا) کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت معلوم کرو

ج + لا کی بجائے ما رکھنے سے

جملہ مذکور = (ا - ج + ما)(ب - ج + ما) / ما

= (ا - ج)(ب - ج) / ما + ما + ا - ج + ب - ج

= (√((ا - ج)(ب - ج) / ما) - √ما)² + ا - ج + ب - ج + ۲ √((ا - ج)(ب - ج))

لہذا جملہ مذکورہ چھوٹے سے چھوٹا ہوگا جب مربع رقم صفر ہو یعنی

جب ما = √((ا - ج)(ب - ج))

پس چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہے

ا - ج + ب - ج + ۲ √((ا - ج)(ب - ج))

اور اس کے متناظر لا کی قیمت ہے √((ا - ج)(ب - ج)) - ج

امثلہ نمبری ۱۹ (ا)

۱ـ ثابت کرو کہ (ا ب + لا ما)(ا لا + ب ما) > ۴ ا ب لا ما

۲ـ ثابت کرو کہ (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب) > ۸ ا ب ج

۳ـ ثابت کرو کہ کسی حقیقی مثبت مقدار اور اس کے معکوس کا حاصل جمع کبھی ۲ سے کم نہیں ہو سکتا۔

۴ - اگر $ا^2 + ب^2 = 1$ اور $لا^2 + ما^2 = 1$ تو ثابت کرو کہ $الا + ب ما < 1$

۵ - اگر $ا^2 + ب^2 + ج^2 = 1$ اور $لا^2 + ما^2 + ی^2 = 1$ تو ثابت کرو کہ

$الا + ب ما + ج ی < 1$

۶ - اگر $ا > ب$ تو ثابت کرو کہ $ا^ا ب^ب > ا^ب ب^ا$ اور

$لوک \frac{ب}{ا} < لوک \frac{1 + ب}{1 + ا}$

۷ - ثابت کرو کہ $(لا^2 ما + ما^2 ی + ی^2 لا)(لا ما^2 + ما ی^2 + ی لا^2) > 9 لا^2 ما^2 ی^2$

۸ - بتاؤ کہ $3 ا ب^2$ اور $ا^3 + 2 ب^3$ میں سے کونسا بڑا ہے۔

۹ - ثابت کرو کہ $ا^2 ب + ا ب^2 < ا^3 + ب^3$

۱۰ - ثابت کرو کہ $6 ا ب ج < ب ج (ب + ج) + ج ا (ج + ا) + ا ب (ا + ب)$

۱۱ - بتاؤ کہ $ب^2 ج^2 + ج^2 ا^2 + ا^2 ب^2 > ا ب ج (ا + ب + ج)$

۱۲ - لا کی مثبت قیمتوں کے لئے معلوم کرو کہ $لا^3$ اور $لا^2 + لا + 2$ میں سے کونسا بڑا ہے۔

۱۳ - ثابت کرو کہ اگر $لا > ا$ تو $لا^3 + 13 ا^2 لا > 5 ا لا^2 + 9 ا^3$

۱۴ - لا کی وہ بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو جس کے لئے $7 لا^2 + 11$ بڑا ہو $لا^3 + 17 لا$ سے۔

۱۵ - $لا^2 - 12 لا + 40$ کی چھوٹی سے چھوٹی اور $24 لا - 8 - 9 لا^2$ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۱۶ - ثابت کرو کہ $\left(\frac{ن + 1}{2}\right)^2 > ن$ اور $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2ن < (ن + 1)^ن$

۱۷ - بتاؤ کہ $(لا + ما + ی)^3 > 27 لا ما ی$

۱۸ - ثابت کرو کہ $ن^ن > 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2ن - 1)$

۱۹- اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو اور ۲ سے بڑا ہو تو بتاؤ کہ

$$۲^{ن} > ۱ + ن\sqrt{۲^{ن-۱}}$$

۲۰- ثابت کرو کہ $ن^{ن}\left(\frac{ن+۱}{۲}\right)^{۲ن} > \left(\underline{|ن}\right)^{۳}$

۲۱- ثابت کرو کہ

(۱) $(لا+ما+ی)^{۳} > ۲۷(ما+ی-لا)(ی+لا-ما)(لا+ما-ی)$

(۲) $لا\,ما\,ی > (ما+ی-لا)(ی+لا-ما)(لا+ما-ی)$

۲۲- $(۷-لا)^{۴}(۲+لا)^{۵}$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو جبکہ لا، ۷ اور -۲ کے درمیان ہو۔

۲۳- $\frac{(۵+لا)(۲+لا)}{۱+لا}$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت دریافت کرو۔

۲۵۷- اگر ا اور ب مثبت اور غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$\frac{ا^{م}+ب^{م}}{۲} > \left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{م}$ سوائے اس صورت کے جبکہ م کوئی مثبت کسر واجب ہو۔

ظاہر ہے کہ $ا^{م}+ب^{م} = \left(\frac{ا+ب}{۲}+\frac{ا-ب}{۲}\right)^{م} + \left(\frac{ا+ب}{۲}-\frac{ا-ب}{۲}\right)^{م}$

اور چونکہ $\frac{ا-ب}{۲}$ کم ہے $\frac{ا+ب}{۲}$ سے، اسلئے ہم اِن دونوں جملوں کو $\frac{ا-ب}{۲}$ کی صعودی قوتوں کی رقوم میں پھیلا سکتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۸۴)

$$\therefore \frac{ا^{م}+ب^{م}}{۲} = \left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{م} + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}}\left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{م-۲}\left(\frac{ا-ب}{۲}\right)^{۲}$$

$$+ \frac{م(م-۱)(م-۲)(م-۳)}{\underline{|۴}}\left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{م-۴}\left(\frac{ا-ب}{۲}\right)^{۴} + \dots$$

(۱) اگر م کوئی مثبت صحیح عدد ہو یا کوئی منفی مقدار ہو تو بائیں جانب کی سب رقوم مثبت ہونگی، اسلئے $\frac{ا^م + ب^م}{۲} > \left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^م$

(۲) اگر م مثبت ہو اور ۱ سے کم ہو تو بائیں جانب کی سب رقوم پہلی رقم کے بعد منفی ہونگی اسلئے $\frac{ا^م + ب^م}{۲} < \left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^م$

(۳) اگر $م > ۱$ اور مثبت ہو تو م کو $\frac{۱}{ن}$ کے مساوی فرض کرو جہاں $ن < ۱$

$$\text{تب}\ \left(\frac{ا^م + ب^م}{۲}\right)^{\frac{۱}{م}} = \left(\frac{ا^{\frac{۱}{ن}} + ب^{\frac{۱}{ن}}}{۲}\right)^ن$$

$$\therefore \left(\frac{ا^م + ب^م}{۲}\right)^{\frac{۱}{م}} > \frac{\left(ا^{\frac{۱}{ن}}\right)^ن + \left(ب^{\frac{۱}{ن}}\right)^ن}{۲} \ldots\ldots (۲)\ \text{کی رو سے}$$

$$\therefore \left(\frac{ا^م + ب^م}{۲}\right)^{\frac{۱}{م}} > \frac{ا+ب}{۲}$$

$$\therefore \frac{ا^م + ب^م}{۲} > \left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^م$$

پس مسئلہ ثابت ہوا اگر م = ۰ یا ۱ تو لا تساوی، تساوی بن جاتی ہے

۲۵۸- اگر ن مثبت مقادیر ا، ب، ج، ..... ک ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ا^م + ب^م + ج^م + \ldots\ldots ک^م}{ن} > \left(\frac{ا + ب + ج + \ldots\ldots ک}{ن}\right)^م$$

سوائے اُس صورت کے جب م کوئی مثبت کسر واجب ہو۔

فرض کرو کہ م کی قیمت کچھ ہی ہے جو صفر اور ایک کے درمیان واقع نہیں ہے۔

جملہ $ا^م + ب^م + ج^م + \ldots\ldots + ک^م$ پر غور کرو اور فرض کرو کہ ا اور ب

غیر مساوی ہیں، اگر ہم ا اور ب دونوں کی بجائے دو مساوی مقادیر $\frac{ا+ب}{۲}$ اور $\frac{ا+ب}{۲}$ درج کردیں تو ایسا کرنے سے ا + ب + ج + ... + ک کی قیمت میں تو کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی لیکن $ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ... + ک^۲$ کی قیمت کم ہو جاتی ہے

کیونکہ $ا^۲ + ب^۲ > ۲ \left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^۲$

پس جب تک مقادیر ا، ب، ج، ..... ک میں سے کوئی دو مقادیر غیر مساوی رہیں ہم ہمیشہ ا + ب + ج + ... + ک کی قیمت کو کم و بیش کئے بغیر $ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ... ک^۲$ کی قیمت کو کم کرسکتے ہیں

پس $ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ... + ک^۲$ کی قیمت کم سے کم اس صورت میں ہوتی ہے جبکہ مقادیر ا، ب، ج، ..... ک سب کی سب باہم مساوی ہوں یعنی ہر ایک مقدار $\frac{ا + ب + ج + ... + ک}{ن}$ کے مساوی ہو۔

اس صورت میں $ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ... + ک^۲$ کی قیمت

$ن \left(\frac{ا + ب + ج + ... + ک}{ن}\right)^۲$ کے مساوی ہوتی ہے

اس لئے اگر ا، ب، ج، ... ک غیر مساوی ہوں تو

$$\frac{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ... + ک^۲}{ن} > \left(\frac{ا + ب + ج + ... + ک}{ن}\right)^۲$$

اگر م، صفر اور ایک کے درمیان واقع ہو تو ہم اسی طرح سے ثابت کرسکتے ہیں کہ لا تساوی کی علامت اُلٹ جائیگی۔

عام الفاظ میں اس مسئلہ کو یوں بھی بیان کرسکتے ہیں۔

ن مثبت مقادیر کی م ویں قوتوں کا وسطِ حسابی ہمیشہ ان مقداروں کے اوسطِ حسابی کی م ویں قوت سے بڑا ہوتا ہے باستثنائے اس صورت کے جبکہ م کسر اور ایک کے درمیان واقع ہو۔

۲۵۹ — ا اور ب مثبت صحیح عدد ہیں اور ا > ب، اگر لا کوئی مثبت مقدار ہو تو ثابت کرو کہ $\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\text{ا}} > \left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)^{\text{ب}}$

$$\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{\text{ا}} = 1 + \text{لا} + \left(1-\frac{1}{\text{ا}}\right)\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \left(1-\frac{1}{\text{ا}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ا}}\right)\frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots \quad (1)$$

اس سلسلہ میں ا + ۱ رقمیں ہیں اور

$$\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ب}}\right)^{\text{ب}} = 1 + \text{لا} + \left(1-\frac{1}{\text{ب}}\right)\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \left(1-\frac{1}{\text{ب}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ب}}\right)\frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots \quad (2)$$

اس سلسلہ میں ب + ۱ رقمیں ہیں۔

پہلی اور دوسری رقم کے بعد سلسلہ (۱) کی ہر ایک رقم سلسلہ (۲) کی متناظر رقم سے بڑی ہے، نیز چونکہ سلسلہ (۱) میں رقوم کی تعداد سلسلہ (۲) کی تعداد رقوم سے بڑی ہے اس لئے سلسلہ (۱) بڑا ہے سلسلہ (۲) سے، پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۶۰ — ثابت کرو کہ اگر لا اور ما مثبت کسور واجب ہوں اور لا > ما تو

$$\sqrt[\text{لا}]{\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}}} > \sqrt[\text{ما}]{\frac{1+\text{ما}}{1-\text{ما}}}$$

اب

$$\sqrt[\text{لا}]{\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}}} > \text{یا} < \sqrt[\text{ما}]{\frac{1+\text{ما}}{1-\text{ما}}}$$

جیسے

$$\frac{1}{\text{لا}}\ \text{لوک}\ \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} > \text{یا} < \frac{1}{\text{ما}}\ \text{لوک}\ \frac{1+\text{ما}}{1-\text{ما}}$$

لیکن $\frac{۱}{\text{لا}}$ لوک $\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} = ۲\left(۱+\frac{\text{لا}^۲}{۳}+\frac{\text{لا}^۴}{۵}+\dots\right)\dots$ [دفعہ ۲۲۶]

اور $\frac{۱}{\text{ما}}$ لوک $\frac{۱+\text{ما}}{۱-\text{ما}} = ۲\left(۱+\frac{\text{ما}^۲}{۳}+\frac{\text{ما}^۴}{۵}+\dots\right)$

اِن دونوں سلسلوں میں سوائے رقم اول کے پہلے سلسلہ کی ہر ایک رقم دوسرے سلسلہ کی متناظر رقم سے بڑی ہے اس لئے

$$\frac{۱}{\text{لا}}\ \text{لوک}\ \frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}} > \frac{۱}{\text{ما}}\ \text{لوک}\ \frac{۱+\text{ما}}{۱-\text{ما}}$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۶۱ - ثابت کرو کہ اگر لا $<$ ۱ تو $(۱+\text{لا})^{۱+\text{لا}}(۱-\text{لا})^{۱-\text{لا}} > ۱$

اس سے مستنبط کرو کہ $\text{ا}^{\text{ا}}\ \text{ب}^{\text{ب}} > \left(\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\right)^{\text{ا}+\text{ب}}$

$(۱+\text{لا})^{۱+\text{لا}}(۱-\text{لا})^{۱-\text{لا}}$ کو ض سے تعبیر کرو

$$\text{لوک ض} = (۱+\text{لا})\ \text{لوک}\ (۱+\text{لا}) + (۱-\text{لا})\ \text{لوک}\ (۱-\text{لا})$$

$$= \text{لا}\left\{\text{لوک}\ (۱+\text{لا}) - \text{لوک}\ (۱-\text{لا})\right\} + \text{لوک}\ (۱+\text{لا}) + \text{لوک}\ (۱-\text{لا})$$

$$= ۲\,\text{لا}\left(\text{لا}+\frac{\text{لا}^۳}{۳}+\frac{\text{لا}^۵}{۵}+\dots\right) - ۲\left(\frac{\text{لا}^۲}{۲}+\frac{\text{لا}^۴}{۴}+\frac{\text{لا}^۶}{۶}+\dots\right)$$

$$= ۲\left(\frac{\text{لا}^۲}{۱\times۲}+\frac{\text{لا}^۴}{۳\times۴}+\frac{\text{لا}^۶}{۵\times۶}\right)$$

پس لوک ض مثبت ہے اور اس لئے ض $>$ ۱

یعنی $(۱+لا)^{۱+لا}(۱-لا)^{۱-لا} > ۱$

اس نتیجہ میں رکھو $لا = \frac{ی}{ع}$ جہاں $ع > ی$

تب $\left(۱+\frac{ی}{ع}\right)^{۱+\frac{ی}{ع}}\left(۱-\frac{ی}{ع}\right)^{۱-\frac{ی}{ع}} > ۱$

$\therefore \left(\frac{ع+ی}{ع}\right)^{ع+ی}\left(\frac{ع-ی}{ع}\right)^{ع-ی} > ۱^{ع}$ یعنی ۱

$\therefore (ع+ی)^{ع+ی}(ع-ی)^{ع-ی} > ع^{۲ع}$

اب ع + ی کو ا کے اور ع - ی کو ب کے مساوی رکھو جس سے

$ع = \frac{ا+ب}{۲}$

$\therefore ا^{ا} ب^{ب} > \left(\frac{ا+ب}{۲}\right)^{ا+ب}$

امثلہ نمبری ۱۹ (ب)

۱- ثابت کرو کہ $۲۷(ا^۳+ب^۳+ج^۳) > (ا+ب+ج)^۳$

۲- ثابت کرو کہ $ن(ن+۱)^۳ < ۸(۱^۳+۲^۳+۳^۳+....+ن^۳)$

۳- ثابت کرو کہ اگر $م > ۱$ تو پہلے ن جفت اعداد کی م ویں قوتوں کا حاصل جمع $ن(ن+۱)^{م}$ سے بڑا ہوتا ہے۔

۴- اگر ہ اور ب دو مثبت مقداریں ہوں اور $ہ > ب$ سے تو ثابت کرو کہ

$$\left(۱+\frac{۱}{ہ}\right)^{ہ} > \left(۱+\frac{۱}{ب}\right)^{ب}$$

اس سے بتاؤ کہ اگر $ن > ۱$ تو $\left(۱+\frac{۱}{ن}\right)^{ن}$ کی قیمت ۲ اور ۲٫۷۱۸...

کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۵۔ اگر ا، ب، ج کی قیمتیں نزولی ترتیب میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{ا+ج}{ا-ج}\right)^{ا} < \left(\frac{ب+ج}{ب-ج}\right)^{ب}$$

۶۔ ثابت کرو کہ $\left(\frac{ا+ب+ج+\dots+ک}{ن}\right)^{ا+ب+ج+\dots+ک}$

$< ا^{ا}\, ب^{ب}\, ج^{ج} \dots ک^{ک}$

۷۔ ثابت کرو کہ اگر $م > ن$ تو $\frac{1}{م}$ لوک $(1+ا^{م}) < \frac{1}{ن}$ لوک $(1+ا^{ن})$

۸۔ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو اور $لا < 1$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1-لا^{ن+1}}{ن+1} < \frac{1-لا^{ن}}{ن}$$

۹۔ اگر ا، ب، ج سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں اور $ن > 1$ تو ثابت کرو کہ $ا^{ن} + ج^{ن} > 2\,ب^{ن}$

۱۰۔ اگر لا مثبت ہو اور ۴ا سے کم ہو تو $لا^{3}(4ا - لا)^{5}$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو، نیز معلوم کرو کہ اگر لا کوئی کسر واجب ہو تو $لا^{\frac{1}{4}}(1-لا)^{\frac{1}{2}}$ کی بڑی سے بڑی قیمت کیا ہوگی۔

۱۱۔ اگر لا مثبت ہو تو ثابت کرو کہ

$$لوک\,(1+لا) < لا \quad اور > \frac{لا}{1+لا}$$

۱۲۔ اگر $لا + ما + ی = 1$ تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{لا} + \frac{1}{ما} + \frac{1}{ی}$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ۹ ہے اور $(1-لا)(1-ما)(1-ی) > 8\,لا\,ما\,ی$

۱۳۔ ثابت کرو کہ (ا+ب + ج + د) (اٙ + بٙ + جٙ + دٙ)
> (اٚ + بٚ + جٚ + دٚ)^۲

۱۴۔ ثابت کرو کہ ذیل کے دونوں جملے مثبت ہیں
ا (ا - ب)(ا - ج) + ب (ب - ج)(ب - ا) + ج (ج - ا)(ج - ب)
اور اٚ (ا - ب)(ا - ج) + بٚ (ب - ج)(ب - ا) + جٚ (ج - ا)(ج - ب)

۱۵۔ ثابت کرو کہ اگر م > ن تو (لاٚ + ماٚ)^ن > (لاٚ + ماٚ)^م

۱۶۔ ثابت کرو کہ اٚ بٚ > ((ا+ب)/۲)^(ا+ب)

۱۷۔ ا، ب، ج حسب معمول ایک مثلث کے اضلاع کے طولوں کو تعبیر کرتے ہیں، ثابت کرو کہ جملہ
(۱) اٚ (ن - ق)(ن - ل) + بٚ (ق - ل)(ق - ن) + جٚ (ل - ن)(ل - ق)
منفی نہیں ہو سکتا، جہاں ن، ق، ل کوئی حقیقی مقادیر ہیں۔
(۲) اٚ ما ی + بٚ ی لا + جٚ لا ما مثبت نہیں ہو سکتا اگر
لا + ما + ی = ۰

۱۸۔ ثابت کرو کہ ۱ ۳ ۵ ..... (۲ن - ۱) > (ن)^ن

۱۹۔ اگر ا، ب، ج، د ..... تعداد میں ک مثبت صحیح عدد ہوں جن کا حاصل جمع ن ہو اور ن کو ک پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت اور باقی بالترتیب ق اور ص ہوں تو ثابت کرو کہ

ا ب ج د .....

کی کم سے کم قیمت (ق)^(ک-ص) (ق+۱)^ص ہے۔

بیسواں باب

انتہائی قیمتیں اور کسور منعدم

۲۶۲ - اگر ر کوئی مستقل محدود مقدار ہو تو لا کو کافی طور پر بڑھانے سے ہم کسر $\frac{\text{ر}}{\text{لا}}$ کی قیمت کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں، بالفاظ دیگر لا کو کافی بڑا لینے سے $\frac{\text{ر}}{\text{لا}}$ کی قیمت صفر کے اتنی قریب لائی جا سکتی ہے جتنی ہم چاہیں۔ اس مفہوم کو مختصراً یوں بیان کرتے ہیں کہ "جب لا لامتناہی ہو تو $\frac{\text{ر}}{\text{لا}}$ کی انتہا یا نہایت صفر ہوتی ہے"۔

بخلاف اس کے جیسے جیسے لا کم ہوتا جاتا ہے کسر $\frac{\text{ر}}{\text{لا}}$ کی قیمت بڑھتی جاتی ہے اور ہم لا کو کافی حد تک چھوٹا کرنے سے $\frac{\text{ر}}{\text{لا}}$ کی قیمت کو اتنا بڑھا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں مثلاً جب لا صفر ہو جائے تو $\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$ کی انتہا محدود نہیں رہتی۔ اس کو بالعموم یوں بیان کرتے ہیں کہ جب لا صفر ہو تو $\frac{\text{ر}}{\text{لا}}$ کی انتہائی قیمت لا متناہی ہو جاتی ہے۔

۲۶۳ - جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کوئی مقدار لا انتہا بڑھ جاتی ہے یا لا متناہی ہو جاتی ہے تو اس سے ہماری یہ مراد ہوتی ہے کہ مقدار زیر بحث ہر بڑی سے بڑی مقدار سے جس کو ہم ذہن میں لا سکیں زیادہ ہو جاتی ہے۔

اسی طرح جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کوئی مقدار لا انتہا چھوٹی ہو جاتی ہے تو اس سے ہماری یہ مراد ہوتی ہے کہ مقدار زیر بحث ہر چھوٹی سے چھوٹی مقدار سے جس کو ہم ذہن میں لا سکیں کم ہو جاتی ہے۔

کسی ایسی مقدار کی قیمت کو جو لاانتہا بڑی ہو جائے علامت ∞ کے ذریعے
تعبیر کیا جاتا ہے، اور کسی ایسی مقدار کی قیمت کو جو لاانتہا چھوٹی ہو جا
علامت ۰ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۲۶ - ان علامات کے استعمال سے دفعہ ۲۶ کے دو مطالب
اس طرح ادا کئے جا سکتے ہیں

اگر لا ∞ ہو تو $\frac{1}{لا}$ ہوتا ہے ۰

اگر لا ۰ ہو تو $\frac{1}{لا}$ ہوتا ہے ∞

لیکن طرز بیان کے اس مختصر طریقہ کو اختیار کرتے وقت یاد رہے کہ
علامتیں درحقیقت زیادہ مفصل و مشرح زبانی الفاظ کا محض اختصار
ہیں۔

۲۶ - اس سے قبل جہاں کہیں ہم نے لفظ "انتہا" کا استعمال
کیا ہے طالب علم کو غالباً اس کا مفہوم سمجھنے میں کوئی دقت واقع
نہیں ہوئی ہوگی لیکن چونکہ علم ریاضی کے اعلیٰ طبقوں کے لئے
الفاظ "نہایت" اور "انتہائی قیمت" کے مفہوم کو زیادہ صحت اور
پابندگی کے ساتھ سمجھ لینا نہایت ضروری ہے اس لئے ہم یہاں
ان کے استعمال اور معانی کی مزید توضیح کر دینا مناسب سمجھتے ہیں۔

۲۶ - تعریف۔ اگر کوئی تفاعل (ما =) ف (لا) ایسا ہو کہ
جیسے لا، ا کے قریب آتا جائے ف (لا) اور ایک ثابت
مقدار ب کے فرق کو اتنا کم کر دینا ممکن ہو جتنا کہ ہم چاہیں تو اسے
یوں بیان کرتے ہیں کہ ما کی انتہا ب ہے جب لا مائل بہ
ا ہو۔

مثلاً اگر سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ کی ن رقموں کے
مجموعہ کو ج سے تعبیر کیا جائے تو ج = ۲ - $\frac{1}{2^{ن-1}}$ ..... [دفعہ ۵۶]

یہاں ج، ن کا تفاعل ہے اور ن کو کافی بڑھانے سے $\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ کی قیمت اتنی کم کی جا سکتی ہے جتنی کہ ہم چاہیں، پس ہم کہہ سکتے ہیں کہ ج کی انتہا جب ن لامتناہی ہوجائے ۲ ہے۔

۲۶۷۔ ہمیں جن جملوں سے واسطہ پڑیگا وہ اکثر اوقات ایسے سلسلوں پر مشتمل ہوں گے جن کی رقوم کسی مشترک حرف کی قوتوں کے لحاظ سے کسی خاص ترتیب نہ ہوں، مثلاً

$$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ا_۳ لا^۳ + ...$$

یہاں $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$..... وغیرہ محدود مقداریں ہیں جو لا پر موقوف نہیں، سلسلہ بالا میں رقوم کی تعداد محدود یا غیر محدود ہو سکتی ہے۔ اس لئے مندرجہ بالا قسم کے جملوں کی انتہائی قیمتیں معلوم کرنے کے مسائل پر بحث کرنا مناسب معلوم ہوتا ہے

۲۶۸۔ سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ا_۳ لا^۳ + ...$ کی انتہائی قیمت جبکہ لا لاانتہا کم ہوجائے $ا_۰$ ہے۔

فرض کرو کہ سلسلہ بالا میں رقوم کی تعداد لامتناہی ہے۔ سروں $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$..... وغیرہ میں فرض کرو کہ بڑے سے بڑا سر ب ہے۔ سلسلہ ہذا کو $ا_۰$ + ج سے تعبیر کرو، تب

$$ج < ب لا + ب لا^۲ + ب لا^۳ + ...$$

اور اگر لا < ۱ تو $ج < \frac{ب لا}{۱ - لا}$

پس لا کو لاانتہا کم کر دینے سے ج کو اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا کہ ہم چاہیں اس لئے سلسلۂ بالا کی انتہا $ا_۰$ ہے۔

اگر تعدادِ رقوم محدود ہو تو ج کی قیمت اس کی مذکورہ بالا قیمت سے

لتہ کم ہوگی پس مسئلہ زیر بحث اس صورت میں بھی صریحاً درست ہوگا۔
۲۔ سلسلہ $ا_. + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3 + \ldots\ldots$ میں لا کو کافی طور پر چھوٹا
سے ہم کسی رقم کو اس کے بعد کی رقوم کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں
کہ ہم چاہیں اور لا کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم کسی رقم کو اس کے
کی رقوم کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔
رقم $ا_ن لا^ن$ کی نسبت اسکے بعد کی سب رقوم کے مجموعہ کے ساتھ

$$= \frac{ا_ن لا^ن}{ا_{ن+1} لا^{ن+1} + ا_{ن+2} لا^{ن+2} + \ldots} = \frac{ا_ن}{ا_{ن+1} لا + ا_{ن+2} لا^2 + \ldots}$$

لا کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ہم اس نسبت کے نسب نما کو اتنا چھوٹا
سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں بالفاظ دیگر ہم اس نسبت کو اتنا بڑا
سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔
کسی رقم $ا_ن لا^ن$ کی نسبت اس کے پہلے کی سب رقوم کے مجموعہ کے ساتھ

$$\frac{ا_ن لا^ن}{ا_{ن-1} لا^{ن-1} + ا_{ن-2} لا^{ن-2} + \ldots} = \frac{ا_ن}{ا_{ن-1} ما + ا_{ن-2} ما^2 + \ldots\ldots}$$ ہے

جہاں $ما = \frac{1}{لا}$
جب لا، لا انتہا بڑا ہو تو ما، لا انتہا چھوٹا ہوگا، پس مثال ماقبل کی مانند
ہم کسر بالا کو اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔
۲۷۔ مسئلہ ماقبل کی ایک خاص صورت جو ذیل میں دی گئی ہے بہت
مفید اور کار آمد ہے۔

جملہ $ا_ن لا^ن + ا_{ن-1} لا^{ن-1} + \ldots\ldots + ا_1 لا + ا_.$

رقوم کی ایک محدود تعداد پر مشتمل ہے اور اس میں لا کی قوتیں نزولی

ترتیب میں ہیں، اس میں لا کو کافی طور پر چھوٹا کرنے سے ہم آخری رقم دِ کو رقوم ماسبق کے حاصل جمع سے مقابلتہً اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں اور لا کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم ابتدائی رقم اِ لا^ن کو رقوم مابعد کے حاصل جمع سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔

مثال ۱۔ ن کو کافی بڑا لینے سے ہم $ن^۴ - ۵ ن^۳ - ۷ ن + ۹$ کی پہلی رقم کو باقی رقموں کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ ہم پورے جملہ کی بجائے صرف پہلی رقم یعنی $ن^۴$ لے سکتے ہیں بشرطیکہ ن کو کافی بڑا بنانے سے جملہ مذکور اور $ن^۴$ کے تفاوت کو حسب خواہش کم کر لیا جائے۔

مثال ۲۔ $\frac{۳ لا^۳ - ۲ لا^۲ - ۴}{۵ لا^۳ - ۴ لا + ۸}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ (۱) لا، لامتناہی ہو اور (۲) لا صفر ہو۔

(۱) شمار کنندہ اور نسب نما میں ہم پہلی رقم کے سوائے باقی سب رقوم کو نظر انداز کر سکتے ہیں اسلئے انتہا مطلوبہ $\frac{۳ لا^۳}{۵ لا^۳} = \frac{۳}{۵}$ ہے۔

(۲) جب لا، لا انتہا چھوٹا ہو تو انتہا مطلوبہ $\frac{-۴}{۸}$ یعنی $-\frac{۱}{۲}$ ہوگی۔

مثال ۳۔ $\sqrt[لا]{\frac{۱+لا}{۱-لا}}$ کی انتہا معلوم کرو جب لا صفر ہو۔

فرض کرو کہ رقم مذکور ض کے مساوی ہے، تب لوکارتم لینے سے

$$لوک\,ض = \frac{۱}{لا}\left\{لوک\,(۱+لا) - لوک\,(۱-لا)\right\}$$

$$= ۲\left(۱ + \frac{لا^۲}{۳} + \frac{لا^۴}{۵} + \cdots\right) \ldots\ldots (دفعہ ۲۲۶)$$

جس سے ظاہر ہے کہ لوک ض کی انتہا ۲ ہے، پس مطلوبہ انتہا کی قیمت $و^۲$ ہے۔

کسورِ منعدم

۲۷ - فرض کرو کہ کسر

$$\frac{\text{لا}^2 + \text{ا}\,\text{لا} - ۲\,\text{ا}^2}{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}$$

انتہا دریافت کرنا مطلوب ہے جبکہ لا = ا
ہم لا کو ا + ھ کے مساوی رکھیں تو جوں جوں لا کی قیمت ا
قریب آتی جائے گی ھ کی قیمت صفر کے قریب آتی جائے گی۔
کی بجائے ا + ھ مندرج کرنے سے

$$\frac{\text{لا}^2 + \text{ا}\,\text{لا} - ۲\,\text{ا}^2}{\text{لا}^2 - \text{ا}^2} = \frac{۳\,\text{ا}\,\text{ھ} + \text{ھ}^2}{۲\,\text{ا}\,\text{ھ} + \text{ھ}^2} = \frac{۳\,\text{ا} + \text{ھ}}{۲\,\text{ا} + \text{ھ}}$$

ب ھ لا انتہا چھوٹا ہو تو اس جملہ کی انتہا $\frac{۳}{۲}$ ہوگی۔
ا سوال کو ہم ایک اور نقطۂ نظر سے بھی دیکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{لا}^2 + \text{ا}\,\text{لا} - ۲\,\text{ا}^2}{\text{لا}^2 - \text{ا}^2} = \frac{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} + ۲\,\text{ا})}{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} + \text{ا})} = \frac{\text{لا} + ۲\,\text{ا}}{\text{لا} + \text{ا}}$$

وقت لا = ا رکھنے سے جملہ مذکورہ بالا کی قیمت حسب سابق $\frac{۳}{۲}$
تی ہے۔

ہم جملہ زیر بحث $\frac{\text{لا}^2 + \text{ا}\,\text{لا} - ۲\,\text{ا}^2}{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}$ میں اختصار سے قبل لا = ا
یں تو ہم دیکھینگے کہ کسر بالا $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کی شکل اختیار کرلیتی ہے جس کی
ت معین نہیں کی جاسکتی۔ نیز ہم دیکھتے ہیں اس کا یہ شکل اختیار
شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں جزو ضربی (لا - ا) کی
جودگی کی وجہ سے ہے۔
اب ہم جزو ضربی صفر پر تو تقسیم نہیں کرسکتے لیکن یہ ضرور ہے کہ

جب تک لا، ر کے عین مساوی نہیں ہوتا ہم جزو ضربی لا ۔ ر کو شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں سے نکال سکتے ہیں۔
اس کے بعد ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے لا کی قیمت ر کے قریب آتی جاتی ہے، کسر زیر بحث کی قیمت $\frac{۳}{۲}$ کے نزدیک ہوتی جاتی ہے یعنی دفعہ ۲۶۶ کی تعریف کے بموجب

اگر لا = ر تو $\frac{\text{لا}^۲ - \text{ر لا} - ۲\text{ر}^۲}{\text{لا}^۲ - \text{ر}^۲}$ کی انتہا $\frac{۳}{۲}$ ہے۔

۲۷۲ ۔ اگر ف (لا) اور فہ (لا)، لا کے دو تفاعل ہوں جن میں سے ہر ایک تفاعل لا کی کسی خاص قیمت ر کے لئے صفر ہو جائے تو کسر $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{فہ (لا)}}$ شکل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ اختیار کرتی ہے، اس قسم کی کسر کو کسر غیر معیّن یا کسر منعدم کہتے ہیں۔

مثال ۱ ۔ اگر لا = ۳ تو $\frac{\text{لا}^۳ - ۵\text{لا}^۲ + ۷\text{لا} - ۳}{\text{لا}^۳ - \text{لا}^۲ - ۵\text{لا} - ۳}$ کی انتہا دریافت کرو

جب لا = ۳ تو یہ کسر، $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کی غیر معیّن صورت اختیار کر لیتی ہے، لیکن شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں سے جزو ضربی (لا ۔ ۳) نکال دینے سے کسر بالا $\frac{\text{لا}^۲ - ۲\text{لا} + ۱}{\text{لا}^۲ + ۲\text{لا} + ۱}$ رہ جاتی ہے اور جب لا = ۳ تو یہ $\frac{۱}{۴}$ ہو جاتی ہے، پس $\frac{۱}{۴}$ مطلوبہ انتہا ہے۔

مثال ۲ ۔ کسر $\frac{\sqrt{۳\text{لا} - \text{ر}} - \sqrt{\text{لا} + \text{ر}}}{\text{لا} - \text{ر}}$ کی قیمت جبکہ لا = ر، $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہو جاتی ہے، اس کی انتہا معلوم کرنے کے لئے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو اصم $\sqrt{۳\text{لا} - \text{ر}} - \sqrt{\text{لا} + \text{ر}}$ کی مزدوج اصم سے ضرب دو

ب کسر مذکور

$$\frac{(\text{۳لا}-\text{۱})-(\text{لا}+\text{۱})}{(\text{لا}-\text{۱})\left(\sqrt{\text{۳لا}-\text{۱}}+\sqrt{\text{لا}+\text{۱}}\right)} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۳لا}-\text{۱}}+\sqrt{\text{لا}+\text{۱}}}$$

جائے گی۔ اس میں لا = ۱ رکھنے سے اس کی انتہا $\frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲}}}$

ی ہے۔

ال ۳ ــ کسر $\frac{\text{۱}-\sqrt[3]{\text{لا}}}{\text{۱}-\sqrt[5]{\text{لا}}}$ کی قیمت جب لا = ۱، صفر/صفر

جاتی ہے اس کی انتہا معلوم کرنے کے لئے لا = ۱ + ھ رکھو

مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلاؤ تب کسر مذکورہ

$$= \frac{\text{۱}-(\text{۱}+\text{ھ})^{\frac{1}{3}}}{\text{۱}-(\text{۱}+\text{ھ})^{\frac{1}{5}}} = \frac{\text{۱}-\left(\text{۱}+\frac{1}{3}\text{ھ}-\frac{1}{9}\text{ھ}^2+\ldots\right)}{\text{۱}-\left(\text{۱}+\frac{1}{5}\text{ھ}-\frac{2}{25}\text{ھ}^2+\ldots\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\text{ھ}-\ldots}{-\frac{1}{5}+\frac{2}{25}\text{ھ}-\ldots}$$

ب لا = ۱ تو ھ = ۰، اس لئے مطلوبہ انتہا $\frac{5}{3}$ ہے۔

۲۷ ــ بعض اوقات کسی مساوات کے سروں میں ایسا تعلق ہوتا
، جس کی وجہ سے اس مساوات کی اصلیں غیر معین صورت اختیار
ی ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ ا لا + ب = ج لا + د

تب (ا − ج) لا = د − ب

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{د}-\text{ب}}{\text{ا}-\text{ج}}$$

ب اگر ا = ج تو لا = $\frac{\text{د}-\text{ب}}{0}$ یا ∞ ،

پس ایک سادہ (خطی) مساوات کی اصل لامتناہی ہوتی ہے اگر لا کا سر لا انتہا چھوٹا ہو۔

۴۷۔ ہمزاد مساواتوں

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$$

$$\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ} = ۰$$

کا حل $\text{لا} = \frac{\text{ب جَ} - \text{بَ ج}}{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}}$ ، $\text{ما} = \frac{\text{ج اَ} - \text{جَ ا}}{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}}$ ہے

اگر $\text{ا بَ} - \text{اَ ب} = ۰$ تو لا اور ما دونوں لامتناہی ہو جاتے ہیں

اس صورت میں $\frac{\text{اَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{ب}}$ (جو فرض کرو کہ) = م

اَ اور بَ کی قیمتیں بالترتیب ا م اور ب م دوسری مساوات میں مندرج کرنے سے یہ مساوات $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \frac{\text{جَ}}{\text{م}} = ۰$ ہو جاتی ہے

اگر $\frac{\text{جَ}}{\text{م}}$ ، ج کے مساوی نہ ہو تو دو مساواتوں $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج} = ۰$ اور $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \frac{\text{جَ}}{\text{م}} = ۰$ کا اختلاف صرف رقم مطلق میں ہے، اور غیر مطابق ہونے کی وجہ سے یہ لا اور ما کی کسی محدود قیمت سے پوری نہیں ہو سکتیں۔

اگر $\frac{\text{جَ}}{\text{م}}$ ، ج کے مساوی ہو تو $\frac{\text{اَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{ج}}$ ، یعنی دونوں مساواتیں ایک دوسرے کے بالکل متماثل ہیں۔

اس صورت میں چونکہ $\text{ب جَ} - \text{بَ ج} = ۰$ اور $\text{ج اَ} - \text{جَ ا} = ۰$

اس لئے لا اور ما دونوں کی قیمتیں $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہو جاتی ہیں اور بنابریں ان ہمزاد مساواتوں کا حل غیر معیّن ہو جاتا ہے، درحقیقت اس

ورت میں ہمارے پاس صرف ایک ہی مساوات ہے جس میں
مجہول مقداریں شامل ہیں اور ایسی مساوات صریحاً مجہول مقادیر کی
تعداد قیمتوں سے پوری ہو سکتی ہے۔ [ملاحظہ ہو دفعہ ۱۲۸]
طالب علم اگر ہندسہ تحلیلی سے واقف ہے تو اس کو خطِ مستقیم
ہندسہ کے موافق ان نتائج کو ہندسی معنی پہنانے میں کوئی دقت
نہیں آئے گی۔

۲۷ ــ اب ہم چند ایسی خصوصیات پر بحث کرتے ہیں جو مساوات
درجہ دوم کے حل میں پیش آتی ہیں۔

فرض کرو کہ مساوات ا لا² + ب لا + ج = ۰ ہے

اگر ج = ۰ تو ا لا² + ب لا = ۰

اس سے لا = ۰ یا − ب/ا ، یعنی مساوات کی ایک اصل صفر
ہے اور دوسری − ب/ا

ب = ۰ تو اصلیں بلحاظ مقدار کے مساوی لیکن مختلف العلامت ہیں
[دفعہ ۱۱۸]

ا = ۰ تو مساوات ب لا + ج = ۰ ہو جاتی ہے اور بظاہر یہ
معلوم ہوتا ہے کہ اس صورت میں درجہ دوم کی مساوات کی صرف
ایک اصل رہ جاتی ہے، لیکن چونکہ درجہ دوم کی ہر مساوات کی
دو اصلیں ہونی چاہئیں اس لئے ہم دوسری اصل کی قیمت پر حسب
ذیل بحث کرتے ہیں۔

ابتدائی مساوات میں لا کی بجائے ۱/م لکھو اور کسروں کو صاف
کرو، تب

ج م² + ب م + ا = ۰

اب ا = ۰ رکھنے سے ج م² + ب م = ۰، اس کا حل ہے م = ۰، − ب/ج

یعنی $\text{لا} = \infty$ یا $-\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$

پس اگر درجہ دوم کی کسی مساوات میں لا^2 کا سر صفر ہوجائے تو مساوات کی ایک اصل لامتناہی ہوتی ہے۔

اعلیٰ ریاضی کی اکثر شاخوں میں یہ نتیجہ مندرجہ بالا الفاظ میں مرقوم کیا جاتا ہے لیکن مبتدی کو یاد رہے کہ درحقیقت یہ الفاظ ذیل کے تفصیلی الفاظ کا سہولت بخش اقتباس ہیں۔

مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج} = 0$ میں اگر ا بہت چھوٹا ہو تو مساوات کی ایک اصل بہت بڑی ہوتی ہے اور جب ا، لاانتہا کم ہوتا جاتا ہے تو یہ اصل لاانتہا بڑی ہوتی جاتی ہے، اس صورت میں محدود اصل اپنی انتہا $-\frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ کے نہایت قریب آتی جاتی ہے۔

اسی طرح اُن صورتوں پر بھی جن میں ایک سے زیادہ سر مفقود ہوں بحث کی جا سکتی ہے۔

امثلہ نمبری ۲۰

ذیل کے جملوں کی انتہائیں معلوم کرو جب (۱) $\text{لا} = \infty$، (۲) $\text{لا} = 0$۔

۱- $\frac{(2\text{لا} - 3)(3 - 5\text{لا})}{7\text{لا}^2 - 6\text{لا} + 4}$

۲- $\frac{(3\text{لا}^2 - 1)^2}{\text{لا}^4 + 9}$

۳- $\frac{(3 + 2\text{لا}^3)(\text{لا} - 5)}{(4\text{لا}^3 - 9)(1 + \text{لا})}$

۴- $\frac{(\text{لا} - 3)(2 - 5\text{لا})(3\text{لا} + 1)}{(2\text{لا} - 1)^3}$

۵- $\frac{1 - \text{لا}^2}{2\text{لا}^3 - 1} \div \frac{1 - \text{لا}}{2\text{لا}^2}$

۶- $\frac{(3 - \text{لا})(\text{لا} + 5)(2 - 7\text{لا})}{(7\text{لا} - 1)(\text{لا} + 1)^3}$

ذیل کے جملات کی انتہائیں معلوم کرو۔

۷- $\frac{\text{لا}^3 + 1}{\text{لا}^2 - 1}$ جبکہ $\text{لا} = -1$

۸۔ $\frac{\text{ا}^{\text{لا}} - \text{ب}^{\text{لا}}}{\text{لا}}$ جبکہ لا = ۰

۹۔ $\frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{لوک}\,(۱ + \text{لا})}$ جبکہ لا = ۰

۱۰۔ $\frac{\text{و}^{۳\text{لا}} - \text{و}^{۳\text{ا}}}{\text{لا} - \text{ا}}$ جبکہ لا = ا

۱۱۔ $\frac{\sqrt{\text{لا}} - \sqrt{۲\text{ا}} + \sqrt{\text{لا} - ۲\text{ا}}}{\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۴\text{ا}^{۲}}}$ جب لا = ۲ا

۱۲۔ $\frac{\text{لوک}\,(۱ + \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۴})}{۳\,\text{لا}^{۲}(۱ - ۲\text{لا})}$ جب لا = ۰

۱۳۔ $\frac{۱ - \text{لا} + \text{لوک}\,\text{لا}}{۱ - \sqrt{۲\text{لا} - \text{لا}^{۲}}}$ جب لا = ۱

۱۴۔ $\frac{(\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}} + (\text{ا} - \text{لا})^{\frac{۳}{۲}}}{(\text{ا}^{۳} - \text{لا}^{۳})^{\frac{۱}{۲}} + (\text{ا} - \text{لا})^{\frac{۱}{۲}}}$ جب لا = ا

۱۵۔ $\frac{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ا}\,\text{لا} + \text{لا}^{۲}} - \sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{ا}\,\text{لا} + \text{لا}^{۲}}}{\sqrt{\text{ا} + \text{لا}} - \sqrt{\text{ا} - \text{لا}}}$ جب لا = ۰

۱۶۔ $\left\{\left(\frac{\text{ن} + ۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} - \left(\frac{\text{ن} + ۱}{\text{ن}}\right)^{-\text{ن}}\right\}$ جب ن = ∞

۱۷۔ ن لوک $\frac{\text{و}}{\left(۱ + \frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن} - ۱}}$ جب ن = ∞

۱۸۔ $\sqrt[\text{لا}]{\frac{\text{ا} + \text{لا}}{\text{ا} - \text{لا}}}$ جب لا = ۰

اکیسواں باب

سلسلوں کا استدقاق اور اتساع

۲۷۶ - ایسے جملہ کو جس کی مسلسل رقوم کسی خاص قانون کے موافق بنائی جائیں **سلسلہ** کہتے ہیں، وہ سلسلہ جس میں رقوم کی محدود تعداد شامل ہو **متناہی سلسلہ** کہلاتا ہے اور جس میں رقوم کی تعداد غیر محدود ہو اسے **لا متناہی سلسلہ** کہتے ہیں۔
اس باب میں ہم کسی سلسلہ کو ذیل کی شکل کے جملہ سے تعبیر کرینگے۔

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \cdots\cdots + ع_ن + \cdots\cdots$$

۲۷۷ - فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک سلسلہ ہے جس میں ن رقوم شامل ہیں، اس سلسلہ کا حاصل جمع ن کا ایک تفاعل ہوگا۔ اگر ن لاانتہا بڑھ جائے تو سلسلہ کا حاصل جمع انتہائی صورت میں یا تو کسی محدود انتہا کی طرف مائل ہوگا یا لاانتہا بڑھ جائے گا۔
اگر کسی لامتناہی سلسلہ کی پہلی ن رقوم کا حاصل جمع تعداداً کبھی ایک خاص محدود مقدار سے تجاوز نہ کرے خواہ ن کو کتنا ہی کیوں نہ بڑھا دیا جائے تو ایسے سلسلہ کو **مستدق سلسلہ** کہتے ہیں۔
اگر کسی لامتناہی سلسلہ میں ن کو کافی طور پر بڑھانے سے اس کی پہلی ن رقوم کا حاصل جمع تعداداً ہر محدود مقدار سے بڑا بنایا جا سکے تو ایسے سلسلہ کو **متسع سلسلہ** کہتے ہیں۔

۲۰ – اگر ہم کسی سلسلہ کی پہلی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم
یں تو یہ دیکھنے سے کہ ن کو لا انتہا بڑا بنانے پر حاصل جمع مذکور
ود رہتا ہے یا غیر محدود ہو جاتا ہے ہم فوراً معلوم کر سکتے ہیں کہ
لہ زیر بحث مستدق ہے یا متسع۔ مثلاً سلسلہ $۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + ...$
پہلی ن رقموں کا حاصل جمع $\frac{۱ - لا^ن}{۱ - لا}$ ہے۔
جب لا تعداداً ایک سے کم ہو تو حاصل جمع ایک محدود
تہا $\frac{۱}{۱ - لا}$ کے بتدریج قریب آتا جاتا ہے، اس لئے اس صورت
سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔
لا تعداداً ایک سے بڑا ہو تو ن کو کافی طور پر بڑا لینے سے پہلی ن
وں کے حاصل جمع یعنی $\frac{لا^ن - ۱}{لا - ۱}$ کی قیمت کو ہر محدود مقدار
بڑا بنایا جا سکتا ہے۔ اس لئے اس صورت میں سلسلۂ بالا متسع
تا ہے۔
لا = ۱ تو پہلی ن رقموں کا مجموعہ ن ہوگا، اس لئے سلسلہ
سع ہوگا۔
لا = -۱ تو سلسلہ بالا

$$۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ ....$$

جاتا ہے۔ اس میں پہلی جفت رقوم کا مجموعہ صفر ہے اور پہلی
اق رقوم کا مجموعہ ایک ہے۔
ی حاصل جمع صفر اور ایک کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ لہذا
سلسلہ ان سلسلوں کے قبیل میں سے ہے جن کو اہتزازی
لسلے یا دوری مستدق سلسلے کہتے ہیں۔
۲۷ – ایسی صورتیں اکثر پیش آتی ہیں جن میں ہم پہلی ن رقوم کا

حاصل جمع معلوم نہیں کر سکتے، اس لئے ذیل میں ہم ان قواعد پر بحث کریں گے جن کے ذریعہ جمع کا عمل کئے بغیر یہ معلوم ہو سکے کہ کوئی دیا ہوا سلسلہ مستدق ہے یا متسع۔

۲۸۰ - اگر کسی سلسلہ کی متبادل رقوم مثبت اور منفی ہوں اور ہر رقم اپنی رقم ماقبل سے تعداداً کم ہو تو سلسلہ مستدق ہو گا
سلسلہ کو

$ع_۱ - ع_۲ + ع_۳ - ع_۴ + ع_۵ - ع_۶ + \ldots$ سے تعبیر کرو

جہاں $ع_۱ > ع_۲ > ع_۳ > ع_۴ \ldots\ldots$

اس سلسلہ کو ذیل کی ہر دو اشکال میں لکھا جا سکتا ہے

$(ع_۱ - ع_۲) + (ع_۳ - ع_۴) + (ع_۵ - ع_۶) + \ldots\ldots$ (۱)

$ع_۱ - (ع_۲ - ع_۳) - (ع_۴ - ع_۵) - \ldots\ldots$ (۲)

پہلی شکل سے یہ واضح ہوتا ہے کہ سلسلہ کا حاصل جمع ایک مثبت مقدار کے مساوی ہے اور دوسری شکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ رقوم کی کسی تعداد کا مجموعہ $ع_۱$ سے کم ہے۔ لہذا سلسلہ مستدق

۲۸۱ - مثلاً سلسلہ

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \ldots$$

مستدق ہے، دفعہ ۲۴۳ میں لا = ۱ رکھنے سے ظاہر ہے اس سلسلہ کا حاصل جمع لوک و ۲ ہے۔

نیز سلسلہ

$$\frac{۲}{۱} - \frac{۳}{۲} + \frac{۴}{۳} - \frac{۵}{۴} + \frac{۶}{۵} - \frac{۷}{۶}$$

...ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل سے تعداداً کم ہے، اس لئے یہ
...سلسلہ مستدق ہے۔ یہ سلسلہ ذیل کے دو سلسلوں کا مجموعہ ہے

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \cdots\cdots (۱)$$

$$۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \cdots\cdots\cdots (۲)$$

...ب (۱) تو لوک$_{و}$ ۲ کے مساوی ہے اور (۲) تعدادِ رقوم کے
...ت ہونے کی صورت میں صفر کے اور طاق ہونے کی صورت
...یں ۱ کے مساوی ہے۔ پس سلسلہ ہذا مستدق ہے اور اسکا
...حاصل جمع تعدادِ رقوم کے جفت ہونے کی صورت میں لوک$_{و}$ ۲
... اور طاق ہونے کی صورت میں ۱ + لوک$_{و}$ ۲ کی طرف استدقاق
...تا ہے۔

۲۸... - اگر ایک لاانتناہی سلسلہ کی سب رقوم کی علامت ایک
...ہو اور ہر ایک رقم کسی محدود مقدار سے جو خواہ کتنی ہی چھوٹی
...و بڑی ہو تو سلسلہ متسع ہوتا ہے۔
...یونکہ اگر ہر ایک رقم کسی محدود مقدار ا سے بڑی ہو تو پہلی ن
...قوم کا حاصل جمع ن ا سے بڑا ہوگا اور ظاہر ہے کہ ن کو کافی
...در پر بڑا لینے سے ن ا کو ہمیشہ کسی خاص محدود مقدار سے بڑا
...ایا جا سکتا ہے۔

۲۸۱ - استدقاق اور اتساع کی جانچ کے متعلق مزید تحقیقات
...نے سے قبل ذیل میں ہم چند ایسے اصول درج کر دینا چاہتے ہیں
...ن کو کم و بیش حد تک علوم متعارفہ تصور کیا جا سکتا ہے۔
(۱) اگر کوئی سلسلہ مستدق ہو تو یہ مستدق رہے گا اور اگر
... ہو تو متسع رہے گا جب اس میں اس کی رقوم کی ایک
...تعداد جمع کر دی جائے یا نکال دی جائے، کیونکہ ان جمع کردہ

یا تفریق کردہ رقموں کا حاصل جمع ہمیشہ ایک محدود مقدار کے مساوی ہوتا ہے۔

(۲) اگر ایک ایسا سلسلہ جس کی سب رقوم مثبت ہوں مستدق ہو تو یہ سلسلہ اُس صورت میں بھی مستدق رہے گا جبکہ اس کی کل رقوم کو یا چند رقوم کو منفی بنا دیا جائے کیونکہ کسی سلسلہ کا حاصل جمع اُس صورت میں صریحاً بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ اس سلسلہ کی سب رقوم کی علامت ایک ہی ہو۔

آیندہ ہم مان لیں گے کہ سب رقوم مثبت ہیں جب تک اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا گیا ہو۔

۲۸۴۔ اگر کسی لامتناہی سلسلہ میں ایک مقررہ رقم سے شروع ہوکر اس کے بعد کی رقوم میں ہر رقم کی نسبت اپنی رقم ماقبل کے ساتھ ایک ایسی مقدار سے تعداداً کم رہے جو خود ایک سے تعداداً کم ہے تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی سلسلہ میں ایک خاص رقم اور اس رقم کے بعد حسب ذیل ہے۔

$$\text{ع}_{۱} + \text{ع}_{۲} + \text{ع}_{۳} + \text{ع}_{۴} + \cdots\cdots$$

اور $\frac{\text{ع}_{۲}}{\text{ع}_{۱}} < \text{ر}'$ ، $\frac{\text{ع}_{۳}}{\text{ع}_{۲}} < \text{ر}'$ ، $\frac{\text{ع}_{۴}}{\text{ع}_{۳}} < \text{ر}'$ ۔

جہاں $\text{ر} < ۱$

تب $\text{ع}_{۱} + \text{ع}_{۲} + \text{ع}_{۳} + \text{ع}_{۴} + \cdots\cdots$

$$= \text{ع}_{۱}\left(۱ + \frac{\text{ع}_{۲}}{\text{ع}_{۱}} + \frac{\text{ع}_{۳}}{\text{ع}_{۲}} \times \frac{\text{ع}_{۲}}{\text{ع}_{۱}} + \frac{\text{ع}_{۴}}{\text{ع}_{۳}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ع}} \cdots\right)$$

$$< \text{ع}_{۱}\left(۱ + \text{ر} + \text{ر}^{۲} + \text{ر}^{۳} + \cdots\cdots\right)$$

یعنی $\frac{ع}{1-ر} >$ چونکہ $ر < 1$

پس سلسلۂ ہذا مستدق ہے۔

۲۷۔ دفعہ ماقبل کے دعوے میں طالب علم کو چاہئے کہ الفاظ "ایک مقررہ رقم سے شروع ہو کر اس کے بعد کی رقوم ہیں" کی ضرورت اچھی طرح سے سمجھ کر ذہن نشین کرلے۔

ذیل کے سلسلہ پر غور کرو

$1 + 2لا + 3لا^2 + 4لا^3 + \ldots\ldots + ن لا^{ن-1} + \ldots\ldots$

یہاں $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}} = \frac{ن لا}{ن-1} = (1 + \frac{1}{ن-1})\ لا$

ن کو کافی طور پر بڑا بنانے سے ہم اس نسبت کی قیمت کو لا کے اتنا قریب لا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں اور بالآخر ہر رقم کی نسبت رقم ماقبل کے ساتھ لا بنا سکتے ہیں، پس سلسلہ بالا مستدق ہوگا اگر $لا < 1$

لیکن نسبت $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}}$ ایک سے کم نہیں ہوگی جب تک کہ

$\frac{ن لا}{ن-1}$ کم نہ ہو ایک سے یعنی ن بڑا نہ ہو $\frac{1}{1-لا}$ سے

اس سے ظاہر ہے کہ مستدق سلسلہ ایسا ہو سکتا ہے کہ اس کی رقوم ایک خاص تعداد تک بڑھتی رہیں اور اس کے بعد گھٹنا شروع ہوں، مثلاً سلسلہ بالا میں اگر $لا = \frac{99}{100}$ تو $\frac{1}{1-لا} = 100$، اسلئے رقوم ۱۰۰ ویں رقم سے پہلے گھٹنا شروع نہیں ہوتیں۔

۲۸۔ اگر کسی لامتناہی سلسلہ میں سب رقوم کی علامتیں ایک ہی ہوں

اور ایک مقررہ رقم سے آگے اس کے بعد کی رقوم میں ہر رقم کی نسبت رقم ماقبل کے ساتھ ایک کے مساوی ہو یا ایک سے زیادہ ہو تو سلسلہ متسع ہوگا۔

فرض کرو کہ مقررہ رقم $ع_ا$ ہے، اگر نسبت مذکورہ ایک کے مساوی ہو تو رقوم مابعد میں سے ہر ایک رقم $ع_ا$ کے برابر ہوگی اور ن رقوم کا مجموعہ ن $ع_ا$ ہوگا، پس سلسلہ متسع ہوگا۔

اگر یہ نسبت ایک سے زیادہ ہو تو رقم مقررہ کے بعد ہر ایک رقم $ع_ا$ سے بڑی ہوگی اور ن رقوم کا مجموعہ ن $ع_ا$ سے بڑا ہوگا یعنی سلسلہ متسع ہوگا

۲۸۷۔ آزمائش کے اس طریقہ کو عملی طور پر استعمال کرتے وقت یہ معلوم کرنے کی زحمت سے بچنے کے لئے کہ کونسی رقم کے بعد ہر رقم اپنی رقم ماقبل سے کم یا زیادہ ہونا شروع ہوتی ہے یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ نسبت $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}}$ کی نہایت، یا انتہا معلوم کر لی جائے جبکہ ن لاانتہا بڑا ہو

فرض کرو کہ یہ انتہا لہ ہے

اگر لہ $<$ ۱ تو سلسلہ مستدق ہوگا (دفعہ ۲۸۴)

اگر لہ $>$ ۱ تو سلسلہ متسع ہوگا (دفعہ ۲۸۶)

اگر لہ = ۱ تو سلسلہ مستدق ہوگا یا متسع، اور استدقاق و اتساع کی تحقیق کے لئے مزید آزمائش کی ضرورت ہوگی کیونکہ یہ ممکن ہے کہ کسر $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}}$ ایک سے کم ہو اور ن کے لا انتہا بڑھ جانے سے انتہائی صورت میں یہ ایک ہوگئی ہو اس صورت میں ہم کوئی محدود مقدار لہ نہیں بتا سکتے جو ایک سے کم ہو مگر لہ سے زیادہ ہو۔ پس اس صورت میں دفعہ ۲۸۴ کی جانچ کام نہیں دیتی لیکن اگر $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}}$ $>$ ۱ اور ن کے لاانتہا بڑھ جانے سے

ہائی صورت میں یہ ایک کے قریب آگئی ہو تو دفعہ ۲۸۶ کی رُو سے
لسلہ متسع ہوگا۔

ہم الفاظ " $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}}$ کی انتہا جب ن لامتناہی ہو" کی بجائے
ختصاراً علامت نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}}$ استعمال کریں گے۔

مثال ۱۔ ایک سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{(ن+1)لا^ن}{ن^2}$ ہے، بتاؤ کہ
لسلہ مستدق ہے یا متسع۔

یہاں $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}} = \frac{(ن+1)لا^ن}{ن^2} \div \frac{ن\,لا^{ن-1}}{(ن-1)^2} = \frac{(ن+1)(ن-1)^2}{ن^3}$ لا

$\therefore$ نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}} =$ لا

پس اگر لا < ۱ تو سلسلہ مستدق ہوگا
اور اگر لا > ۱ تو سلسلہ متسع ہوگا

لیکن اگر لا = ۱ تو نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}} = 1$، اور مزید آزمائش کی ضرورت
ہوگی۔

مثال ۲۔ بتاؤ کہ ذیل کا سلسلہ مستدق ہے یا متسع

$1^2 + 2^2$ لا $+ 3^2$ لا$^2 + 4^2$ لا$^3 + \ldots\ldots\ldots$

یہاں نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}} =$ نہا $\frac{ن^2\,لا^{ن-1}}{(ن-1)^2\,لا^{ن-2}} =$ لا

پس اگر لا < ۱ تو سلسلہ مستدق ہوگا
اگر لا > ۱ " " متسع ہوگا

اگر لا = ۱ تو سلسلہ بالا

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + \ldots\ldots$$

ہو جاتا ہے جو صریحاً ممتنع ہے

مثال ۳۔ سلسلہ

$$ا + (ا + د)\,ر + (ا + ۲د)\,ر^۲ + (ا + ۳د)\,ر^۳ + \ldots + \{ا + (ن - ۱)\,د\}\,ر^{ن-۱} + \ldots$$

میں نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}}$ = نہا $\frac{ا + (ن - ۱)\,د}{ا + (ن - ۲)\,د}\,ر = ر$

پس اگر ر < ۱ تو سلسلہ بالا مستدق ہوگا اور اس کا حاصل جمع محدود ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۶۰، نتیجہ صریح]

۲۸۸۔ اگر دو لامتناہی سلسلوں میں سے ہر ایک کی سب رقوم مثبت ہوں اور ان سلسلوں کی متناظر رقوم کی نسبت ہمیشہ محدود رہے تو یہ سلسلے یا دونوں مستدق ہوں گے یا دونوں ممتنع۔

فرض کرو کہ یہ لامتناہی سلسلے

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ع_۴ + \ldots\ldots$$

اور

$$و_۱ + و_۲ + و_۳ + و_۴ + \ldots\ldots$$

ہیں تب کسر

$$\frac{ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ع_۴ + \ldots + ع_ن}{و_۱ + و_۲ + و_۳ + و_۴ + \ldots + و_ن}$$

کی قیمت کسور

$$\frac{ع_۱}{و_۱}،\ \frac{ع_۲}{و_۲}،\ \frac{ع_۳}{و_۳}،\ \ldots\ldots،\ \frac{ع_ن}{و_ن}$$

میں سے بڑی سے بڑی کسر اور چھوٹی سے چھوٹی کسر کی قیمتوں کے درمیان واقع ہوگی۔ [دیکھو دفعہ ۱۴]

ور بنابریں ایک محدود مقدار کے مساوی ہوگی، فرض کروکہ یہ محدود
قدار ل ہے

ش $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \cdots + ع_ن = ل(و_۱ + و_۲ + و_۳ + \cdots + و_ن)$

ہذا اگر ایک سلسلہ کی قیمت محدود ہو تو دوسرے سلسلہ کی قیمت بھی
محدود ہوگی، اور اگر ایک سلسلہ کی قیمت غیر محدود ہو تو دوسرے
سلسلہ کی قیمت بھی غیر محدود ہوگی۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۸ـ مندرجہ بالا اصول نہایت مفید اور کارآمد ہے کیونکہ اسکی
مدد سے ایک سلسلہ کا مقابلہ کسی اور ایسے سلسلہ سے کر سکتے ہیں
جس کا مستدق یا متسع ہونا پہلے تحقیق ہو چکا ہے۔ دفعہ مابعد میں
جس سلسلہ پر بحث کی گئی ہے اس کو بطور معاون سلسلہ کے لینا
اکثر اوقات بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۹ـ لامتناہی سلسلہ

$$\frac{1}{۱^ق} + \frac{1}{۲^ق} + \frac{1}{۳^ق} + \frac{1}{۴^ق} + \cdots$$

ہمیشہ متسع ہوتا ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ق مثبت ہو اور
ایک سے بڑا ہو۔

صورت اول ـ فرض کروکہ ق > ۱

پہلی رقم ۱ ہے، بعد کی دو رقمیں ملکر $\frac{۲}{۲^ق}$ سے کم ہیں، ان کے
بعد کی چار رقمیں ملکر $\frac{۴}{۴^ق}$ سے کم ہیں، ان کے بعد کی آٹھ رقمیں
ملکر $\frac{۸}{۸^ق}$ سے کم ہیں، علیٰ ہذا القیاس پس کل سلسلہ

$$۱ + \frac{۲}{۲^ق} + \frac{۴}{۴^ق} + \frac{۸}{۸^ق} + \cdots\cdots$$ کے حاصل جمع سے

کم ہے، لیکن موخرالذکر سلسلہ ہندسی سلسلہ ہے جس میں مشترک نسبت $\frac{۲}{۲^{ق}}$ ہے جو ایک سے کم ہے کیونکہ ق > ۱، اس لئے یہ سلسلہ مستدق ہے اور بنابریں سلسلہ زیر بحث بھی مستدق ہے۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ق = ۱

تب سلسلہ زیر بحث، $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \dots$ ہو جاتا ہے

ظاہر ہے کہ تیسری اور چوتھی رقمیں ملکر بڑی ہیں $\frac{۲}{۴}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ سے، بعد کی چار رقمیں بڑی ہیں $\frac{۴}{۸}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ سے، ان کے بعد کی آٹھ رقمیں بڑی ہیں $\frac{۸}{۱۶}$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ سے اور علیٰ ہذا القیاس، پس سلسلہ زیر بحث بڑا ہے

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots\dots$$

سے اور اس لئے متسع ہے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ (دیکھو دفعہ ۲۸۶)

صورت سوم۔ فرض کرو کہ ق < ۱ یا منفی ہے۔

اس صورت میں سلسلہ زیر بحث کی ہر ایک رقم صورتِ دوم کے سلسلہ کی متناظر رقم سے بڑی ہے، لہٰذا اس صورت میں سلسلہ متسع ہے۔

پس سلسلہ زیر بحث ہمیشہ متسع ہوتا ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ ق مثبت ہو اور ایک سے زیادہ ہو۔

مثال۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{۲}{۱} + \frac{۳}{۴} + \frac{۴}{۹} + \dots\dots + \frac{ن+۱}{ن^{۲}} + \dots\dots$$

متسع ہے ۔

اس سلسلہ کا مقابلہ سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots\dots + \frac{۱}{ن} + \dots\dots$ سے کرو

اگر سلسلہ زیر بحث اور معاون سلسلہ کی ن ویں رقوم بالترتیب $\text{ع}_{\text{ن}}$ اور $\text{و}_{\text{ن}}$ ہوں تو $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{و}_{\text{ن}}} = \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}^2} \div \frac{1}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}$

پس نہا $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{و}_{\text{ن}}} = 1$ لہذا یہ سلسلے یا دونوں متسع ہیں یا دونوں مستدق ہیں، لیکن چونکہ معاون سلسلہ متسع ہے اس لئے سلسلہ زیر تحقیق بھی متسع ہے۔

اس سے دفعہ ۲۸۷ کی مثال ا کا حل مکمل ہو جاتا ہے۔

۲۹۱۔ دفعہ ۲۸۸ کے قاعدہ سے استفادہ کرنے کے لئے ضروری ہے کہ $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{و}_{\text{ن}}}$ کی انتہا محدود ہو اور یہ انتہا محدود ہوگی اگر ہم معاون سلسلہ ذیل کے طریقہ سے معلوم کریں۔

دئے ہوئے سلسلہ کی ن ویں رقم $\text{ع}_{\text{ن}}$ لو اور ن کی صرف سب سے بڑی قوتوں کو باقی رکھو۔ جو رقم اس طرح سے حاصل ہو اس کو $\text{و}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کرو، تب دفعہ ۲۷۰ کی رُو سے $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{و}_{\text{ن}}}$ کی انتہا محدود ہوگی، بعد ازاں $\text{و}_{\text{ن}}$ کو معاون سلسلہ کی ن ویں رقم کے طور پر لیا جا سکتا ہے۔

مثال ا۔ ثابت کرو کہ جس سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{\sqrt[3]{2\text{ن}^2-1}}{\sqrt[4]{3\text{ن}^3+2\text{ن}+5}}$ ہے وہ متسع ہے۔

جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے $\text{ع}_{\text{ن}}$ کی قیمت

$$\frac{\sqrt[3]{2\text{ن}^2}}{\sqrt[4]{3\text{ن}^3}} \quad \text{یا} \quad \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}} \times \frac{1}{\text{ن}^{\frac{1}{12}}}$$

کے قریب آتی جاتی ہے، پس اگر $و_ن = \frac{1}{ن^{۲}}$ تو نہا $\frac{ع_ن}{و_ن} = \frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۳}}$

جو ایک محدود مقدار ہے، ہم اُس سلسلہ کو جس کی ن ویں رقم

$\frac{1}{ن^{۲}}$ ہے معاون سلسلہ کے طور پر لے سکتے ہیں، لیکن چونکہ

یہ معاون سلسلہ دفعہ ۲۹۰ کی رُو سے متبع ہے اس لئے سلسلہ زیر

بحث بھی متبع ہے۔

مثال ۲۔ معلوم کرو کہ وہ سلسلہ جس میں $ع_ن = \sqrt[۳]{ن^{۳}+۱} - ن$

مستدق ہے یا متبع۔

یہاں $ع_ن = ن \left\{ \sqrt[۳]{۱ + \frac{1}{ن^{۳}}} - ۱ \right\}$

$$= ن \left(۱ + \frac{1}{۳ن^{۳}} - \frac{1}{۹ن^{۶}} + \cdots - ۱ \right)$$

$$= \frac{1}{۳ن^{۲}} - \frac{1}{۹ن^{۵}} + \cdots\cdots$$

اگر ہم $و_ن = \frac{1}{ن^{۲}}$ لیں تو

$$\frac{ع_ن}{و_ن} = \frac{1}{۳} - \frac{1}{۹ن^{۳}} + \cdots\cdots$$

$$\therefore \text{نہا} \frac{ع_ن}{و_ن} = \frac{1}{۳}$$

لیکن معاون سلسلہ

$$\frac{1}{۱^{۲}} + \frac{1}{۲^{۲}} + \frac{1}{۳^{۲}} + \cdots\cdots + \frac{1}{ن^{۲}} + \cdots\cdots$$

ستدق ہے، اس لئے سلسلہ زیر بحث بھی مستدق ہے۔
۲۹- اگر (۱ + لا)^ن کو مسلہ ثنائی سے پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ
پھیلاؤ مستدق ہوتا ہے جبکہ لا > ۱
فرض کرو کہ تفصیل کی ر ویں اور (ر + ۱) ویں رقمیں بالترتیب

عر اور عر+۱ ہیں، تب

$$\frac{ع_{ر+۱}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + ۱}{ر} \text{لا}$$

ب ر > ن + ۱ تو یہ نسبت منفی ہوتی ہے، یعنی اگر لا مثبت
، تو اس مقام سے رقوم سلسلہ متبادلاً مثبت اور منفی ہوتی ہیں اور
، لا منفی ہو تو اس مقام کے بعد سلسلہ کی سب رقموں کی علامت
ہی رہتی ہے۔
ب اگر ر، لامتناہی ہو تو نہا $\frac{ع_{ر+۱}}{ع_{ر}}$ = لا (تعداداً) اس لئے
ر سب رقوم کی علامت وہی ہو تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے جب
! > ۱، اور بنا بریں دفعہ ۲۸۳ کی رو سے یہ اس صورت میں
ی مستدق ہوتا ہے جبکہ چند رقوم مثبت ہوں اور چند منفی۔
۲۹۱- ثابت کرو کہ صعودی قوتوں میں ا^لا کی تفصیل لا کی سب
توں کے لئے مستدق ہوتی ہے۔
ہاں $ع_{ن} = \frac{\text{لا لوک}^{ر} ر}{ن - ۱}$، اس لئے نہا $\frac{ع_{ن}}{ع_{ن-۱}} > ۱$
واہ لا کی قیمت کچھ ہی ہو۔ لہذا سلسلہ مستدق ہے۔
۲۹۱- ثابت کرو کہ لا کی صعودی قوتوں میں لوک (۱ + لا) کی تفصیل
ستدق ہوتی ہے جبکہ لا تعداداً ایک سے کم ہو۔
ہاں $\frac{ع_{ن}}{ع_{ن-۱}}$ کی عددی قیمت = $\frac{ن - ۱}{ن}$ لا جبکی انتہا لا ہے،

پس سلسلہ مستدق ہوگا جب لا ایک سے کم ہو۔

اگر لا = ۱ تو سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots$ ہو جاتا ہے

جو دفعہ ۲۸۴ کی رُو سے مستدق ہے۔

اگر لا = -۱ تو سلسلہ $-۱ - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} - \dots$ ہو جاتا ہے

جو دفعہ ۲۹۰ کی رُو سے منتشر ہے۔

اِس سے ظاہر ہے کہ صفر کا لوکارثم لامتناہی اور منفی ہوتا ہے اور

یہ امر مساوات $و^{-\infty} = ۰$ پر غور کرنے سے بھی ظاہر ہے۔

۲۹۵۔ ذیل کی دو مثالوں کے جواب نہایت ضروری ہیں، باب ہذا میں اِن کی ضرورت پیش آئے گی۔

مثال ۱۔ $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا، لامتناہی ہو۔

لا = $و^{ما}$ رکھو، تب

$$\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} = \frac{ما}{و^{ما}} = \frac{ما}{۱ + ما + \frac{ما^۲}{\lfloor ۲} + \frac{ما^۳}{\lfloor ۳} + \dots}$$

$$= \frac{۱}{\frac{۱}{ما} + ۱ + \frac{ما}{\lfloor ۲} + \frac{ما^۲}{\lfloor ۳} + \dots}$$

نیز جب لا، لامتناہی ہو تو ما بھی لامتناہی ہوتا ہے اس لئے کسر بالا کی قیمت صفر ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ جب ن لامتناہی ہو تو ن $لا^{ن}$ کی انتہا صفر ہوگی ہے جبکہ لا < ۱

فرض کرو کہ لا = $\frac{۱}{ما}$ یعنی ما > ۱ نیز فرض کرو کہ $ما^{ن}$ = ی

ن لوک ما = لوک ی، تب

$$ن\,لا^{ن} = \frac{ن}{ما^{ن}} = \frac{۱}{ی} = \frac{لوک\,ی}{لوک\,ما} = \frac{۱}{لوک\,ما} \times \frac{لوک\,ی}{ی}$$

ب ظاہر ہے کہ جب ن لا متناہی ہو تو ی بھی لا متناہی ہوگا

ر $\frac{لوک\,ی}{ی} = ۰$، نیز لوک ما محدود ہے اس لئے نہایا ن $لا^{ن} = ۰$

۲۹ — بعض اوقات یہ معلوم کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے کہ
یا ئے ضربی کی کسی لا متناہی تعداد کا حاصل ضرب محدود ہے یا
محدود۔
فرض کرو کہ حاصل ضرب ذیل کے ن اجزائے ضربی پر مشتمل ہے۔

$ع_۱ ع_۲ ع_۳ \ldots ع_ن$

ر ن کے لا انتہا بڑھ جانے سے $ع_ن < $ ؛ تو حاصل ضرب صفر ہوگا
ر اگر $ع_ن > ۱$ تو حاصل ضرب غیر محدود ہوگا، لہٰذا اگر حاصل ضرب
محدود رہے تو ضرور ہے کہ $ع_ن$ کی انتہا ایک ہو۔
$ع_ن$ کی بجائے $۱ + و_ن$ رکھنے سے مذکورہ بالا حاصل ضرب

$(۱+و_۱)(۱+و_۲)(۱+و_۳) \ldots (۱+و_ن)$ ہو جاتا ہے

ں حاصل ضرب کو ض سے تعبیر کرو اور لوکارتم لو۔ تب

$$لوک\,ض = لوک\,(۱+و_۱) + لوک\,(۱+و_۲) + \ldots + لوک\,(۱+و_ن)$$

$\ldots\ldots (۱)$

ر یہ حاصل ضرب محدود ہو تو ضرور ہے کہ یہ سلسلہ مستدق ہو۔
ذیل کے سلسلہ کو معاون سلسلہ کے طور پر لو۔

$$و_۱ + و_۲ + و_۳ + \ldots + و_ن \ldots (۲)$$

اب $\text{نہا}\ \frac{\text{لوک}(1+\text{و}_\text{ن})}{\text{و}_\text{ن}} = \text{نہا}\left(\frac{\text{و}_\text{ن} - \frac{1}{2}\text{و}_\text{ن}^2 + \cdots}{\text{و}_\text{ن}}\right) = 1$

کیونکہ جب $\text{ع}_\text{ن}$ کی انتہا ایک ہو تو $\text{و}_\text{ن}$ کی انتہا صفر ہوتی ہے۔

پس اگر (۲) مستدق ہو تو (۱) بھی مستدق ہوگا اور حاصل ضرب محدود ہوگا۔

مثال۔ ثابت کرو کہ جب ن لا متناہی ہو تو ذیل کے حاصل ضرب کی انتہا محدود ہوتی ہے

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \cdots \times \frac{2\text{ن}-1}{2\text{ن}} \times \frac{2\text{ن}+1}{2\text{ن}}$$

یہ حاصل ضرب ۲ن اجزائے ضربی پر مشتمل ہے، اگر دو دو رقوم کے مسلسل زوجوں کو ع_1، ع_2، ع_3، ..... سے اور حاصل ضرب کو ض سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ض} = \text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3 \cdots\cdots \text{ع}_\text{ن}$$

جہاں $\text{ع}_\text{ن} = \frac{2\text{ن}-1}{2\text{ن}} \times \frac{2\text{ن}+1}{2\text{ن}} = 1 - \frac{1}{4\text{ن}^2}$

لیکن $\text{لوک ض} = \text{لوک ع}_1 + \text{لوک ع}_2 + \text{لوک ع}_3 + \cdots\cdots \text{لوک ع}_\text{ن}$ ......(۱)

اب ہمیں یہ دکھانا ہے کہ اس سلسلہ کی قیمت محدود ہے

$$\text{لوک ع}_\text{ن} = \text{لوک}\left(1 - \frac{1}{4\text{ن}^2}\right) = -\frac{1}{4\text{ن}^2} - \frac{1}{32\text{ن}^4} - \cdots\cdots$$

لہذا دفعہ ۲۹۱ مثال ۲ کے موافق یہ سلسلہ مستدق ہے اور مذکورہ حاصل ضرب محدود ہے۔

۲۹۷ — علم ریاضی کے مسائل کی تحقیقات میں لامتناہی سلسلے بہت کثرت سے واقع ہوتے ہیں، ان کے متعلق ہر موقع پر یہ معلوم کرلینا نہایت ضروری ہے کہ یہ سلسلے مستدق ہیں یا نہیں، اگر ہم کسی

سلسلہ کو استعمال کرنے سے قبل اس کے استدقاق کے متعلق مناسب توثیق نہ کرلیں گے تو ممکن ہے کہ ہمارے محصل نتائج نہایت مہمل اور لغو ہوں۔ (دیکھو دفعہ ۱۸۳)

مثلاً اگر ہم $(۱-لا)^{-۲}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو

$$(۱-لا)^{-۲} = ۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + ۴لا^۳ + \ldots\ldots$$

لیکن اگر ہم بائیں جانب کے سلسلہ کا حاصل جمع ن رقموں تک دفعہ۶ کے قاعدہ کے مطابق معلوم کریں تو

$$۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + ۴لا^۳ + \ldots + ن\,لا^{ن-۱} = \frac{۱-لا^ن}{(۱-لا)^۲} - \frac{ن\,لا^ن}{۱-لا}$$

اس سے $\frac{۱}{(۱-لا)^۲} = ۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + \ldots + ن\,لا^{ن-۱} + \frac{لا^ن}{(۱-لا)^۲} + \frac{ن\,لا^ن}{۱-لا}$

ن کو لاانتہا بڑا کر دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$\frac{۱}{(۱-لا)^۲}$ کو سلسلہ $۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + \ldots\ldots$ کا حقیقی معادل اسی

صورت میں کہہ سکتے ہیں جبکہ $\frac{لا^ن}{(۱-لا)^۲} + \frac{ن\,لا^ن}{۱-لا}$ معدوم ہو جائے

لیکن جب ن لاانتہا بڑا ہو جائے تو یہ مقدار لاانتہا بڑی ہو جاتی ہے

اگر $لا = ۱$ یا $لا > ۱$ اور لاانتہا چھوٹی ہو جاتی ہے اگر $لا < ۱$ (دیکھو دفعہ ۱۹۵)

پس ہم صرف اسی صورت میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{۱}{(۱-لا)^۲} = ۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + ۴لا^۳ + \ldots \text{ تا لاتناہی}$$

جبکہ $لا < ۱$

اگر مسئلہ ثنائی کے مطابق $\frac{۱}{(۱-لا)^۲}$ کی مندرجہ بالا تفصیل کو لا کی

ہر قیمت کے لئے درست مانا جائے اور اسکی تفصیل کو $\frac{1}{(1-\text{لا})^2}$ کے معادل کے طور پہ استعمال کیا جائے تو لازماً ہمارے نتائج غلط اور مہمل ہوں گے۔

بالفاظ دیگر ہم اس لا متناہی سلسلہ $1 + 2\text{لا} + 3\text{لا}^2 + 4\text{لا}^3 + \ldots\ldots$ کو غلطی کے احتمال کے بغیر اپنی سلکِ استدلال میں صرف اُسی صورت صورت میں لا سکتے ہیں جبکہ یہ سلسلہ مستدق ہو ورنہ نہیں۔

متسع سلاسل کی دقتوں کی وجہ سے ہمیں مجبوراً کسی سلسلہ اور اسکے جبریہ معادل میں تمیز کرنا پڑتا ہے، مثلاً لا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو ہم ہمیشہ ۱ کو $(1-\text{لا})^2$ پر تقسیم کرنے سے سلسلہ

$$1 + 2\text{لا} + 3\text{لا}^2 + \ldots\ldots\ldots$$

کی جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں اور اس طرح سے ایک معنے میں $\frac{1}{(1-\text{لا})^2}$ کو سلسلہ بالا کا جبریہ معادل کہا جا سکتا ہے، لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ فی الواقع یہ تعادل صرف اُسی صورت میں درست ہوتا ہے جبکہ سلسلہ بالا مستدق ہو۔ اس نقطہ نظر کو ملحوظ رکھکر اگر ہم $\frac{1}{(1-\text{لا})^2}$ سلسلہ بالا کا تفاعل تکوینی کہیں تو شاید زیادہ مناسب ہوگا کسی سلسلہ کے **تفاعل تکوینی** سے وہ تفاعل مراد ہے کہ اگر اُس تفاعل کو جبر و مقابلہ کے معمولی قواعد کے مطابق پھیلایا جائے تو سلسلۂ مذکور حاصل ہو۔

الفاظ "تکوینی تفاعل" کی تشریح مکمل طور پہ متوالی سلسلوں کے ضمن میں کی جائے گی۔

امثلہ نمبری ۲۱ (ا)

معلوم کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں یا متسع

$$(1)\quad \frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}+1} + \frac{1}{\text{لا}+2\text{ر}} - \frac{1}{\text{لا}+3\text{ر}} + \ldots\ldots\ldots$$

جہاں لا اور ا دونوں مثبت مقداریں ہیں۔

(۲) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots\cdots$

(۳) $\frac{1}{\text{لا}\,\text{ما}}-\frac{1}{(\text{لا}+1)(\text{ما}+1)}+\frac{1}{(\text{لا}+2)(\text{ما}+2)}-\frac{1}{(\text{لا}+3)(\text{ما}+3)}+\cdots$

جہاں لا اور ما دونوں مثبت مقداریں ہیں۔

(۴) $\frac{\text{لا}}{1\times 2}+\frac{\text{لا}^2}{2\times 3}+\frac{\text{لا}^3}{3\times 4}+\frac{\text{لا}^4}{4\times 5}+\cdots\cdots$

(۵) $\frac{\text{لا}}{1\times 2}+\frac{\text{لا}^2}{3\times 4}+\frac{\text{لا}^3}{5\times 6}+\frac{\text{لا}^4}{7\times 8}+\cdots\cdots$

(۶) $1+\frac{2^2}{\lfloor 2}+\frac{3^2}{\lfloor 3}+\frac{4^2}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$

(۷) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\cdots\cdots$

(۸) $1+3\,\text{لا}+5\,\text{لا}^2+7\,\text{لا}^3+9\,\text{لا}^4+\cdots\cdots$

(۹) $\frac{2}{\text{ن}_1}+\frac{3}{\text{ن}_2}+\frac{4}{\text{ن}_3}+\frac{5}{\text{ن}_4}+\cdots\cdots$

(۱۰) $1+\frac{\text{لا}}{2}+\frac{\text{لا}^2}{5}+\frac{\text{لا}^3}{10}+\cdots+\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}^2+1}+\cdots\cdots$

(۱۱) $\text{لا}+\frac{3}{5}\text{لا}^2+\frac{8}{10}\text{لا}^3+\frac{15}{17}\text{لا}^4+\cdots+\frac{\text{ن}^2-1}{\text{ن}^2+1}\text{لا}^{\text{ن}}+\cdots$

(۱۲) $1+\frac{2}{5}\text{لا}+\frac{6}{9}\text{لا}^2+\frac{14}{17}\text{لا}^3+\cdots+\frac{2^{\text{ن}}-2}{2^{\text{ن}}+1}\text{لا}^{\text{ن}-1}+\cdots\cdots$

(۱۳) $\frac{1}{\text{ق}_1}+\frac{1}{\text{ق}_3}+\frac{1}{\text{ق}_5}+\cdots\cdots$

(۱۴) $۲لا + \frac{۳لا^۲}{۸} + \frac{۴لا^۳}{۲۷} + \ldots + \frac{(ن+۱)لا^ن}{ن^۳} + \ldots$

(۱۵) $\left(\frac{۲^۲}{۱^۲} - \frac{۲}{۱}\right)^{-۱} + \left(\frac{۳^۳}{۲^۳} - \frac{۳}{۲}\right)^{-۲} + \left(\frac{۴^۴}{۳^۴} - \frac{۴}{۳}\right)^{-۳} + \ldots$

(۱۶) $۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۲^۲}{۳^۳} + \frac{۳^۳}{۴^۴} + \frac{۴^۴}{۵^۵} + \ldots$

(۱۷) جن سلسلوں کی ن ویں رقوم حسب ذیل ہیں اُن کی جانچ کرو

(۱) $\sqrt{ن^۲ + ۱} - ن$　　(۲) $\sqrt{ن^۴ + ۱} - \sqrt{ن^۴ - ۱}$

(۱۸) ذیل کے سلاسل کی جانچ کرو۔

(۱) $\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا+۱} + \frac{۱}{لا+۲} + \frac{۱}{لا+۳} + \ldots$

(۲) $\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا-۱} + \frac{۱}{لا+۱} + \frac{۱}{لا-۲} + \frac{۱}{لا+۲} + \ldots$

جہاں لا کوئی مثبت کسر ہے۔

(۱۹) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$۱ + \frac{ق^۲}{|\underline{۲}} + \frac{ق^۳}{|\underline{۳}} + \frac{ق^۴}{|\underline{۴}} + \ldots$$

ق کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ لا متناہی سلسلہ

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \ldots$$

مستدق ہوگا اگر نہا $\sqrt[ن]{ع_ن}$ کم ہو ایک سے اور متسع ہوگا اگر یہ بڑا ہو ایک سے۔

(۲۱) ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$\frac{۲}{۱} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۳} \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۶}{۵} \ldots\ldots \frac{ن-۲}{ن-۳} \times \frac{ن-۲}{ن-۱} \times \frac{ن^۲}{ن^۲-۱}$

محدود ہوگا جب ن غیر محدود ہو۔

(۲۲) ثابت کرو کہ اگر لا = ا تو $(۱+لا)^ن$ کی تفصیل میں کوئی رقم لا متناہی نہیں ہوگی سوائے اُس صورت کے جبکہ ن منفی ہو اور تعداداً ایک سے بڑا ہو۔

۲۹۸ ـ کسی سلسلہ کے استدقاق یا اتساع کی جانچ کرنے کے لئے جو قواعد دفعات ۲۶۷، ۲۹۱ میں قبل ازیں مذکور ہو چکے ہیں وہ بالعموم کافی ثابت ہوتے ہیں، تاہم دفعہ مابعد میں ہم ایک اور مسئلہ ثابت کرینگے جس کی مدد سے ہم معاون سلسلہ

$$\frac{۱}{۱^ق} + \frac{۱}{۲^ق} + \frac{۱}{۳^ق} + \ldots\ldots$$

کے ذریعہ کسی سلسلہ کو جانچنے کے چند اور قواعد مستنبط ہو سکیں گے جو اکثر اوقات مفید اور کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔

۲۹۹ ـ دو لا متناہی سلسلوں کی ن ویں رقمیں بالترتیب $ع_ن$ اور $و_ن$ ہیں اور ان سلسلوں کی سب رقمیں مثبت ہیں، تب اگر و سلسلہ مستدق ہو تو ع سلسلہ بھی مستدق ہوگا جب کسی مقررہ رقم کے بعد $\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}} < \frac{و_ن}{و_{ن-۱}}$

اور اگر و سلسلہ متسع ہو تو ع سلسلہ بھی متسع ہوگا جب کسی مقررہ رقم کے بعد

$$\frac{ع_ن}{ع_{ن-۱}} > \frac{و_ن}{و_{ن-۱}}$$

فرض کرو کہ مقررہ رقوم بالترتیب $ع_۱$ اور $و_۱$ ہیں۔

صورت اول ـ فرض کرو کہ $\frac{ع_۲}{ع_۱} < \frac{و_۲}{و_۱}$ ، $\frac{ع_۳}{ع_۲} < \frac{و_۳}{و_۲} \ldots$

تب $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \cdots\cdots$

$$= ع_1\left(1 + \frac{ع_2}{ع_1} + \frac{ع_3}{ع_2} \times \frac{ع_2}{ع_1} + \cdots\cdots\right)$$

$$< ع_1\left(1 + \frac{د_2}{د_1} + \frac{د_3}{د_2} \times \frac{د_2}{د_1} + \cdots\cdots\right)$$

یعنی $< \frac{ع_1}{د_1}\left(د_1 + د_2 + د_3 + \cdots\cdots\right)$

اِس لئے اگر د سلسلہ مستدق ہو تو ع سلسلہ بھی مستدق ہوگا۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ $\frac{ع_2}{ع_1} > \frac{د_2}{د_1}$، $\frac{ع_3}{ع_2} > \frac{د_3}{د_2}$

تب $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \cdots\cdots$

$$= ع_1\left(1 + \frac{ع_2}{ع_1} + \frac{ع_3}{ع_2} \times \frac{ع_2}{ع_1} + \cdots\right)$$

$$> ع_1\left(1 + \frac{د_2}{د_1} + \frac{د_3}{د_2} \times \frac{د_2}{د_1} \cdots\right)$$

یعنی $> \frac{ع_1}{د_1}\left(د_1 + د_2 + د_3 + \cdots\right)$

پس اگر د سلسلہ متسع ہو تو ع سلسلہ بھی متسع ہوگا

۳۰۰۔ دفعہ ۲۸۷ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ [illegible]
سلسلہ کی ن ویں رقم اِس کی رقم ماقبل کے ساتھ [illegible]
ہو تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے اور اگر یہ نسبت ایک [illegible]
سلسلہ متسع ہوتا ہے۔

اِس باب کے باقی حصہ میں ہم دیکھینگے کہ اس جانچ [illegible]
ذیل کو استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے

یعنی اگر $\text{نہا}\left\{ن\left(\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} - 1\right)\right\} > ق$

لیکن معاون سلسلہ مستدق ہوتا ہے اگر ق ایک سے بقدر ایک محدود مقدار کے جو خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو بڑا ہو، پس مسئلہ ہذا کا پہلا حصہ ثابت ہوا۔ اگر $ق < 1$ تو معاون سلسلہ منتشر ہوتا ہے اور حسب سابق ہم مسئلہ کا دوسرا حصہ بھی ثابت کرسکتے ہیں۔

مثال۔ معلوم کرو کہ سلسلہ

$$\frac{لا}{1} + \frac{1}{2}\times\frac{لا^3}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{لا^5}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{لا^7}{7} + \ldots$$

مستدق ہے یا منتشر۔

یہاں $\text{نہا}\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} = \frac{1}{لا^2}$، اس لئے اگر $لا < 1$ تو سلسلہ مستدق ہوگا اور اگر $لا > 1$ تو سلسلہ منتشر ہوگا۔

اگر $لا = 1$ تو $\text{نہا}\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} = 1$، اس صورت میں

$$ع_ن = \frac{1\times3\times5\times\ldots\ldots(2ن-3)}{2\times4\times6\times\ldots\ldots(2ن-2)}\times\frac{1}{(2ن-1)}$$

اور $$\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} = \frac{2ن(2ن+1)}{(2ن-1)(2ن-1)}$$

$$\therefore\ ن\left(\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} - 1\right) = \frac{ن(6ن-1)}{(2ن-1)^2}$$

$$\therefore\ \text{نہا}\left\{ن\left(\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} - 1\right)\right\} = \frac{3}{2}$$

پس اگر $لا = 1$ تو بھی سلسلہ بالا مستدق ہوگا۔

۳۰۲۔ ثابت کرو کہ وہ سلسلہ جس کی عام رقم $ع_ن$ ہے مستدق یا منتشر ہوگا

اگر بالترتیب نہا $\left(ن \text{ لوک } \frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} \right) > \text{ یا } < 1$

سلسلۂ زیر بحث کا مقابلہ اُس سلسلہ سے کرو جس کی عام رقم $\frac{1}{ن^ق}$ ہے۔

جب $ق > 1$، تو معاون سلسلہ مستدق ہوتا ہے اور اس صورت میں

سلسلۂ زیر بحث مستدق ہوگا اگر

$$\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > \left(1 + \frac{1}{ن}\right)^ق \quad \ldots\ldots \quad [\text{دفعہ } ۳۰۰]$$

یعنی اگر لوک $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > ق$ لوک $\left(1 + \frac{1}{ن}\right)$

یا اگر لوک $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > \frac{ق}{ن} - \frac{ق}{۲ن^۲} + \ldots\ldots$

یعنی اگر نہا $\left(ن \text{ لوک } \frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} \right) > ق$

پس مسئلۂ زیر بحث کا پہلا حصہ ثابت ہوا۔

اگر $ق < 1$ تو بھی ہم اسی طرح عمل کرتے ہیں، اس صورت میں معاون سلسلہ متسع ہوتا ہے۔

مثال۔ معلوم کرو کہ سلسلہ

$$لا + \frac{۲^۲ لا^۲}{\lfloor ۲} + \frac{۳^۳ لا^۳}{\lfloor ۳} + \frac{۴^۴ لا^۴}{\lfloor ۴} + \frac{۵^۵ لا^۵}{\lfloor ۵} + \ldots\ldots$$

مستدق ہے یا متسع۔

یہاں $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} = \frac{ن^ن لا^ن}{\lfloor ن} \div \frac{(ن+1)^{ن+1} لا^{ن+1}}{\lfloor ن+1}$

$$= \frac{ن^ن}{(ن+1)^ن لا} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{ن}\right)^ن لا}$$

$\therefore$ نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} = \frac{1}{ثولا}$ .... [دفعہ ۲۲۰ نتیجہ صریح]

پس اگر لا $< \frac{1}{ث}$ تو سلسلہ مستدق ہے اور اگر لا $> \frac{1}{ث}$ تو سلسلہ متسع ہے۔

اگر لا $= \frac{1}{ث}$ تو $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} = \frac{ث}{(1+\frac{1}{ن})^ن}$

$\therefore$ لوک $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} =$ لوک ث $-$ ن لوک $(1+\frac{1}{ن})$

$= 1 -$ ن $(\frac{1}{ن} - \frac{1}{2ن^2} + \frac{1}{3ن^3} - \cdots\cdots)$

$= \frac{1}{2ن} - \frac{1}{3ن^2} + \cdots\cdots\cdots$

$\therefore$ ن لوک $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3ن} + \cdots\cdots$

$\therefore$ نہا (ن لوک $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}}$) $= \frac{1}{2}$

پس اگر لا $= \frac{1}{ث}$ تو سلسلہ متسع ہوگا۔

۳۰۲۔ اگر نہا $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} = 1$ اور نیز نہا $\{$ن$(\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} - 1)\} = 1$ تو آزمائش کے طریقے مندرجہ دفعات ۳۰۰ اور ۳۰۱ کارآمد نہیں ہوتے، پس کوئی نیا طریقہ دریافت کرنے کے لئے ہم اس معاون سلسلہ کا استعمال کرتے ہیں جس کی عام رقم $\frac{1}{ن(لوک ن)^ق}$ ہے، اس سلسلہ کا استدقاق یا

معلوم کرنے کے لئے ہمیں دفعہ ذیل کے مسئلہ کی ضرورت ہوگی۔

۳۰۴۔ اگر ن کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے فہ (ن) مثبت رہے اور جوں جوں ن بڑھتا جائے اُس کی قیمت مسلسل کم ہوتی جائے، نیز اگر ا کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ذیل کے دو لامتناہی سلسلے

$$\text{فہ}(۱) + \text{فہ}(۲) + \text{فہ}(۳) + \dots + \text{فہ}(\text{ن}) + \dots\dots$$

$$\text{اور}\quad \text{ا}\,\text{فہ}(\text{ا}) + \text{ا}^{۲}\,\text{فہ}(\text{ا}^{۲}) + \text{ا}^{۳}\,\text{فہ}(\text{ا}^{۳}) + \dots\dots \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{فہ}(\text{ا}^{\text{ن}}) + \dots$$

یا دونوں مستدق ہوں گے یا دونوں متسع۔

پہلے سلسلہ میں رقوم

$$\text{فہ}(\text{ا}^{\text{ک}}+۱)،\ \text{فہ}(\text{ا}^{\text{ک}}+۲)،\ \text{فہ}(\text{ا}^{\text{ک}}+۳)،\ \dots\dots \text{فہ}(\text{ا}^{\text{ک}+۱}) \dots (۱)$$

پر غور کرو جو رقم فہ $(\text{ا}^{\text{ک}})$ کے بعد واقع ہوتی ہیں۔

ان رقوم کی تعداد $\text{ا}^{\text{ک}+۱} - \text{ا}^{\text{ک}}$ یعنی $\text{ا}^{\text{ک}}\{\text{ا} - ۱\}$ ہے اور ان میں سے ہر ایک رقم فہ $(\text{ا}^{\text{ک}+۱})$ سے بڑی ہے، پس ان رقوم کا حاصل جمع $\text{ا}^{\text{ک}}(\text{ا}-۱)\,\text{فہ}(\text{ا}^{\text{ک}+۱})$ سے بڑا ہے یعنی $\frac{\text{ا}-۱}{\text{ا}} \times \text{ا}^{\text{ک}+۱}\,\text{فہ}(\text{ا}^{\text{ک}+۱})$ سے بڑا ہے۔

ک کو بالترتیب قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳، ..... دینے سے

$$\text{فہ}(۲) + \text{فہ}(۳) + \text{فہ}(۴) + \dots\dots \text{فہ}(\text{ا}) > \frac{\text{ا}-۱}{\text{ا}} \times \text{ا}\,\text{فہ}(\text{ا})$$

$$\text{فہ}(\text{ا}+۱) + \text{فہ}(\text{ا}+۲) + \text{فہ}(\text{ا}+۳) + \dots + \text{فہ}(\text{ا}^{۲}) > \frac{\text{ا}-۱}{\text{ا}} \times \text{ا}^{۲}\,\text{فہ}(\text{ا}^{۲})$$

....

جمع کرنے سے $\text{ج}_{۱} - \text{فہ}(۱) > \frac{\text{ا}-۱}{\text{ا}}\,\text{ج}_{۲}$

جہاں ج اور ج′ بالترتیب پہلے اور دوسرے سلسلہ کے حاصل جمع کو تعبیر کرتے ہیں۔ پس اگر دوسرا سلسلہ متسع ہو تو پہلا بھی متسع ہوگا۔

نیز سلسلہ (۱) کی ہر ایک رقم فہ (اک) سے کم ہے اور اس لئے اس سلسلہ کا حاصل جمع (ا − ۱) اک فہ (اک) سے کم ہے۔

ک کو بالترتیب ۰، ۱، ۲، ۳، ... قیمتیں دینے سے

$$\text{فہ}(۲)+\text{فہ}(۳)+\text{فہ}(۴)+\dots\dots+\text{فہ}(ا) < (ا-۱)\times\text{فہ}(۱)$$

$$\text{فہ}(ا+۱)+\text{فہ}(ا+۲)+\text{فہ}(ا+۳)+\dots\dots+\text{فہ}(ا^۲) < (ا-۱)\times ا$$

. . . .

اس لئے جمع کرنے سے

$$ج - \text{فہ}(۱) < (ا-۱)\{ج' + \text{فہ}(۱)\}$$

پس اگر دوسرا سلسلہ مستدق ہو تو پہلا بھی مستدق ہوگا۔

نوٹ۔ دوسرے سلسلہ کی عام رقم یعنی ن ویں رقم معلوم کرنے کے لئے ہم سلسلہ کی عام رقم یعنی فہ (ن) لیتے ہیں، پھر ن کی بجائے $ا^{ن}$ لکھ کر $ا^{ن}$ سے ضرب دے دیتے ہیں۔

۳۰۵— سلسلہ $۱+\dfrac{۱}{۲(\text{لوک}\ ۲)^{ق}}+\dfrac{۱}{۳(\text{لوک}\ ۳)^{ق}}+\dots\dots+\dfrac{۱}{ن(\text{لوک}\ ن)^{ق}}+$

مستدق ہوتا ہے اگر ق > ۱ اور متسع ہوتا ہے اگر ق = یا < ۱

دفعہ ماقبل کی رو سے سلسلۂ بالا مستدق ہوگا یا متسع اگر وہ سلسلہ جس کی ن ویں

$$ا^{ن}\times\frac{۱}{ا^{ن}(\text{لوک}\ ا^{ن})^{ق}}\ \text{یعنی}\ \frac{۱}{(ن\ \text{لوک}\ ا)^{ق}}\ \text{یعنی}\ \frac{۱}{(\text{لوک}\ ا)^{ق}}\times\frac{۱}{ن^{ق}}$$

ہے ق کی اسی قیمت کے لئے بالترتیب مستدق یا متسع ہو۔

مستقل جزوضربی $\dfrac{۱}{(\text{لوک}\ ا)^{ق}}$ سب رقموں میں مشترک ہے پس سلسلۂ زیر

اور وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{ن^{ق}}$ ہے ق کی ایک ہی قیمت کے لئے دونوں مستدق ہوں گے یا دونوں متسع، پس مطلوبہ نتیجہ دفعہ ۲۹۰ کی رو سے بآسانی حاصل ہو جاتا ہے۔

۳۰۶۔ وہ سلسلہ جس کی عام رقم $ع_ن$ ہے مستدق ہوگا یا متسع اگر بالترتیب

نہا $\left[\left\{ ن \left(\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} - 1 \right) - 1 \right\} لوک\ ن \right] > $ یا < 1

سلسلہ زیر بحث کا مقابلہ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{۲(لوک\ ۲)^{ق}} + \frac{1}{۳(لوک\ ۳)^{ق}} + \cdots\cdots + \frac{1}{ن(لوک\ ن)^{ق}} + \cdots\cdots$$

سے کرو۔

جب ق > ۱ تو معاون سلسلہ مستدق ہوتا ہے اور اس صورت میں سلسلہ زیر بحث دفعہ ۲۹۹ کی رو سے مستدق ہوگا اگر

$$\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > \frac{(ن+1)\left\{لوک\ (ن+1)\right\}^{ق}}{ن(لوک\ ن)^{ق}} \quad \cdots \quad (1)$$

اب اگر ن بہت بڑا ہو تو

$$لوک\ (ن+1) = لوک\ ن + لوک\ (1 + \frac{1}{ن}) = لوک\ ن + \frac{1}{ن}\ \text{تقریباً}$$

پس شرط (۱) ہو جاتی ہے

$$\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > (1 + \frac{1}{ن})(1 + \frac{1}{ن\ لوک\ ن})^{ق}$$

یعنی $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > (1 + \frac{1}{ن})(1 + \frac{ق}{ن\ لوک\ ن})$

یعنی $\frac{ع_ن}{ع_{ن+1}} > 1 + \frac{1}{ن} + \frac{ق}{ن\ لوک\ ن}$

یعنی $\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}-۱\right) > ۱+\frac{\text{ق}}{\text{لوک ن}}$

یعنی $\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}-۱\right)-۱\right\}\text{لوک ن} > \text{ق}$

لہٰذا مسئلہ ہٰذا کا پہلا حصہ ثابت ہوا، دوسرا حصہ بھی بموجب قاعدہ دفعہ ۳۰۱ بآسانی ثابت ہوسکتا ہے۔

مثال ۔ معلوم کرو کہ سلسلہ $۱+\frac{۱^۲}{۲^۲}+\frac{۱^۲}{۲^۲}\times\frac{۳^۲}{۴^۲}+\frac{۱^۲}{۲^۲}\times\frac{۳^۲}{۴^۲}\times\frac{۵^۲}{۶^۲}+\cdots$ مستدق ہے یا متسع

یہاں $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}=\frac{(۲\text{ن}+۱)^۲}{(۲\text{ن})^۲}=۱+\frac{۱}{\text{ن}}+\frac{۱}{۴\text{ن}^۲}$ ...... (۱)

∴ نہا $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}=۱$، اس لئے ہم مزید جانچ کرتے ہیں

(۱) سے $\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}-۱\right)=۱+\frac{۱}{۴\text{ن}}$ ...... (۲)

∴ نہا $\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}-۱\right)\right\}=۱$، اس لئے ہم پھر مزید جانچ کی طرف رجوع کرتے ہیں۔

(۲) سے $\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}-۱\right)-۱\right\}\text{لوک ن}=\frac{\text{لوک ن}}{۴\text{ن}}$

∴ نہا $\left[\left\{\text{ن}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+۱}}-۱\right)-۱\right\}\text{لوک ن}\right]=۰$

چونکہ دفعہ ۲۹۵ کی رُو سے نہا $\frac{\text{لوک ن}}{\text{ن}}=۰$، اس لئے ثابت ہوا کہ زیر بحث متسع ہے۔

۲۰۷۔ دفعہ ۱۸۳ میں ہم یہ تو بتا چکے ہیں کہ متسع سلسلوں کو سلک استدلال میں لانے سے بہت ممکن ہے کہ غلط نتائج مستنبط ہوں لیکن اگر لامتناہی سلسلے مستدق بھی ہوں تو بھی اُن کو استعمال کرنے میں احتیاط سے کام لینا ضروری ہوتا ہے۔ مثلاً سلسلہ

$$\text{۱} - \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\sqrt{\text{۲}}} - \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\sqrt{\text{۳}}} - \frac{\text{لا}^{\text{۴}}}{\sqrt{\text{۴}}} - \frac{\text{لا}^{\text{۵}}}{\sqrt{\text{۵}}} + \cdots\cdots$$

مستدق ہوتا ہے جب لا = ۱ [دیکھو دفعہ ۲۸۰]

اگر ہم اس سلسلہ کو اسی سلسلہ سے ضرب دیں تو حاصل ضرب میں $\text{لا}^{\text{۲ن}}$ کا سر

$$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲ن}}} + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲ن} - \text{۱}}} + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}} \times \sqrt{\text{۲ن} - \text{۲}}} + \cdots\cdots + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{ر}}\sqrt{\text{۲ن} - \text{ر}}} + \cdots\cdots + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲ن}}} \text{ ہے۔}$$

اس سر کو $\text{ا}_{\text{۲ن}}$ سے تعبیر کرو۔ تب چونکہ

$$\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{ر}}\sqrt{\text{۲ن} - \text{ر}}} > \frac{\text{۱}}{(\sqrt{\text{ن}})^{\text{۲}}} \text{ یعنی } > \frac{\text{۱}}{\text{ن}}$$

اس لئے $\text{ا}_{\text{۲ن}} > \frac{\text{۲ن} + \text{۱}}{\text{ن}}$ اور بنابریں لامتناہی ہے جب ن لامتناہی ہو

اگر لا = ۱ تو حاصل ضرب

$$\text{ا}_{\text{۰}} - \text{ا}_{\text{۱}} + \text{ا}_{\text{۲}} - \text{ا}_{\text{۳}} + \cdots\cdots \text{ا}_{\text{۲ن}} - \text{ا}_{\text{۲ن}+\text{۱}} + \text{ا}_{\text{۲ن}+\text{۲}} - \cdots$$

بن جاتا ہے اور چونکہ رقوم $\text{ا}_{\text{۲ن}}$، $\text{ا}_{\text{۲ن}+\text{۱}}$، $\text{ا}_{\text{۲ن}+\text{۲}}$، ...... لامتناہی ہیں، اس لئے اس سلسلہ کو کوئی حسابی معنی نہیں دئے جا سکتے۔

اس سے یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ دو لامتناہی مستدق سلسلوں کا حاصل ضرب

کن شرائط کے ماتحت مستدق رہتا ہے۔

۳۰۸۔ دو لامتناہی سلسلوں

$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ا_۳ لا^۳ + \ldots\ldots ا_{۲ن} لا^{۲ن} + \ldots\ldots$

اور $ب_۰ + ب_۱ لا + ب_۲ لا^۲ + ب_۳ لا^۳ + \ldots\ldots ب_{۲ن} لا^{۲ن} + \ldots\ldots$

کو بالترتیب ا اور ب سے تعبیر کرو۔

اگر ہم اِن دو سلسلوں کو باہم ضرب دیں تو حاصل ضرب حسب ذیل شکل کا ہوگا

$ا_۰ ب_۰ + (ا_۱ ب_۰ + ا_۰ ب_۱) لا + (ا_۲ ب_۰ + ا_۱ ب_۱ + ا_۰ ب_۲) لا^۲ + \ldots\ldots$

فرض کرو کہ یہ حاصل ضرب لامتناہی تک لکھا گیا ہے، اس کو ج سے تعبیر کرو۔ اب ہمیں یہ دیکھنا ہے کہ کن شرائط کے ماتحت ہم ج کو ا ب کے حاصل ضرب کا حقیقی حسابی معادل خیال کر سکتے ہیں۔

پہلے فرض کرو کہ ا اور ب میں سب رقوم مثبت ہیں۔

ا، ب اور ج کی پہلی ۲ ن رقوم سے جو سلسلے بنتے ہیں اُن کو بالترتیب $ا_{۲ن}$، $ب_{۲ن}$، $ج_{۲ن}$ سے تعبیر کرو۔

اگر ہم دو سلسلوں $ا_{۲ن}$ اور $ب_{۲ن}$ کو باہم ضرب دیں تو حاصل ضرب میں $لا^{۲ن}$ والی رقم تک لا کی ہر ایک قوت کا سر ج میں لا کی اُسی قوت والی رقم کے سر کے مساوی ہوگا، لیکن علاوہ ازیں حاصل ضرب $ا_{۲ن} ب_{۲ن}$ میں ایسی رقوم بھی شامل ہیں جن میں لا کی قوت ۲ ن سے زیادہ ہے لیکن $ج_{۲ن}$ میں لا کی بڑی سے بڑی قوت $لا^{۲ن}$ ہے، اس لئے

$$ا_{۲ن} ب_{۲ن} > ج_{۲ن}$$

اگر ہم حاصل ضرب $ا_{۲ن} ب_{۲ن}$ مرتب کریں تو اس میں آخری رقم $ا_{۲ن} ب_{۲ن} لا^{۴ن}$

ہوگی لیکن $\text{ج}_{۲\text{ن}}$ میں وہ سب رقوم شامل ہیں جو اس حاصل ضرب میں موجود ہیں اور اس کے علاوہ کچھ اور رقمیں بھی ہیں، اس لئے

$$\text{ج}_{۲\text{ن}} > \text{ا}_{\text{ن}}\text{ب}_{\text{ن}}$$

پس ن کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو $\text{ج}_{۲\text{ن}}$ کی قیمت ہمیشہ $\text{ا}_{\text{ن}}\text{ب}_{\text{ن}}$ اور $\text{ا}_{۲\text{ن}}\text{ب}_{۲\text{ن}}$ کی قیمتوں کے درمیان ہوگی۔

فرض کرو کہ ا اور **ب** مستدق سلسلے ہیں،

$$\text{ا}_{\text{ن}} = \text{ا} - \text{لا} \quad \text{اور} \quad \text{ب}_{\text{ن}} = \text{ب} - \text{ما}$$

کے مساوی رکھو جہاں لا اور ما بالترتیب ان سلسلوں کے ان حصوں کو تعبیر کرتے ہیں جو (ن+۱) رقمیں لینے کے بعد بچ رہتے ہیں، تب اگر ن لامتناہی ہوگا تو لا اور ما دونوں لا انتہا چھوٹے ہوں گے۔

$$\therefore \text{ا}_{\text{ن}}\text{ب}_{\text{ن}} = (\text{ا} - \text{لا})(\text{ب} - \text{ما}) = \text{اب} - \text{ب لا} - \text{ا ما} + \text{لا ما}$$

اس لئے $\text{ا}_{\text{ن}}\text{ب}_{\text{ن}}$ کی انتہا اب ہے کیونکہ ا اور ب دونوں محدود ہیں اسی طرح $\text{ا}_{۲\text{ن}}\text{ب}_{۲\text{ن}}$ کی انتہا اب ہے۔

اس لئے ج جو $\text{ج}_{۲\text{ن}}$ کی انتہا ہے لازماً اب کے برابر ہوگا

کیونکہ یہ $\text{ا}_{\text{ن}}\text{ب}_{\text{ن}}$ اور $\text{ا}_{۲\text{ن}}\text{ب}_{۲\text{ن}}$ کی انتہاؤں کے درمیان واقع ہے۔

اب فرض کرو کہ ا اور ب کی سب رقوم کی علامتیں یکساں نہیں ہیں

اس صورت میں ضروری نہیں کہ لامساویات $\text{ا}_{۲\text{ن}}\text{ب}_{۲\text{ن}} > \text{ج}_{۲\text{ن}} > \text{ا}_{\text{ن}}\text{ب}_{\text{ن}}$ درست ہوں اور ہم حسب سابق استدلال نہیں کر سکتے۔

دونوں سلسلوں کی مثبت رقوم کے مجموعہ کو بالترتیب ف، ق سے اور

منفی رقوم کے مجموعہ کو بالترتیب ف، فَ سے تعبیر کرو یعنی

ا = ث - ف

ب = ثَ - فَ

تب اگر ث، ثَ، ف، فَ میں ہر ایک جملہ ایک مستدق سلسلہ ہو تو مساوات

اب = ث ثَ - ف ثَ - ث فَ + ف فَ

کے معنی بخوبی سمجھ میں آسکتے ہیں، کیونکہ ہر ایک جملہ ث ثَ، ف ثَ، ث فَ، ف فَ مسئلہ ہذا کے حصہ اول کی رو سے جداگانہ ایک مستدق سلسلہ ہے اور بنا بریں سلاسل ا اور ب کا حاصل ضرب مستدق سلسلہ ہے۔

پس دو سلاسل کا حاصل ضرب مستدق ہوگا اگر ہر سلسلہ میں مثبت علامتوں والی رقوم کے حاصل جمع اور منفی علامتوں والی رقوم کے حاصل جمع جداگانہ مستدق سلسلے ہوں۔

لیکن اگر جملات ث، ف، ثَ، فَ میں سے ہر ایک جملہ متسع سلسلہ ہو (جیسا کہ دفعہ ماقبل کی صورت میں جہاں علاوہ ازیں ثَ = ث اور فَ = ف) تو سب جملات ث ثَ، ف ثَ، ث فَ، ف فَ متسع سلسلے ہونگے جب ایسی صورت ہو تو ہر ایک مثال میں جداگانہ یہ تحقیق کرلینا از بس ضروری ہوتا ہے کہ حاصل ضرب مستدق ہے یا نہیں۔

امثلہ نمبری ۲۱ (ب)

معلوم کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں یا متسع -

۱- $1 + \frac{1}{2}\times\frac{لا^{2}}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{لا^{4}}{8} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}\times\frac{لا^{6}}{12}$

۲- $1 + \frac{3}{7}لا + \frac{3}{7}\times\frac{6}{10}لا^{2} + \frac{3}{7}\times\frac{6}{10}\times\frac{9}{13}لا^{3} + \frac{3}{7}\times\frac{6}{10}\times\frac{9}{13}\times\frac{12}{16}لا^{4} + \cdots\cdots$

۳- $لا + \frac{2^{2}}{3\times4}لا^{3} + \frac{2^{2}\times4^{2}}{3\times4\times5\times6}لا^{5} + \frac{2^{2}\times4^{2}\times6^{2}}{3\times4\times5\times6\times7\times8}لا^{7} + \cdots\cdots\cdots$

۴- $1 + \frac{2\,\text{لا}}{\lfloor 2} + \frac{3^2\,\text{لا}^2}{\lfloor 3} + \frac{4^3\,\text{لا}^3}{\lfloor 4} + \frac{5^4\,\text{لا}^4}{\lfloor 5} + \cdots\cdots$

۵- $1 + \frac{1}{2}\text{لا} + \frac{\lfloor 2}{2^3}\,\text{لا}^2 + \frac{\lfloor 3}{3^4}\,\text{لا}^3 + \frac{\lfloor 4}{4^5}\,\text{لا}^4 + \cdots\cdots$

۶- $\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3^2}{4^2}\,\text{لا} + \frac{1^2}{2^2} \times \frac{3^2}{4^2} \times \frac{5^2}{6^2}\,\text{لا}^2 + \cdots\cdots$

۷- $1 + \frac{\text{ل}(1-\text{ل})}{1^2} + \frac{(1+\text{ل})\,\text{ل}\,(1-\text{ل})(2-\text{ل})}{1^2 \times 2^2} + \frac{(2+\text{ل})(1+\text{ل})\,\text{ل}\,(1-\text{ل})(2-\text{ل})(3-\text{ل})}{1^2 \times 2^2 \times 3^2} + \cdots$

جہاں ل کوئی کسر واجب ہے۔

۸- $\frac{\text{ل}+\text{لا}}{1} + \frac{(\text{ل}+2\,\text{لا})^2}{\lfloor 2} + \frac{(\text{ل}+3\,\text{لا})^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots\cdots$

۹- $1 + \frac{\text{عہ}\,\text{بہ}}{1 \times \text{جہ}}\,\text{لا} + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+1)\,\text{بہ}(\text{بہ}+1)}{1 \times 2\,\text{جہ}(\text{جہ}+1)}\,\text{لا}^2 + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+1)(\text{عہ}+2)\,\text{بہ}(\text{بہ}+1)(\text{بہ}+2)}{1 \times 2 \times 3 \times \text{جہ}(\text{جہ}+1)(\text{جہ}+2)} +$

۱۰- $\text{لا}^2(\text{لوک}\ 2)^{\text{ق}} + \text{لا}^3(\text{لوک}\ 3)^{\text{ق}} + \text{لا}^4(\text{لوک}\ 4)^{\text{ق}} + \cdots\cdots\cdots$

۱۱- $1 + \text{ل} + \frac{\text{ل}(\text{ل}+1)}{1 \times 2} + \frac{\text{ل}(\text{ل}+1)(\text{ل}+2)}{1 \times 2 \times 3} + \cdots\cdots\cdots$

۱۲- اگر $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+1}} = \frac{\text{ن}^{\text{ک}} + \text{ا}\,\text{ن}^{\text{ک}-1} + \text{ب}\,\text{ن}^{\text{ک}-2} + \text{ج}\,\text{ن}^{\text{ک}-3} + \cdots\cdots}{\text{ن}^{\text{ک}} + \text{ا}_1\,\text{ن}^{\text{ک}-1} + \text{ب}_1\,\text{ن}^{\text{ک}-2} + \text{ج}_1\,\text{ن}^{\text{ک}-3} + \cdots\cdots}$ جہاں

ک کوئی مثبت صحیح عدد ہے، تو ثابت کرو کہ سلسلہ $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \cdots$ مستدق ہوگا اگر ل - لـ - ۱ مثبت ہو اور متسع ہوگا اگر ل - لـ - ۱ منفی ہو یا صفر کے مساوی ہو۔

بائیسواں باب

نامعلوم سر

اپنی منطقی الجبرا کی دفعہ ۲۳۰ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ اگر لا کے کسی منطق صحیح تفاعل میں لا = ه رکھنے سے تفاعل مذکور صفر ہو جائے تو یہ تفاعل لا - ه پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔ [علاوہ ازیں دیکھو دفعہ ۱۵۴ نتیجہ صحیح]
فرض کرو کہ

$$\text{ق لا}^{\text{ن}} + \text{ق}_1\text{ لا}^{\text{ن}-1} + \text{ق}_2\text{ لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots + \text{ق}_{\text{ن}}$$

لا میں ن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے جو معدوم ہو جاتا ہے جبکہ لا ذیل کی غیر مساوی مقادیر میں سے کسی ایک کے مساوی ہو

ه_1، ه_2، ه_3 .... $\text{ه}_{\text{ن}}$

مذکورہ بالا تفاعل کو ف (لا) سے تعبیر کرو، تب چونکہ ف (لا)، لا - ه_1 پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے اس لئے

$$\text{ف(لا)} = (\text{لا} - \text{ه}_1)\left\{\text{ق لا}^{\text{ن}-1} + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

جہاں خارج قسمت، (ن - ۱) ابعاد کا ایک جملہ ہے۔
اسی طرح سے چونکہ ف (لا)، لا - ه_2 پر بھی پورا تقسیم ہو جاتا ہے اس لئے

$$\text{ق لا}^{\text{ن}-1} + \ldots\ldots = (\text{لا} - \text{ه}_2)(\text{ق لا}^{\text{ن}-2} + \ldots\ldots)$$

جہاں خارج قسمت (ن - ۲) ابعاد کا ایک جملہ ہے، اور

ق۱ لا$^{ن-۲}$ + ... = (لا - ل۲) (ق۰ لا$^{ن-۳}$ + ...)

....

اسی طرح ن بار تقسیم کا عمل کرنے سے بالآخر حاصل ہوتا ہے۔

ف (لا) = ق۰ (لا - ل۱) (لا - ل۲) (لا - ل۳) ..... (لا - لن)

۳۱۰ — اگر ن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل متغیر کی ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے معدوم ہو جائے، تو متغیر کی ہر قوت کا سر لازماً صفر ہوگا۔

تفاعل کو ف (لا) سے تعبیر کرو، جہاں

ف (لا) = ق۰ لا^{ن} + ق۱ لا$^{ن-۱}$ + ق۲ لا$^{ن-۲}$ + ... + قن

نیز فرض کرو کہ ف (لا) صفر ہو جاتا ہے جب لا ذیل کی غیر مساوی قیمتوں ل۱، ل۲، ل۳ ...... لن میں سے کوئی قیمت اختیار کرے۔ تب

ف (لا) = ق۰ (لا - ل۱)(لا - ل۲)(لا - ل۳)......(لا - لن)

نیز فرض کرو کہ لا کی ایک اور قیمت جس سے ف (لا) معدوم ہو جاتا ہے ل ہے، تب چونکہ ف (ل) = ۰

اسلئے ق۰ (ل - ل۱)(ل - ل۲)(ل - ل۳) ...... (ل - لن) = ۰

اس لئے ق۰ = ۰ کیونکہ حسب مفروض باقی اجزائے ضربی میں سے کوئی جزوِ ضربی صفر نہیں ہے، پس ف (لا) ہو جاتا ہے

ق۱ لا$^{ن-۱}$ + ق۲ لا$^{ن-۲}$ + ق۳ لا$^{ن-۳}$ + ... + قن

چونکہ حسب مفروض لا کی ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے صفر ہوجاتا ہے
اس لئے $ق_۱ = ۰$
اسی طرح علیٰ ہذا لقیاس ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ سر دوں
$ق_۰$، $ق_۲$، $ق_۳$ ...... $ق_ن$ میں سے ہر ایک سر صفر کے مساوی ہے
اس نتیجہ کو بالفاظِ ذیل یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔
اگر ن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل متغیر کی ن سے زیادہ قیمتوں
کے لئے معدوم ہو جائے تو یہ تفاعل متغیر کی ہر قیمت کے لئے معدوم
ہو جائے گا۔

نتیجہ صریح۔ اگر تفاعل ف (لا)، لا کی ن سے زیادہ قیمتوں کے
لئے صفر ہو جائے تو مساوات ف (لا) = ۰ کی ن سے زیادہ اصلیں
ہوں گی۔

بنابریں اگر ن ابعاد کی کسی مساوات کی ن سے زیادہ اصلیں
ہوں تو یہ مساوات متماثلہ ہو گی۔

مثال۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{(لا - ب)(لا - ج)}{(ا - ب)(ا - ج)} + \frac{(لا - ج)(لا - ا)}{(ب - ج)(ب - ا)} + \frac{(لا - ا)(لا - ب)}{(ج - ا)(ج - ب)} = ۱$$

یہ دو ابعاد کی مساوات ہے جو صریحاً تین قیمتوں ا، ب، ج میں سے ہر
ایک سے پوری ہوتی ہے اس لئے یہ مساوات متماثلہ ہے۔

۱۱۳۔ اگر ن ابعاد کے دو منطق صحیح تفاعل، متغیر کی ن سے
زیادہ قیمتوں کے لئے باہم مساوی ہوں تو وہ تفاعل متغیر کی ہر قیمت
کے لئے مساوی ہوں گے۔

فرض کرو کہ دو تفاعل ہیں

$$ق_۰ لا^ن + ق_۱ لا^{ن-۱} + ق_۲ لا^{ن-۲} + ... + ق_ن$$

اور $ق'_۰ لا^{ن} + ق'_۱ لا^{ن-۱} + ق'_۲ لا^{ن-۲} + \dots + ق'_ن$

اور یہ لا کو ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے باہم مساوی ہو جاتے ہیں، تب جملہ

$$(ق_۰ - ق'_۰) لا^{ن} + (ق_۱ - ق'_۱) لا^{ن-۱} + (ق_۲ - ق'_۲) لا^{ن-۲} + \dots$$

$$\dots + (ق_ن - ق'_ن)$$

لا کی ن سے زیادہ قیمتوں سے صفر ہو جاتا ہے اور اس لئے دفعہ ماقبل کی رو سے $ق_۰ - ق'_۰ = ۰$، $ق_۱ - ق'_۱ = ۰$، $ق_۲ - ق'_۲ = ۰$

$ق_ن - ق'_ن = ۰$

یعنی دونوں جملے متماثل (ایک ہی) ہیں اور اس لئے متغیر کی ہر قیمت کے لئے باہم مساوی ہیں۔

لہٰذا اگر دو منطق، صحیح تفاعل متماثل طور پر ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو ہم متغیر کی یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھ سکتے ہیں۔

اس اصول کو ہم نے ایلی منٹری الجبرا دفعہ ۲۲۷ میں بلا ثبوت تسلیم کر لیا تھا۔

نتیجہ صریح۔ اگر ایک تفاعل بمقابلہ دوسرے تفاعل کے کم ابعاد کا ہو تو بھی یہ مسئلہ درست رہتا ہے۔ مثلاً اگر

$$ق_۰ لا^{ن} + ق_۱ لا^{ن-۱} + ق_۲ لا^{ن-۲} + \dots + ق_ن$$

$$= ق'_۲ لا^{ن-۲} + ق'_۳ لا^{ن-۳} + \dots + ق'_ن$$

تو اس صورت میں ہمیں صرف یہ فرض کر لینا چاہیے کہ $ق'_۰$ اور $ق'_۱$ دونوں

صفر ہیں،
تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

ق٠ = ٠، ق١ = ٠، ق٢ = ق٢َ، ق٣ = ق٣َ ..... قن = قنَ

۲۱۴ — دفعہ ماقبل کے نظریہ کو بالعموم "نامعلوم سروں کے اصول" سے موسوم کرتے ہیں۔ اس اصول کا استعمال ذیل کی مثالوں سے واضح ہو جائیگا۔

مثال ۱ — سلسلہ ۱×۲ + ۲×۳ + ۳×۴ + ... + ن(ن+۱)
کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ

۱×۲ + ۲×۳ + ۳×۴ + ... + ن(ن+۱)

= ا + ب ن + ج ن۲ + د ن۳ + ع ن۴ + ...

جہاں ا، ب، ج، د، ع ...... ایسی مقادیر ہیں جو ن کے تابع نہیں اور ان کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہے۔

ن کو ن + ۱ میں بدل دو۔ تب

۱×۲ + ۲×۳ + ۳×۴ + ... ن(ن+۱) + (ن+۱)(ن+۲)

= ا + ب(ن+۱) + ج(ن+۱)۲ + د(ن+۱)۳ + ع(ن+۱)۴ + ...

تفریق کرنے سے

(ن+۱)(ن+۲) = ب + ج(۲ن+۱) + د(۳ن۲ + ۳ن + ۱)

+ ع(۴ن۳ + ۶ن۲ + ۴ن + ۱) + ...

چونکہ یہ مساوات ن کی سب صحیح قیمتوں کے لئے درست ہے، اسلئے طرفین مساوات میں ن کی یکساں قوتوں کے سر باہم مساوی ہونگے

پس ع اور ع کے بعد کے تمام سر صفر ہیں، نیز

$$۳د = ۱، ۳د + ۲ج = ۳، د + ج + ب = ۲$$

جن سے $د = \frac{۱}{۳}$، $ج = ۱$، $ب = \frac{۲}{۳}$

پس حاصل جمع مطلوبہ $= ا + \frac{۲ن}{۳} + ن^۲ + \frac{۱}{۳}ن^۳$

ا کی قیمت معلوم کرنے کے لئے $ن = ۱$ رکھو

تب سلسلہ میں صرف ایک ہی یعنے پہلی رقم رہ جاتی ہے، اس طرح

$۲ = ا + ۲$ یعنی $ا = ۰$

لہذا $۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \ldots\ldots + ن(ن+۱)$

$$= \frac{۱}{۳}ن(ن+۱)(ن+۲)$$

نوٹ۔ اس جواب کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر کسی سلسلہ میں ن ویں رقم ن کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہو تو ہم سلسلۂ مذکور کے حاصل جمع کو ن کے ایک ایسے تفاعل کے مساوی فرض کر سکتے ہیں جسکا قوت نما سلسلہ کی ن ویں رقم کے بعد سے بقدر ایک کے زیادہ ہو

مثال ۲۔ معلوم کرو کہ کیا شرائط پوری ہونی چاہئیں کہ

$لا^۳ + ق لا^۲ + ل لا + ر$، $لا^۲ + ا لا + ب$ پر پورا تقسیم ہو جائے۔

فرض کرو کہ $لا^۳ + ق لا^۲ + ل لا + ر = (لا + ک)(لا^۲ + ا لا + ب)$

لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ک + ا = ق، اک + ب = ل، ک ب = ر$$

آخری مساوات سے $ک = \frac{ر}{ب}$، اس قیمت کو درج کرنے سے

$$\frac{ر}{ب} + ا = ق \quad \text{اور} \quad \frac{ا ر}{ب} + ب = ل$$

یعنی ر = ب (ق − ا) اور ا ر = (ل − ب) جو شرائط مطلوبہ ہیں۔

امثلہ نمبری ۲۲ (ا)

نامعلوم سروں کے قاعدہ سے ذیل کے سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۔ $۱^{۲} + ۳^{۲} + ۵^{۲} + ۷^{۲} + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۲۔ $۱ \times ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۴ + ۳ \times ۴ \times ۵ + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۳۔ $۱ \times ۲^{۲} + ۲ \times ۳^{۲} + ۳ \times ۴^{۲} + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۴۔ $۱^{۳} + ۳^{۳} + ۵^{۳} + ۷^{۳} + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۵۔ $۱^{۴} + ۲^{۴} + ۳^{۴} + ۴^{۴} + \ldots\ldots$ ن رقموں تک

۶۔ کیا شرط پوری ہونی چاہیے کہ $لا^{۳} - ۳ ق لا + ۲ ل$ جملہ $لا^{۲} + ۲ ا لا + ا^{۲}$ کی شکل کے ایک جزو ضربی پر پورا تقسیم ہو جائے۔

۷۔ وہ شرائط معلوم کرو کہ جملہ $ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + د$ پورا مکعب ہو۔

۸۔ کیا شرائط پوری ہوں کہ $ا لا^{۴} + ب لا^{۳} + ج لا^{۲} + د لا + ف$ پورا مربع ہو۔

۹۔ ثابت کرو کہ $ا لا^{۲} + ۲ ب لا ما + ج ما^{۲} + ۲ د لا + ۲ ع ما + ف$ پورا مربع ہوگا اگر $ب^{۲} = ا ج$، $د^{۲} = ا ف$ اور $ع^{۲} = ج ف$

۱۰۔ اگر $ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + د$ جملہ $لا^{۲} + ھ^{۲}$ پر پورا تقسیم ہو سکے تو ثابت کرو کہ $ا د = ب ج$

۱۱۔ اگر $لا^{۵} - ۵ ل لا + ۴ ر$ جملہ $(لا - ج)^{۲}$ پر پورا تقسیم ہو جائے تو ثابت کرو کہ $ل^{۵} = ر^{۴}$

۱۲۔ ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتیں متماثل ہیں

(۱)
$$\frac{ا^2(لا-ب)(لا-ج)}{(ا-ب)(ا-ج)}+\frac{ب^2(لا-ج)(لا-ا)}{(ب-ج)(ب-ا)}+\frac{ج^2(لا-ا)(لا-ب)}{(ج-ا)(ج-ب)}=لا^2$$

(۲)
$$\frac{(لا-ب)(لا-ج)(لا-د)}{(ا-ب)(ا-ج)(ا-د)}+\frac{(لا-ج)(لا-د)(لا-ا)}{(ب-ج)(ب-د)(ب-ا)}+\frac{(لا-د)(لا-ا)(لا-ب)}{(ج-د)(ج-ا)(ج-ب)}$$
$$+\frac{(لا-ا)(لا-ب)(لا-ج)}{(د-ا)(د-ب)(د-ج)}=۱$$

۱۳۔ وہ شرط معلوم کرو کہ جملہ

$ا\,لا^2+۲\,ھ\,لا\,ما+ب\,ما^2+۲\,گ\,لا+۲\,ف\,ما+ج$

جملات $ق\,لا+ل\,ما+ر$ اور $ق'\,لا+ل'\,ما+ر'$ کی شکل کے دو اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہو۔

۱۴۔ اگر $لا'=ل\,لا+م\,ما+ن\,ی$، $ما'=ن\,لا+ل\,ما+م\,ی$، $ی'=م\,لا+ن\,ما+ل\,ی$ اور نیز اگر لا، ما، ی کی سب قیمتوں کے لئے یہ مساواتیں درست ہوں جبکہ لا، ما، ی اور لا'، ما'، ی' کا بالترتیب باہم تبادلہ کردیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ل^2+۲\,م\,ن=۱،\quad م^2+۲\,ل\,ن=۰،\quad ن^2+۲\,ل\,م=۰.$$

۱۵۔ اگر ن مقادیر $ا^۱، ا^۲، ا^۳ \ldots\ldots ا^ن$ میں سے ن - ر مقادیر لینے سے مختلف اجتماع بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ جن اجتماعوں پر یہ حاصل ضرب مشتمل ہیں ان کا مجموعہ

فرض کرو کہ دو سلسلے

$$ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3 + \dots\dots$$

اور

$$ا'_0 + ا'_1 لا + ا'_2 لا^2 + ا'_3 لا^3 + \dots\dots$$

ہیں ۔ تب جملہ

$$(ا_0 - ا'_0) + (ا_1 - ا'_1) لا + (ا_2 - ا'_2) لا^2 + (ا_3 - ا'_3) لا^3 + \dots\dots$$

متقررہ انتہاؤں کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے معدوم ہو جائیگا
پس دفعہ ماقبل کی رُو سے

$$ا_0 - ا'_0 = 0 ، ا_1 - ا'_1 = 0 ، ا_2 - ا'_2 = 0 ، ا_3 - ا'_3 = 0 \dots\dots\dots$$

یعنی $ا_0 = ا'_0$ ، $ا_1 = ا'_1$ ، $ا_2 = ا'_2$ ، $ا_3 = ا'_3$ ، .. . . .
پس مسئلہ ثابت ہوا ۔

مثال ۱ ۔ $\frac{2 + لا^2}{1 + لا - لا^2}$ کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں اس رقم تک پھیلاؤ جس میں $لا^5$ واقع ہو ۔

فرض کرو کہ $\frac{2 + لا^2}{1 + لا - لا^2} = ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3 \dots\dots$
جہاں $ا_0$ ، $ا_1$ ، $ا_2$ ، $ا_3$ ..... مستقل مقداریں ہیں جنکی قیمتیں نکالنا مطلوب ہے ۔

$$2 + لا^2 = (1 + لا - لا^2)(ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + ا_3 لا^3 + \dots\dots)$$

طرفین مساوات میں ہم لا کی یکساں قوتوں والی رقوم کے سروں کو مساوی رکھ سکتے ہیں ۔ بائیں جانب میں $لا^ن$ کا سر $ا_ن + ا_{ن-1} - ا_{ن-2}$ ہے اور چونکہ دائیں جانب لا کی بڑی سے بڑی قوت ۲ ہے ،

اس لئے ن کی ان تمام قوتوں کے لئے جو دو سے بڑی ہیں

$$ا_{ن} + ا_{ن-۱} - ا_{ن-۲} = ۰$$

اگر پہلے تین سر معلوم ہو جائیں تو اس کے بعد مساوات بالا کی مدد سے ہم متواتر سروں کی قیمتیں نکال سکتے ہیں۔ ان تین سروں کو دریافت کرنے کے لئے ذیل کی مساواتیں مبنی ہیں

$$ا_{۰} = ۲،\quad ا_{۱} + ا_{۰} = ۰،\quad ا_{۲} + ا_{۱} - ا_{۰} = ۱$$

جن سے $ا_{۰} = ۲،\ ا_{۱} = -۲،\ ا_{۲} = ۵$

نیز $ا_{۳} + ا_{۲} - ا_{۱} = ۰$ جن سے $ا_{۳} = -۷$

$ا_{۴} + ا_{۳} - ا_{۲} = ۰$ جن سے $ا_{۴} = ۱۲$

$ا_{۵} + ا_{۴} - ا_{۳} = ۰$ جن سے $ا_{۵} = -۱۹$

پس $\frac{۲ + لا}{۱ + لا - لا^{۲}} = ۲ - ۲لا + ۵لا^{۲} - ۷لا^{۳} + ۱۲لا^{۴} - ۱۹لا^{۵} + \dots$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر ن اور ر مثبت صحیح اعداد ہوں تو

$$ن^{ر} - ن(ن-۱)^{ر} + \frac{ن(ن-۱)}{\underline{|۲}}(ن-۲)^{ر} - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\underline{|۳}}(ن-۳)^{ر} + \dots$$

صفر کے مساوی ہوگا اگر ر چھوٹا ہو ن سے اور $\underline{|ن}$ کے مساوی ہوگا اگر ر = ن

ظاہر ہے کہ $(ق^{لا} - ۱)^{ن} = \left(لا + \frac{لا^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{لا^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{لا^{۴}}{\underline{|۴}} + \dots\right)^{ن}$

= لاⁿ + لا کی بڑی قوتوں والی رقوم .... (۱)

نیز مسئلہ ثنائی سے

$$(و^{لا}-1)^{ن} = و^{ن لا} - ن و^{(ن-1)لا} + \frac{ن(ن-1)}{\lfloor 2} و^{(ن-2)لا} - \ldots\ldots (2)$$

$و^{ن لا}$، $و^{(ن-1)لا}$ ..... وغیرہ وغیرہ سب رقوم کو پھیلا کر ہم دیکھتے ہیں کہ (۲) میں $لا^{ر}$ کا سر

$$\frac{ن^{ر}}{\lfloor ر} - ن \frac{(ن-1)^{ر}}{\lfloor ر} + \frac{ن(ن-1)}{\lfloor 2} \times \frac{(ن-2)^{ر}}{\lfloor ر}$$

$$- \left(\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 3}\right) \times \frac{(ن-3)^{ر}}{\lfloor ر} + \ldots\ldots$$ ہے

(۱) اور (۲) میں $لا^{ر}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۳۔ اگر $ا = ا لا + ب لا^{2} + ج لا^{3} + \ldots\ldots$ تو لا کی قیمت ا کی صعودی قوتوں میں $ا^{3}$ والی رقم تک معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $لا = ق ا + ل ا^{2} + ر ا^{3} + \ldots\ldots$

لا کی یہ قیمت دئے ہوئے سلسلہ میں مندرج کرنے سے

$$ا = ا(ق ا + ل ا^{2} + ر ا^{3} + \ldots) + ب(ق ا + ل ا^{2} + ر ا^{3} + \ldots)^{2}$$

$$+ ج(ق ا + ل ا^{2} + ر ا^{3} + \ldots)^{3} + \ldots\ldots$$

ا کی یکساں قوتوں ... کے سروں کو مساوی کرنے سے

$ا ق = 1$　　جس سے $ق = \frac{1}{ا}$

$ا ل + ب ق^۲ = ۰$ جس سے $ل = -\frac{ب}{ا^۲}$

$ا ر + ۲ ب ق ل + ج ق^۳ = ۰$. جس سے $ر = \frac{۲ ب^۲}{ا^۵} - \frac{ج}{ا^۴}$

$ں لا = \frac{ما}{ا} - \frac{ب ما^۲}{ا^۳} + \frac{(۲ب^۲ - اج) ما^۳}{ا^۵} + \ldots\ldots$

سلسلوں کی تقلیب کی ایک مثال ہے۔

صریح۔ ما کے لئے جو سلسلہ اوپر دیا گیا ہے اگر اس کی شکل ذیل ہو

$ما = ک + ا لا + ب لا^۲ + ج لا^۳ + \ldots$

رکھو ما - ک = ی

$ی = ا لا + ب لا^۲ + ج لا^۳ + \ldots$ جس سے لا کو ی یعنی (ما - ک) کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۲۲ (ب)

کے جملات کو لا کی صعودی قوتوں میں $لا^۳$ والی رقم تک پھیلاؤ

$\frac{۱ + ۲ لا}{۱ - لا - لا^۲}$ (۲) $\frac{۱ - ۸ لا}{۱ - لا - ۶ لا^۲}$

$\frac{۱ + لا}{۲ + لا + لا^۲}$ (۴) $\frac{۳ + لا}{۲ - لا - لا^۲}$ (۵) $\frac{۱}{۱ + ا لا - ا لا^۲ - لا^۳}$

اگر $\frac{ا + ب لا}{(۱ - لا)^۲}$ کی تفصیل میں ن ویں رقم $(۳ن - ۲) لا^{ن-۱}$ ہو

ا اور ب کی قیمتیں معلوم کرو۔

۷۔ اگر $\frac{ا + ب لا + ج لا^{2}}{(ا - لا)^{3}}$ کی تفصیل میں لا^{ن} کا سر ن^{2} + ۱ ہو تو ا، ب اور ج کی قیمتیں دریافت کرو۔

۸۔ اگر ما^{2} + ۲ ما = لا (ما + ۱) تو ثابت کرو کہ ما کی ایک قیمت

$$\frac{۱}{۲} لا + \frac{۱}{۸} لا^{2} - \frac{۱}{۱۲۸} لا^{4} + ... ہے۔$$

۹۔ اگر ج لا^{2} + ا لا - ما = ۰ تو ثابت کرو کہ لا کی ایک قیمت

$$\frac{ما}{ا} - \frac{ج ما^{2}}{ا^{3}} + \frac{۳ ج^{2} ما^{5}}{ا^{5}} - \frac{۱۲ ج^{3} ما^{4}}{ا^{7}} + ... ہے$$

اس سے ثابت کرو کہ لا = ۰۰۹۹۹۹۹ء مساوات لا^{3} + ۱۰۰لا - ۱ = ۰ کا ایک تقریبی حل ہے، نیز بتاؤ کہ یہ جواب اعشاریہ کے کس مقام تک درست ہے۔

۱۰۔ اگر (۱ + لا) (۱ + ا لا) (۱ + ا^{2} لا) (۱ + ا^{3} لا) .... میں اجزائے ضربی کی تعداد لا متناہی ہو اور ا < ۱ تو ثابت کرو کہ اس میں لا^{ر} کا سر

$$\frac{۱}{(۱ - ا) (۱ - ا^{2}) (۱ - لا^{3}) .... (۱ - ا^{ر})} ا^{\frac{۱}{۲} ر (ر - ۱)} ہے۔$$

۱۱۔ اگر ا < ۱ تو $\frac{۱}{(۱ - ا لا) (۱ - ا^{2} لا) (۱ - ا^{3} لا) .... تالامتناہی}$ کی تفصیل میں لا^{ن} کا سر دریافت کرو۔

۱۲۔ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

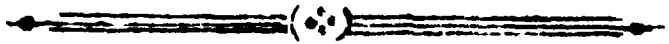
$$(۱)\quad ن^{ن+۱} - ن (ن - ۱)^{ن+۱} + \frac{ن (ن - ۱)}{۲\rfloor} (ن - ۲)^{ن+۱} - ..... = \frac{۱}{۲} ن \lfloor ن + ۱$$

(۲) $\text{ن}^{\text{ن}} - (\text{ن}+1)(\text{ن}-1)^{\text{ن}} + \frac{(\text{ن}+1)\,\text{ن}}{\lfloor 2}(\text{ن}-2)^{\text{ن}} - \ldots\ldots = 1$

ں دونوں سلسلوں میں تعداد رقوم ن ہے اور

(۳) $1^{\text{ن}} - \text{ن}\times 2^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}\,(\text{ن}-1)}{1\times 2}\times 3^{\text{ن}} - \ldots\ldots = (-1)^{\text{ن}}\,\lfloor\text{ن}$

(۴) $(\text{ن}+\text{ق})^{\text{ن}} - \text{ن}\,(\text{ن}+\text{ق}-1)^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2}(\text{ن}+\text{ق}-2)^{\text{ن}} - \ldots = \lfloor\text{ن}$

ں آخر کے دو سلسلوں میں تعدادِ رقوم (ن + ۱) ہے -

تیئسواں باب

جزوی کسور

۳۱۵ – ابتدائی جبر و مقابلہ میں بتایا جا چکا ہے کہ اگر ایسی کسروں کا ایک جٹ دیا ہوا ہو جو **علامات** مثبت اور منفی سے باہم منسلک ہوں تو ان کو ایک سادہ شکل کی واحد کسر میں تحویل کر سکتے ہیں جس کا نسب نما ان کسروں کے نسب نماؤں کے ذو اضعاف اقل کے مساوی ہوتا ہے، بعض اوقات اس عمل کے متضاد عمل کی ضرورت پیش آتی ہے یعنے ایک کسر کو مقابلتہً سادہ یعنی جزوی کسور میں توڑنا پڑتا ہے، مثلاً اگر ہم کسر $\frac{\text{۳ - ۵ لا}}{\text{۱ - ۴ لا + ۳ لا}^{۲}}$ کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلانا چاہیں تو ہم دفعہ ۳۱۴ مشق ۱ کا طریقہ استعمال کرنے سے سلسلہ مطلوبہ کی جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں، لیکن اگر ہم اس سلسلہ کی عام رقم معلوم کرنا چاہیں تو یہ طریقہ کارگر نہیں ہوتا، اس کے لئے نہایت آسان طریقہ یہ ہے کہ کسر مذکور کو دو کسور $\frac{\text{۱}}{\text{۱ - لا}} + \frac{\text{۲}}{\text{۱ - ۳ لا}}$ کی معادل شکل میں تحویل کرلیا جائے۔ اب ہم ان دونوں جملوں یعنی $(\text{۱ - لا})^{-۱}$ اور $(\text{۱ - ۳ لا})^{-۱}$ کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلا سکتے ہیں اور اس بناء پر عام رقم معلوم کر سکتے ہیں۔

۲۱۰- باب ہذا میں ہم کسی منطق کسر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے مسئلہ کی توضیح کے لئے چند مثالیں درج کریں گے۔ اس مضمون پر زیادہ بسیط اور مفصل بحث کے لئے طالب علم سیریٹ کے اعلیٰ الجبرا کا کورس یا احصائے تکملات کی کتابوں کو ملاحظہ کرے ان کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ

(۱) ہر منطق کسر، جزوی کسور کے ایک مجموعہ میں تحلیل کی جاسکتی ہے

(۲) اگر اصلی نسب نما میں کوئی خطی جزو ضربی (لا - ز) کی شکل کا ہو تو اسکے متناظر میں $\frac{ز}{لا - ز}$ کی شکل کی ایک جزوی کسر حاصل ہوتی ہے اور اگر اصلی کسر کے نسب نما میں (لا - ب) کی شکل کے خطی جزو ضربی کی دوسری قوت واقع ہو تو اس کے جواب میں $\frac{ب}{(لا - ب)}$ اور $\frac{ب}{(لا - ب)^۲}$ کو شکل کی دو جزوی کسریں حاصل ہوتی ہیں، اسی طرح اگر (لا - ب) تین بار واقع ہو تو ان دو جزوی کسروں کے علاوہ ایک اور کسر $\frac{ب}{(لا - ب)^۳}$ حاصل ہوتی ہے،

علیٰ ہذا القیاس۔

(۳) اگر اصلی کسر کے نسب نما میں درجہ دوم کا ایک جزو ضربی لا^۲ + ن لا + ق کی شکل کا ہو تو اس کے جواب میں $\frac{ن لا + ق}{لا^۲ + ن لا + ق}$ کی شکل کی ایک جزوی کسر حاصل ہوتی ہے اور اگر ابتدائی کسر کے نسب نما میں جزو ضربی لا^۲ + ن لا + ق کی دوسری قوت واقع ہو تو اس کے علاوہ $\frac{ن لا + ق}{(لا^۲ + ن لا + ق)^۲}$ کی شکل کی ایک اور

جزوی کسر حاصل ہوتی ہے۔ علیٰ ہذا القیاس
یہاں مقادیر اَ، بَ، بً..... نَ، قَ، نً، قً
میں سے کوئی مقدار بھی لا کا تفاعل نہیں ہے۔
ہم اِن نتائج کو ذیل کی مثالوں میں استعمال کرینگے۔

مثال ۱۔ $\frac{\text{۵لا} - ۱۱}{\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} - ۶}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو۔

چونکہ نسب نما ۲لا² + لا - ۶ = (لا + ۲) (۲لا - ۳) اس لئے ہم جائز طور پر فرض کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{۵لا} - ۱۱}{\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} - ۶} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} + ۲} + \frac{\text{ب}}{\text{۲لا} - ۳}$$

جہاں مقادیر ا اور ب، لا کے تابع نہیں ہیں اور اِن کی قیمتیں معلوم کرنا مطلوب ہے۔ کسروں کو صاف کرنے سے

$$\text{۵لا} - ۱۱ = \text{ا}(\text{۲لا} - ۳) + \text{ب}(\text{لا} + ۲)$$

چونکہ یہ مساوات متماثل طور پر درست ہے اس لئے ہم لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے

$$\text{۲ا} + \text{ب} = ۵$$
$$-\text{۳ا} + \text{۲ب} = -۱۱$$

جس سے ا = ۳، ب = -۱

$$\therefore \frac{\text{۵لا} - ۱۱}{\text{۲لا}^{۲} + \text{لا} - ۶} = \frac{۳}{\text{لا} + ۲} - \frac{۱}{\text{۲لا} - ۳}$$

مثال ۲۔ $\frac{\text{م لا} + \text{ن}}{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} + \text{ب})}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو

فرض کرو کہ $\frac{\text{م لا} + \text{ن}}{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{\text{اَ}}{\text{لا} - \text{ا}} + \frac{\text{بَ}}{\text{لا} + \text{ب}}$

∴ م لا + ن = اَ (لا + ب) + بَ (لا − ا) ......(۱)

اب ہم سروں کو مساوی کرنے سے اَ اور بَ کی قیمتیں معلوم کرسکتے ہیں لیکن حسب ذیل طریق پر عمل کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے
چونکہ اَ اور بَ، لا کے تابع نہیں ہیں، اس لئے ہم لا کو جو قیمت چاہیں دے سکتے ہیں

(۱) میں رکھو لا − ا = ۰ یعنی لا = ا، تب

$$\text{اَ} = \frac{\text{م ا + ن}}{\text{ا + ب}}$$

اب رکھو لا + ب = ۰ یعنی لا = − ب تب

$$\text{بَ} = \frac{\text{م ب − ن}}{\text{ا + ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{م لا + ن}}{(\text{لا − ا})(\text{لا + ب})} = \frac{1}{\text{ا + ب}}\left(\frac{\text{م ا + ن}}{\text{لا − ا}} + \frac{\text{م ب − ن}}{\text{لا + ب}}\right)$$

مثال ۳۔ $\frac{\text{۲۳ لا − ۱۱ لا}^2}{(\text{۲ لا − ۱})(\text{۹ − لا}^2)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرو۔

فرض کرو کہ

$$\frac{\text{۲۳ لا − ۱۱ لا}^2}{(\text{۲ لا − ۱})(\text{۳ + لا})(\text{۳ − لا})} = \frac{\text{ا}}{\text{۲ لا − ۱}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا + ۳}} + \frac{\text{ج}}{\text{۳ − لا}} \quad ....(1)$$

∴ ۲۳ لا − ۱۱ لا² = ا (۳ + لا)(۳ − لا) + ب (۲ لا − ۱)(۳ − لا)
+ ج (۲ لا − ۱)(۳ + لا)

بالترتیب ۲ لا − ۱ = ۰، ۳ + لا = ۰، ۳ − لا = ۰ رکھنے سے

ا = ۱، ب = ۴، ج = − ۱

$$\therefore \frac{۲۳\text{لا} - ۱۱\text{لا}^{۲}}{(۲\text{لا}-۱)(۹-\text{لا}^{۲})} = \frac{۱}{۲\text{لا}-۱} + \frac{۴}{۳+\text{لا}} - \frac{۱}{۳-\text{لا}}$$

مثال ۴۔ $\frac{۳\text{لا}^{۲}+\text{لا}-۲}{(\text{لا}-۲)^{۲}(۱-۲\text{لا})}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کر…

فرض کرو کہ $\frac{۳\text{لا}^{۲}+\text{لا}-۲}{(\text{لا}-۲)^{۲}(۱-۲\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{۱-۲\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}-۲} + \frac{…}{(\text{لا}…}$

$\therefore ۳\text{لا}^{۲}+\text{لا}-۲ = \text{ا}(\text{لا}-۲)^{۲} + \text{ب}(۱-۲\text{لا})(\text{لا}-۲) + \text{ج}(۱-…$

اب رکھو $۱-۲\text{لا}=۰$، تب $\text{ا} = -\frac{۱}{۳}$

$\text{لا}-۲=۰$ رکھنے سے $\text{ج} = -۴$

ب کی قیمت معلوم کرنے کے لئے $\text{لا}^{۲}$ کے سروں کو مساوی کر…
اس طرح

$۳ = \text{ا} - ۲\text{ب}$ جس سے $\text{ب} = -\frac{۵}{۳}$

$$\therefore \frac{۳\text{لا}^{۲}+\text{لا}-۲}{(\text{لا}-۲)^{۲}(۱-۲\text{لا})} = -\frac{۱}{۳(۱-۲\text{لا})} - \frac{۵}{۳(\text{لا}-۲)} - \frac{۴}{(\text{لا}-۲…}$$

مثال ۵۔ $\frac{۴۲-۱۹\text{لا}}{(\text{لا}^{۲}+۱)(\text{لا}-۴)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو

فرض کرو کہ $\frac{۴۲-۱۹\text{لا}}{(\text{لا}^{۲}+۱)(\text{لا}-۴)} = \frac{\text{ا}\text{لا}+\text{ب}}{\text{لا}^{۲}+۱} + \frac{\text{ج}}{\text{لا}-۴}$

$\therefore ۴۲-۱۹\text{لا} = (\text{ا}\text{لا}+\text{ب})(\text{لا}-۴) + \text{ج}(\text{لا}^{۲}+۱)$

فرض کرو کہ $\text{لا}=۴$، تب $\text{ج}=-۲$

$\text{لا}^{۲}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے

$٠ = ا + ج$ اور $ا = ٢$

مطلق رقموں کو مساوی رکھنے سے

$٢٢ = -٢ ب + ج$ اور $ب = -١١$

$$\therefore \frac{٢٠ - ١٩ لا}{(لا^٢+١)(لا-٢)} = \frac{٢ لا - ١}{لا^٢ + ١} - \frac{٢}{لا - ٢}$$

۳۱۷ - ذیل کی مثال میں جو حکمت عملی استعمال کی گئی ہے وہ بھی اکثر اوقات مفید ثابت ہوتی ہے۔

مثال - $\frac{٩ لا^٣ - ٢٤ لا^٢ + ٤٨ لا}{(لا-٢)^٤ (لا+١)}$ کو اس کی جزوی کسروں میں تحلیل کرو۔

$$\frac{٩ لا^٣ - ٢٤ لا^٢ + ٤٨ لا}{(لا-٢)^٤ (لا+١)} = \frac{ا}{لا+١} + \frac{ف(لا)}{(لا-٢)^٤}$$

جہاں ا کوئی مستقل مقدار ہے اور ف (لا) لا کا کوئی تفاعل ہے اور ان کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہے۔

$$\therefore ٩ لا^٣ - ٢٤ لا^٢ + ٤٨ لا = ا (لا-٢)^٤ + (لا+١) ف(لا)$$

فرض کرو کہ لا = -۱، تب ا = -١ تب ا کی قیمت درج کرنے اور عمل نقل سے

$$(لا+١) ف(لا) = (لا-٢)^٤ + ٩ لا^٣ - ٢٤ لا^٢ + ٤٨ لا$$

$$= لا^٤ + لا^٣ + ١٢ لا + ١٢$$

$$\therefore ف(لا) = لا^٣ + ١٢$$

$\frac{لا^{۳}+۱۶}{(لا-۲)^{۴}}$ کے متناظر جو جزوی کسور ہیں انہیں معلوم کرنیکے لئے

$لا-۲=ی$ رکھو

تب $$\frac{لا^{۳}+۱۶}{(لا-۲)^{۴}}=\frac{(ی+۲)^{۳}+۱۶}{ی^{۴}}=\frac{ی^{۳}+۶ی^{۲}+۱۲ی+۲۴}{ی^{۴}}$$

$$=\frac{۱}{ی}+\frac{۶}{ی^{۲}}+\frac{۱۲}{ی^{۳}}+\frac{۲۴}{ی^{۴}}$$

$$=\frac{۱}{لا-۲}+\frac{۶}{(لا-۲)^{۲}}+\frac{۱۲}{(لا-۲)^{۳}}+\frac{۲۴}{(لا-۲)^{۴}}$$

$$\therefore \frac{۹لا^{۳}-۲۴لا^{۲}+۴۸لا}{(لا-۲)^{۴}(لا+۱)}=-\frac{۱}{لا+۱}+\frac{۱}{لا-۲}+\frac{۶}{(لا-۲)^{۲}}+\frac{۱۲}{(لا-۲)^{۳}}+\frac{۲۴}{(لا-۲)^{۴}}$$

۳۱۸ـ اب تک جو مثالیں حل کی گئی ہیں اُن سب میں شمار کنندہ کا بُعد نسب نما کے بُعد سے کم تھا۔ اگر ایسا نہ ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کرلینا چاہیئے حتیٰ کہ جو باقی حاصل ہو اُسکا بُعد نسب نما کے بُعد سے کم ہو۔

مثال۔ $\frac{۶لا^{۳}+۵لا^{۲}-۷}{۳لا^{۲}-۲لا-۱}$ کو اس کی جزوی کسروں میں تحلیل کر

تقسیم کرنے سے $$\frac{۶لا^{۳}+۵لا^{۲}-۷}{۳لا^{۲}-۲لا-۱}=۲لا+۳+\frac{۸لا-۴}{۳لا^{۲}-۲لا-۱}$$

اور $$\frac{۸لا-۴}{۳لا^{۲}-۲لا-۱}=\frac{۵}{۳لا+۱}+\frac{۱}{لا-۱}$$

$$\therefore \frac{6\text{لا}^3+5\text{لا}^2-7}{3\text{لا}^2-2\text{لا}-1} = 2\text{لا}+3+\frac{5}{3\text{لا}+1}+\frac{1}{\text{لا}-1}$$

۳۱۹۔ اب ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح جزوی کسور میں تحلیل کرنے سے کسی منطق کسر کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلایا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر $\frac{3\text{لا}^2+\text{لا}-2}{(\text{لا}-2)^2(1-2\text{لا})}$ کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلایا جائے تو تفصیل کی عام رقم معلوم کرو۔

دفعہ ۳۱۲ کی مثال ۴ کی رُو سے

$$\frac{3\text{لا}^2+\text{لا}-2}{(\text{لا}-2)^2(1-2\text{لا})} = -\frac{1}{3(1-2\text{لا})}-\frac{5}{3(\text{لا}-2)}+\frac{4}{(\text{لا}-2)^2}$$

$$= -\frac{1}{3(1-2\text{لا})}+\frac{5}{3(2-\text{لا})}+\frac{4}{(2-\text{لا})^2}$$

$$= -\frac{1}{3}(1-2\text{لا})^{-1}+\frac{5}{6}\left(1-\frac{\text{لا}}{2}\right)^{-1}+\left(1-\frac{\text{لا}}{2}\right)^{-2}$$

پس تفصیل کی عام رقم

$$\left(-\frac{2^{\text{ر}}}{3}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{2^{\text{ر}}}+\frac{\text{ر}+1}{2^{\text{ر}}}\right)\text{لا}^{\text{ر}}$$

ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{7+\text{لا}}{(1+\text{لا})(1+\text{لا}^2)}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ اور تفصیل کی عام رقم معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{7+\text{لا}}{(1+\text{لا})(1+\text{لا}^2)} = \frac{\text{ا}}{(1+\text{لا})}+\frac{\text{ب لا}+\text{ج}}{1+\text{لا}^2}$

$$\therefore 7+\text{لا} = \text{ا}(1+\text{لا}^2)+(\text{ب لا}+\text{ج})(1+\text{لا})$$

۱ + لا = ۰ رکھو، تب ا = ۳

رقوم مطلق کو مساوی کرنے سے ۷ = ا + ج جس سے ج = ۴

لا کے سروں کو مساوی کرنے سے ۰ = ا + ب جس سے ب = -۳

$$\therefore \frac{\text{۷ + لا}}{\text{(۱+لا)(۱+لا}^{\text{۲}}\text{)}} = \frac{\text{۳}}{\text{۱ + لا}} + \frac{\text{۴ - ۳لا}}{\text{۱ + لا}^{\text{۲}}}$$

$$= \text{۳(۱+لا)}^{\text{-۱}} + \text{(۴-۳لا)(۱+لا}^{\text{۲}}\text{)}^{\text{-۱}}$$

$$= \text{۳}\left\{\text{۱ - لا + لا}^{\text{۲}} \text{ - ... + (-۱)}^{\text{ی}}\text{ لا}^{\text{ی}} \text{ + ...}\right\}$$

$$+ \text{(۴-۳لا)}\left\{\text{۱ - لا}^{\text{۲}} \text{ + لا}^{\text{۴}} \text{ - ... (-۱)}^{\text{ق}}\text{ لا}^{\text{۲ق}} \text{ + ...}\right\}$$

لا$^{\text{ر}}$ کا سر اسطرح معلوم کرو۔

(۱) اگر ر جفت ہو تو دوسرے سلسلہ میں لا$^{\text{ر}}$ کا سر ۴(-۱)$^{\text{ر/۲}}$ ہے

اس لئے تفصیل میں لا$^{\text{ر}}$ کا سر ۳ + ۴ (-۱)$^{\text{ر/۲}}$ ہے

(۲) اگر ر طاق ہو تو دوسرے سلسلہ میں لا$^{\text{ر}}$ کا سر -۳(-۱)$^{\text{(ر-۱)/۲}}$ ہے، پس تفصیل میں مطلوبہ سر ۳ (-۱)$^{\text{(ر+۱)/۲}}$ - ۳ ہے۔

امثلہ نمبری ۲۳

جزوی کسور میں تحلیل کرو۔

(۱) $\frac{\text{۷ لا - ۱}}{\text{۱ - ۵ لا + ۶ لا}^{\text{۲}}}$ (۲) $\frac{\text{۴۶ + ۱۳ لا}}{\text{۱۲ لا}^{\text{۲}}\text{ - ۱۱ لا - ۱۵}}$

(۳) $\frac{\text{۱ + ۳ لا + ۲ لا}^{\text{۲}}}{\text{(۱-۲لا)(۱-لا}^{\text{۲}}\text{)}}$ (۴) $\frac{\text{لا}^{\text{۲}}\text{ - ۱۰ لا + ۱۳}}{\text{(۱-لا)(لا}^{\text{۲}}\text{-۵لا+۶)}}$

(۵) $\frac{۲\text{لا}^۳ + \text{لا}^۲ - \text{لا} - ۳}{\text{لا}(\text{لا} - ۱)(۲\text{لا} + ۳)}$　　(۶) $\frac{۹}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا} + ۲)^۲}$

(۷) $\frac{\text{لا}^۴ - ۳\text{لا}^۳ - ۳\text{لا}^۲ + ۱۰}{(\text{لا} + ۱)^۲(\text{لا} - ۳)}$　　(۸) $\frac{۲۶\text{لا}^۲ + ۲۰۸\text{لا}}{(\text{لا}^۲ + ۱)(\text{لا} + ۵)}$

(۹) $\frac{۲\text{لا}^۲ - ۱۱\text{لا} + ۵}{(\text{لا} - ۳)(\text{لا}^۲ + ۲\text{لا} - ۵)}$　　(۱۰) $\frac{۳\text{لا}^۳ - ۸\text{لا}^۲ + ۱۰}{(\text{لا} - ۱)^۴}$

(۱۱) $\frac{۵\text{لا}^۳ + ۶\text{لا}^۲ + ۵\text{لا}}{(\text{لا}^۲ - ۱)(\text{لا} + ۱)^۳}$

اگر ذیل کے جملات کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو تفصیل کی عام رقم دریافت کرو

(۱۲) $\frac{۱ + ۳\text{لا}}{۱ + ۱۱\text{لا} + ۲۸\text{لا}^۲}$　　(۱۳) $\frac{۵\text{لا} + ۲}{(۱ - \text{لا})(۲ + \text{لا})}$

(۱۴) $\frac{\text{لا}^۲ + ۷\text{لا} + ۳}{\text{لا}^۲ + ۷\text{لا} + ۱۰}$　　(۱۵) $\frac{۲\text{لا} - ۴}{(۱ - \text{لا}^۲)(۱ - ۲\text{لا})}$

(۱۶) $\frac{۴ + ۳\text{لا} + ۲\text{لا}^۲}{(۱ - \text{لا})(۱ + \text{لا} - ۲\text{لا}^۲)}$　　(۱۷) $\frac{۳ + ۲\text{لا} - \text{لا}^۲}{(۱ + \text{لا})(۱ - ۴\text{لا})^۲}$

(۱۸) $\frac{۴ + ۷\text{لا}}{(۲ + ۳\text{لا})(۱ + \text{لا})^۲}$　　(۱۹) $\frac{۲\text{لا} + ۱}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا}^۲ + ۱)}$

(۲۰) $\frac{۱ - \text{لا} + ۲\text{لا}^۲}{(۱ + \text{لا})^۳}$　　(۲۱) $\frac{۱}{(۱ - \text{ا لا})(۱ - \text{ب لا})(۱ - \text{ج لا})}$

(۲۲) $$\frac{۳ - ۲\,\text{لا}^{۲}}{(۲ - ۲\,\text{لا} + \text{لا}^{۲})^{۲}}$$

(۲۳) سلاسل ذیل کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو

(۱) $$\frac{۱}{(۱+\text{لا})(۱+\text{لا}^{۲})} + \frac{\text{لا}}{(۱+\text{لا}^{۲})(۱+\text{لا}^{۳})} + \frac{\text{لا}^{۲}}{(۱+\text{لا}^{۳})(۱+\text{لا}^{۴})} + \cdots$$

(۲) $$\frac{\text{لا}(۱-\text{ا}\,\text{لا})}{(۱+\text{لا})(۱+\text{ا}\,\text{لا})(۱+\text{ا}^{۲}\text{لا})} + \frac{\text{ا}\,\text{لا}(۱-\text{ا}^{۲}\text{لا})}{(۱+\text{ا}\,\text{لا})(۱+\text{ا}^{۲}\text{لا})(۱+\text{ا}^{۳}\text{لا})} + \cdots$$

(۲۴) ذیل کے لامتناہی سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کرو جبکہ $\text{لا} < ۱$

$$\frac{۱}{(۱-\text{لا})(۱-\text{لا}^{۳})} + \frac{\text{لا}^{۲}}{(۱-\text{لا}^{۳})(۱+\text{لا}^{۵})} + \frac{\text{لا}^{۴}}{(۱-\text{لا}^{۵})(۱-\text{لا}^{۷})} + \cdots$$

(۲۵) اُس سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو جبکی ق ویں رقم

$$\frac{\text{لا}^{\text{ق}}(۱+\text{لا}^{\text{ق}+۱})}{(۱-\text{لا}^{\text{ق}})(۱-\text{لا}^{\text{ق}+۱})(۱-\text{لا}^{\text{ق}+۲})}$$ ہے

۲۶۔ ثابت کرو کہ حروف ا، ب، ج اور اُن کی قوتوں سے ن ابعاد کے جو مختلف متجانس حاصل ضرب بن سکتے ہیں اُن کا مجموعہ

$$\frac{\text{ا}^{\text{ن}+۲}(\text{ب}-\text{ج}) + \text{ب}^{\text{ن}+۲}(\text{ج}-\text{ا}) + \text{ج}^{\text{ن}+۲}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{ا}^{۲}(\text{ب}-\text{ج}) + \text{ب}^{۲}(\text{ج}-\text{ا}) + \text{ج}^{۲}(\text{ا}-\text{ب})}$$

ہے۔

چوبیسواں باب

متوالی سلسلے

۳۲۰ - اگر ایک سلسلہ $ع_۰ + ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \ldots$ ایسا ہو کہ اس میں کسی مقررہ رقم سے اس کے بعد کی ہر ایک رقم رقوم ماقبل کی ایک خاص تعداد کو کسی مستقل مقادیر سے بالترتیب ضرب دیکر ان حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہو تو اس کو متوالی سلسلہ کہتے ہیں۔

۳۲۱ - سلسلہ $۱ + ۲لا + ۳لا^۲ + ۴لا^۳ + ۵لا^۴ + \ldots$ میں دوسری رقم کے بعد ہر ایک رقم دو رقوم ماقبل کو بالترتیب مستقلات $۲لا$ اور $-لا^۲$ سے ضرب دیکر حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے، ان مقادیر کو مستقل اس لئے کہا گیا ہے کیونکہ یہ ن کی ہر قیمت کے لئے وہی رہتی ہیں مثلاً

$$۵لا^۴ = ۲لا \times ۴لا^۳ + (-لا^۲) \times ۳لا^۲$$

$$\text{یعنی} \quad ع_۴ = ۲لا\, ع_۳ - لا^۲\, ع_۲$$

عام طور پہ جب ن ایک سے بڑا ہو تو ہر ایک رقم اپنے عین پہلے کی دو رقوم کے ساتھ مساوات

$$ع_ن = ۲لا\, ع_{ن-۱} - لا^۲\, ع_{ن-۲}$$

$$\text{یا} \quad ع_ن - ۲لا\, ع_{ن-۱} + لا^۲\, ع_{ن-۲} = ۰$$

سے معلوم ہوتی ہے۔

اس مساوات میں $ع_ن$ ، $ع_{ن-۱}$ ، $ع_{ن-۲}$ کے سر مع اپنی علامت کے "ربط کا پیمانہ" کہلاتے ہیں۔

پس سلسلہ $۱ + ۲ لا + ۳ لا^۲ + ۴ لا^۳ + ۵ لا^۴ + ...$

ایک متوالی سلسلہ ہے جس میں ربط کا پیمانہ یہ ہے

$$۱ - ۲ لا + لا^۲$$

۳۲۲۔ جب کسی سلسلہ کے ربط کا پیمانہ دیا ہوا ہو تو کسی ہر ایک رقم معلوم ہو سکتی ہے بشرطیکہ رقم مطلوبہ سے پہلے رقموں کی کافی تعداد معلوم ہو۔ چونکہ عمل کا طریقہ ایک ہے خواہ ربط کا پیمانہ کتنی ہی رقوم پر مشتمل ہو اس لئے ذیل کی مثال کافی ہوگی۔

اگر سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ا_۳ لا^۳ + ...$

میں ربط کا پیمانہ $۱ - ق لا - ل لا^۲ - ر لا^۳$ ہو تو ظاہر ہے

$$ا_ن لا^ن = ق لا \times ا_{ن-۱} لا^{ن-۱} + ل لا^۲ \times ا_{ن-۲} لا^{ن-۲} + ر لا ...$$

$$یعنی\ ا_ن = ق ا_{ن-۱} + ل ا_{ن-۲} + ر ا_{ن-۳}$$

پس کسی رقم کا سر معلوم ہو سکتا ہے بشرطیکہ اس سے پہلے تین رقوم کے سر معلوم ہوں۔

۳۲۳۔ برعکس اس کے اگر ایک سلسلہ کی رقوم کی کافی تعداد دی ہوئی ہو تو اسکے ربط کا پیمانہ دریافت ہو سکتا ہے۔

مثال۔ متوالی سلسلے

۲ + ۵لا + ۱۳لا^{۲} + ۳۵لا^{۳} + ...

کے ربط کا پیمانہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ربط کا پیمانہ

۱ - ق لا - ل لا^{۲} ہے

تب ق اور ل کی قیمتیں ذیل کی مساواتوں سے معلوم ہوتی ہیں

۱۳ - ۵ق - ۲ل = ۰ اور ۳۵ - ۱۳ق - ۵ل = ۰

ان سے ق = ۵ اور ل = -۶، پس مطلوبہ ربط کا پیمانہ

۱ - ۵لا + ۶لا^{۲} ہے۔

۳۲۴۔ اگر ربط کا پیمانہ ۳ رقوم پر مشتمل ہو تو اس میں دو مستقل مقداریں ق اور ل ہونگی ان دو مقادیر ق اور ل کو معلوم کرنیکے لئے کم از کم دو مساواتیں ہونی چاہئیں۔ پہلی مساوات معلوم کرنیکے لئے ہمیں سلسلہ کی تین رقوم معلوم ہونا ضروری ہے اور دوسری مساوات بنانے کے لئے ان کے علاوہ ایک اور رقم کے معلوم ہونیکی ضرورت ہے، پس ظاہر ہے کہ اگر ہمیں ایک ایسا ربط کا پیمانہ معلوم کرنا ہو جو دو مستقل مقادیر پر مشتمل ہو تو ہمیں سلسلہ کی کم از کم چار رقمیں معلوم ہونی چاہئیں۔

اگر ربط کا پیمانہ ۱ - ق لا - ل لا^{۲} - ر لا^{۳} ہو تو تین مستقلات کو معلوم کرنے کے لئے تین مساواتوں کی ضرورت ہے، پہلی مساوات بنانے کے لئے ہمیں سلسلہ کی کم از کم ۴ رقمیں معلوم ہونی چاہئیں باقی دو مساواتیں معلوم کرنے کے لئے دو اور رقمیں معلوم ہونی چاہئیں، پس ایک ایسا ربط کا پیمانہ معلوم کرنے کے لئے جس میں ۳ مستقلات ہوں سلسلہ کی کم از کم چھ رقوم کا معلوم ہونا ضروری ہے۔

بالعموم ایک ایسا ربط کا پیمانہ معلوم کرنیکے لئے جو م مستقلات پر

مشتمل ہوتے ہیں کم از کم ۲م مسلسل رقوم معلوم ہونی چا
برعکس اس کے اگر ۲م مسلسل رقوم دی ہوئی ہوں تو
کا پیمانہ حسب ذیل فرض کر سکتے ہیں

$$\text{۱} - \text{ق}_1\,\text{لا} - \text{ق}_2\,\text{لا}^2 - \text{ق}_3\,\text{لا}^3 - \text{ق}_4\,\text{لا}^4 \ldots - \text{ق}_\text{م}\,\text{لا}^\text{م}$$

۲۷۵ — متوالی سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع مع
خواہ ربط کا پیمانہ کچھ ہی ہو، حاصل جمع معلوم کرنے کا طر
ہر حالت میں وہی ہے سہولت کی خاطر ہم فرض کرتے ہیں
اس میں صرف دو مستقل مقادیر شامل ہیں۔
فرض کرو کہ سلسلہ

$$\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \text{ا}_3\,\text{لا}^3 + \ldots\ldots \quad (1)$$

ہے اور اس کا حاصل جمع $\text{ج}_\text{ن}$ ہے، نیز فرض کرو کہ ربط کا پیما
$\text{۱} - \text{ق لا} - \text{ل لا}^2$ ہے۔ پس ن کی ہر قیمت کے لئے جو ایک سے

$$\text{ا}_\text{ن} - \text{ق}\,\text{ا}_{\text{ن}-1} - \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-2} = 0$$

$$\text{اب}\quad \text{ج}_\text{ن} = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \ldots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}$$

$$-\text{ق لا ج}_\text{ن} = \quad -\text{ق}\,\text{ا}_0\,\text{لا} - \text{ق}\,\text{ا}_1\,\text{لا}^2 - \ldots\ldots - \text{ق}\,\text{ا}_{\text{ن}-2}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} - \text{ق}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}$$

$$-\text{ل لا}^2\,\text{ج}_\text{ن} = \quad -\text{ل}\,\text{ا}_0\,\text{لا}^2 - \ldots\ldots - \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-3}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} - \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-2}\,\text{لا}$$

$$\therefore\ (\text{۱} - \text{ق لا} - \text{ل لا}^2)\,\text{ج}_\text{ن} = \text{ا}_0 + (\text{ا}_1 - \text{ق}\,\text{ا}_0)\,\text{لا} - (\text{ق}\,\text{ا}_{\text{ن}-1} + \text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-2}$$

$$-\text{ل}\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

کیونکہ ربط $\text{ر}_\text{ن} - \text{ق}\,\text{ر}_{\text{ن}-1} - \text{ل}\,\text{ر}_{\text{ن}-2} = 0$ کی بدولت لا کی باقی سب قوتوں کے سر صفر ہیں

$$\text{ج}_\text{ن} = \frac{\text{ر}_0 + (\text{ر}_1 - \text{ق}\,\text{ر}_0)\,\text{لا}}{1 - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^2} - \frac{(\text{ق}\,\text{ر}_{\text{ن}-1} + \text{ل}\,\text{ر}_{\text{ن}-2})\,\text{لا}^\text{ن} + \text{ل}\,\text{ر}_{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}+1}}{1 - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^2}$$

پس اس متوالی سلسلہ کا حاصل جمع ایک ایسی کسر ہے جس کا نسب نما ربط کا پیمانہ ہے۔

۳۲۶ - دفعہ ماقبل کے جواب میں اگر دوسری کسر لا انتہا چھوٹی ہو جائے جب ن لا انتہا بڑھ جائے تو رقوم کی لا متناہی تعداد کا حاصل جمع

$$\frac{\text{ر}_0 + (\text{ر}_1 - \text{ق}\,\text{ر}_0)\,\text{لا}}{1 - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^2}$$ ہو جاتا ہے۔

اگر ہم اس کسر کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلائیں جیسا کہ دفعہ ۳۱۴ میں بتایا گیا ہے تو ہم اوپر کے سلسلہ کی جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں اس بنا پر جملہ

$$\frac{\text{ر}_0 + (\text{ر}_1 - \text{ق}\,\text{ر}_0)\,\text{لا}}{1 - \text{ق}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{لا}^2}$$

کو سلسلہ بالا کا تکوینی تفاعل کہتے ہیں۔

۳۲۷ - دفعہ ۳۲۵ کے نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ا_٠ + (ا_١ - ق ا_٠) لا}{١ - ق لا - ل لا^٢} = ا_٠ + ا_١ لا + ا_٢ لا^٢ + \cdots + ا_{ن-١} لا^{ن-١}$$

$$+ \frac{(ق ا_{ن-١} + ل ا_{ن-٢}) لا^ن + ل ا_{ن-١} لا^{ن+١}}{١ - ق لا - ل لا^٢}$$

اس سے ظاہر ہے کہ اگرچہ تکوینی تفاعل

$$\frac{ا_٠ + (ا_١ - ق ا_٠) لا}{١ - ق لا - ل لا^٢}$$

سے ہم سلسلہ بالا کی جتنی رقوم چاہیں حاصل کر سکتے ہیں تاہم سلسلہ

$$ا_٠ + ا_١ لا + ا_٢ لا^٢ + ا_٣ لا^٣ + \cdots\cdots$$

کا حقیقی معادل تصور کرنا اسی صورت میں روا اور جائز ہو

$$\text{ہے جبکہ باقی}\quad \frac{(ق ا_{ن-١} + ل ا_{ن-٢}) لا^ن + ل ا_{ن-١} لا^{ن+١}}{١ - ق لا - ل لا^٢}$$

ن کے لامتناہی ہو جانے سے معدوم ہو جائے یعنی اگر سلسلہ

۳۲۸ ـ جب تکوینی تفاعل کو جزوی کسور کے ایک جٹ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکے تو متوالی سلسلہ کی عام رقم آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے، مثلاً فرض کرو کہ تکوینی تفاعل کو جزوی کسور

$$\frac{ا}{١ - ا لا} + \frac{ب}{١ + ب لا} + \frac{ج}{(١ - ج لا)^٢}$$

میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، تب عام رقم

$$\{ ا ا^ر + (-١)^ر ب ب^ر + (ر+١) ج ج^ر \} لا^ر$$

ہوگی' اس صورت میں ن رقوم کا حاصل جمع دفعہ ۳۲۵ کے طریقہ سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال۔ متوالی سلسلہ

ا ـ ۷لا ـ لا^۲ ـ ۴۳ لا^۳ ـ ....

کا تکوینی تفاعل' عام رقم' اور اس کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ربط کا پیمانہ ۱ ـ ق لا ـ ل لا^۲ ہے' تب

-۱ = -۷ ق + ل ، -۴۳ = - ق - ۷ ل ،

جس سے ق = ۱ ، ل = ۶ اور ربط کا پیمانہ ۱ ـ لا ـ ۶ لا^۲ ہے

فرض کرو کہ سلسلہ کا حاصل جمع ج ہے' تب

ج = ۱ ـ ۷ لا ـ لا^۲ ـ ۴۳ لا^۳ ـ .....

ـ لا ج = ـ لا + ۷ لا^۲ + لا^۳ + ...

ـ ۶ لا^۲ ج = ـ ۶ لا^۲ + ۴۲ لا^۳ + ...

∴ (۱ ـ لا ـ ۶ لا^۲) ج = ۱ ـ ۸ لا

ج = (۱ ـ ۸ لا) / (۱ ـ لا ـ ۶ لا^۲)

جو تکوینی تفاعل ہے۔

اگر ہم (۱ ـ ۸ لا) / (۱ ـ لا ـ ۶ لا^۲) کو اسکی جزوی کسور میں تحلیل کریں تو ہمیں

جزوی کسور ۲ / (۱ + ۲ لا) ـ ۱ / (۱ ـ ۳ لا) حاصل ہوتی ہیں' جن سے

(ر + ۱) ویں رقم یا عام رقم {(-۱)^ر ۲^(ر+۱) ـ ۳^ر} لا^ر حاصل ہوتی ہے

ر کو بالترتیب ۰ ' ۱ ' ۲ ' ۳ ' ..... ' ن ـ ۱ کے مساوی رکھنے سے

ن رقموں کا حاصل جمع

= {۲ ـ ۲^۲ لا + ۲^۳ لا^۲ ـ ۲^۴ لا^۳ ...... + (-۱)^(ن-۱) ۲^ن لا^(ن-۱)}

$$-(1+2\text{لا}+3^2\text{لا}^2+\ldots\ldots+3^{\text{ن}-1}\text{لا}^{\text{ن}-1})$$

$$=\frac{2+(-1)^{\text{ن}-1}2^{\text{ن}+1}\text{لا}^{\text{ن}}}{1+2\text{لا}}-\frac{1-3^{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}}}{1-3\text{لا}}$$

۳۲۹۔ اگر متوالی سلسلہ $ا_0+ا_1+ا_2+\ldots\ldots$ کی عام رقم ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرنا مقصود ہو تو اس کے لئے $ا_0+ا_1\text{لا}+ا_2\text{لا}^2+\ldots\ldots$ کا حاصل جمع اور عام رقم معلوم کر جائے، نتیجہ میں لا = ۱ رکھنے سے مجموعہ مطلوبہ حاصل ہوگا

مثال۔ سلسلہ $1+6+24+84+\ldots\ldots$ کی عام رقم ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ $1+6\text{لا}+24\text{لا}^2+84\text{لا}^3+\ldots\ldots$ کے ربط کا پ

$1-5\text{لا}+6\text{لا}^2$ ہے اور تکوینی تفاعل $\frac{1+\text{لا}}{1-5\text{لا}+6\text{لا}^2}$ ہے

یہ جملہ ذیل کی دو جزوی کسور میں تحلیل ہو سکتا ہے

$$\frac{4}{1-3\text{لا}}-\frac{3}{1-2\text{لا}}$$

اگر ان جملوں کو لا کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلا تو عام رقم $(4\times3^{\text{ر}}-3\times2^{\text{ر}})\text{لا}^{\text{ر}}$ حاصل ہوتی ہے، پس د ہوئے سلسلہ کی عام رقم $4\times3^{\text{ر}}-3\times2^{\text{ر}}$ ہے اور ن رقموں کا

$2(3^{\text{ن}}-1)-3(2^{\text{ن}}-1)$ ہے۔

۳۳۰۔ طالب علم کو ہم پھر یاد دلا دینا چاہتے ہیں کہ دفعہ ما تکوینی تفاعل سلسلہ

$$1+6\text{لا}+24\text{لا}^2+84\text{لا}^3+\ldots\ldots$$

کا حقیقی معادل تصور نہیں کیا جاسکتا سوائے اُس صورت کے جبکہ لا کی قیمت ایسی ہو کہ اس کے لئے سلسلۂ بالا مستدق ہو، پس اگر لا = ا تو چونکہ سلسلہ صریحاً متبع ہوتا ہے اس لئے تکوینی تفاعل سلسلہ بالا کا حقیقی معادل نہیں ہوگا۔ لیکن

۱ + ۶ + ۲۴ + ۸۴ + ...

کی عام رقم لا کے تابع نہیں اور لا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو یہ عام رقم ہمیشہ سلسلہ

۱ + ۶ لا + ۲۴ لا^{۲} + ۸۴ لا^{۳} + ...

میں لا^{ن} کا سر ہوگی۔ اس لئے ہم اس کو مستدق سلسلہ سمجھ کر اس کی عام رقم حسب معمول معلوم کرتے ہیں اور پھر نتیجہ میں لا = ا رکھ دیتے ہیں۔

امثلہ نمبری ۲۴

ذیل کے سلسلہ کا تکوینی تفاعل اور عام رقم معلوم کرو

(۱) ۱ + ۵ لا + ۹ لا^{۲} + ۱۳ لا^{۳} + ... (۲) ۲ − لا + ۵ لا^{۲} − ۷ لا^{۳} + ...

(۳) ۲ + ۳ لا + ۵ لا^{۲} + ۹ لا^{۳} + ... (۴) ۷ − ۶ لا + ۹ لا^{۲} + ۲۷ لا^{۴} + ...

(۵) ۳ + ۶ لا + ۱۴ لا^{۲} + ۳۶ لا^{۳} + ۹۸ لا^{۴} + ۲۷۶ لا^{۵} + ...

ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو

(۶) ۲ + ۵ + ۱۳ + ۳۵ + ... (۷) − ۱ + ۶ لا^{۲} + ۳۰ لا^{۳} + ...

(۸) ۲ + ۷ لا + ۲۵ لا^{۲} + ۹۱ لا^{۳} + ...

(۹) ۱ + ۲ لا + ۶ لا^{۲} + ۲۰ لا^{۳} + ۶۶ لا^{۴} + ۲۱۲ لا^{۵} + ...

(۱۰) − $\frac{۳}{۲}$ + ۲ + ۰ + ۸ + ...

۱^{2} + ۲^{2} + ۳^{2} + ۴^{2} + ... + ن^{2}

اور ۱^{3} + ۲^{3} + ۳^{3} + ۴^{3} + ... + ن^{3}

متوالی سلسلے ہیں، ان کے ربط کا پیمانہ معلوم کرو۔

(۱۲) بتاؤ کہ اگر متوالی سلسلہ

ا$_{0}$ + ا$_{1}$ لا + ا$_{2}$ لا^{2} + ا$_{3}$ لا^{3} + ...

کی لا متناہی تعداد رقوم کا مجموعہ معلوم ہو تو اس سے اسکی ن رقموں کا حاصل جمع کس طرح نکالا جا سکتا ہے۔

(۱۳) سلسلہ

۳ − ۱ + ۱۳ − ۹ + ۴۱ − ۵۳ + ...

کی (۲ن + ۱) رقوم کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱۴) متوالی سلسلوں

ا$_{0}$ + ا$_{1}$ لا + ا$_{2}$ لا^{2} + ا$_{3}$ لا^{3} + ...

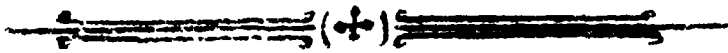
اور ب$_{0}$ + ب$_{1}$ لا + ب$_{2}$ لا^{2} + ب$_{3}$ لا^{3} + ...

کے ربط کے پیمانے بالترتیب ۱ + ق لا + ل لا^{2} اور ۱ + ر لا + س لا^{2} ہیں، ثابت کرو کہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم (ا$_{ن}$ + ب$_{ن}$) لا^{ن} ہے ایک متوالی سلسلہ ہے جس کے ربط کا پیمانہ

۱ + (ق + ر) لا + (ل + س + ق ر) لا^{2} + (ل ر + ق س) لا^{3} + ل س لا^{4}

ہے۔

(۱۵) اگر ایک ایسا سلسلہ بنایا جائے جس کی ن ویں رقم ایک

دوسرے دئے ہوئے متوالی سلسلہ کی ن رقموں کے مجموعہ کے برابر ہو تو بتاؤ کہ یہ سلسلہ بھی متوالی ہوگا جس کے ربط کے پیمانہ میں دئے ہوئے سلسلہ کے ربط کے پیمانہ کی نسبت ایک رقم زیادہ ہوگی۔

پچیسواں باب
کسور مسلسل

۳۲۱ - $ا + \cfrac{ب}{ج + \cfrac{د}{ع + \dots}}$ کی شکل کے جملہ کو کسر مسلسل کہتے ہیں، یہاں حروف ا، ب، ج، ...... وغیرہ کسی قسم کی مقادیر کو تعبیر کر سکتے ہیں لیکن فی الحال ہم صرف اس سادہ شکل $ا_1 + \cfrac{1}{ا_2 + \cfrac{1}{ا_3 + \dots}}$ پر بحث کرتے ہیں جس میں $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ ... صرف مثبت صحیح اعداد کو تعبیر کرتے ہیں، اس سلسلہ کو بالعموم زیادہ منضبط شکل $ا_1 + \frac{1}{ا_2 +} \frac{1}{ا_3 +}$ میں لکھا جاتا ہے۔

۳۲۲ - اگر خارج قسمتوں $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ ..... کی تعداد محدود ہو تو کسر مسلسل مختتم کہلاتی ہے اور اگر غیر محدود ہو تو کسر کو لامتناہی کسر مسلسل کہتے ہیں۔

اگر کسر مختتم ہو تو سلسلہ کی آخری یعنے سب سے نیچے کی ر... سے شروع ہو کر یکے بعد دیگرے کسور کو مختصر کرتے جانے سے

بالآخر ہم ایک مختتم کسر کو معمولی کسر کی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں

۳۲۳۔ ایک مفروضہ کسر کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ۔

فرض کرو کہ $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ایک دی ہوئی کسر ہے؛ م کو ن پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ خارج قسمت ا_1 ہے اور باقی ق ہے، تب

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{ا}_1 + \frac{\text{ق}}{\text{ن}} = \text{ا}_1 + \cfrac{1}{\frac{\text{ن}}{\text{ق}}}$$

پھر ن کو ق پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ ا_2 خارج قسمت ہے اور ق_1 باقی ہے، تب

$$\frac{\text{ن}}{\text{ق}} = \text{ا}_2 + \frac{\text{ق}_1}{\text{ق}} = \text{ا}_2 + \cfrac{1}{\frac{\text{ق}}{\text{ق}_1}}$$

پھر ق کو ق_1 پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ ا_3 خارج قسمت ہے اور ق_2 باقی ہے، اور علیٰ ہذالقیاس، تب

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \text{ا}_1 + \cfrac{1}{\text{ا}_2 + \cfrac{1}{\text{ا}_3 + \ldots\ldots}} = \text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2 +}\ \frac{1}{\text{ا}_3 +} \ldots\ldots$$

اگر م کم ہو ن سے تو پہلا خارج قسمت صفر ہوتا ہے اور ہم اس طرح لکھتے ہیں $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \cfrac{1}{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$ اور حسب سابق عمل کرتے ہیں

یہ بات قابل غور ہے کہ مذکورہ بالا طریقہ وہی ہے جو م اور ن کا عاد اعظم نکالنے کا ہے؛ پس اگر م اور ن متوافق ہوں تو ظاہر ہے کہ ہم کبھی نہ کبھی ایک ایسی منزل پر پہنچ جائیں گے

جس پر تقسیم کا عمل پورا ہو جائیگا اسلئے ظاہر ہے کہ ہم ہر ایسی کسر کو جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں مثبت صحیح اعداد ہوں ایک مختتم مسلسل کسر کی شکل میں لا سکتے ہیں۔

مثال۔ $\frac{۲۵۱}{۸۰۲}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ۔

معمولی قاعدہ کے مطابق ۲۵۱ اور ۸۰۲ کا عاد اعظم معلوم کرو۔

۵	۲۵۱	۸۰۲	۳
۶	۶	۴۹	۸
		۱	

اس میں خارج قسمت بالترتیب ۳، ۵، ۸، ۶..... ہیں، اسلئے

$$\frac{۲۵۱}{۸۰۲} = \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۵+}\ \frac{۱}{۸+}\ \frac{۱}{۶}$$

۳۳۴۔ کسر مسلسل کے پہلے دوسرے، تیسرے،..... خارج قسمت پر ٹھیر جانے سے جو کسریں حاصل ہوتی ہیں اُن کو بالترتیب پہلا، دوسرا، تیسرا،....... **مستدق** کہتے ہیں، دفعہ ۳۳۹ میں معلوم ہوگا کہ یہ وجہ تسمیہ اس امر پر مبنی ہے کہ ہر مستدق کی قیمت اس سے پہلے مستدق کی نسبت مسلسل کسر کی اصلی قیمت کے زیادہ قریب ہوتی ہے۔

۳۳۵۔ ثابت کرو کہ 'مستدق' مسلسل کسر کی اصلی قیمت سے متبادلاً کم اور زیادہ ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مسلسل کسر $ا_۱ + \frac{۱}{ا_۲+}\ \frac{۱}{ا_۳+}$ ..... ہے

پہلا مستدق $ا_۱$ ہے جو کسر بالا کی نسبت بہت چھوٹا ہے کیونکہ کسر کا باقی حصہ $\frac{۱}{ا_۲+}\ \frac{۱}{ا_۳+}$ ..... چھوڑ دیا گیا ہے، دوسرا

مستدق $\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2}$ ہے جو کسر کی نسبت بڑا ہے کیونکہ نسب نما ا_2 اصلی نسب نما $\text{ا}_2 + \frac{1}{\text{ا}_3 + \frac{1}{\dots}}$ کی نسبت بہت چھوٹا ہے

اسی طرح تیسرا مستدق $\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2 +} \frac{1}{\text{ا}_3}$ مقابلتہً چھوٹا ہے

کیونکہ $\text{ا}_2 + \frac{1}{\text{ا}_3}$ مقابلتہً بڑا ہے اور علیٰ ہٰذالقیاس

اگر کسر مفروضہ کسر واجب ہو تو $\text{ا}_1 = ۰$، اگر اس صورت میں ہم یہ تسلیم کرلیں کہ پہلا مستدق صفر ہے تو ہم نتائج بالا کو حسب ذیل الفاظ میں بیان کرسکتے ہیں

جفت رتبہ کے سب مستدق مسلسل کسر سے بڑے ہوتے ہیں

اور طاق رتبہ کے سب مستدق مسلسل کسر سے چھوٹے ہوتے ہیں

۳۳۶ - متواتر مستدقوں کے بنانے کا کلیہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مسلسل کسر

$$\text{ا}_1 + \frac{1}{\text{ا}_2 +} \frac{1}{\text{ا}_3 +} \frac{1}{\dots}$$

ہے، تب پہلے تین مستدق، بالترتیب

$$\frac{\text{ا}_1}{1}، \quad \frac{\text{ا}_1 \text{ا}_2 + 1}{\text{ا}_2}، \quad \frac{\text{ا}_3(\text{ا}_1 \text{ا}_2 + 1) + \text{ا}_1}{\text{ا}_3 \text{ا}_2 + 1}$$

ہیں، ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مستدق کا شمار کنندہ دوسرے مستدق کے شمار کنندہ کو تیسرے خارج قسمت سے ضرب دیکر حاصل ضرب میں پہلا مستدق جمع کرنے سے بن جاتا ہے، اور اس کا نسب نما بھی اسی طرح بنتا ہے۔

فرض کرو کہ اسی طرح سے متواتر مستدق بنائے گئے ہیں، اور ان کے شمار کنندے بالترتیب $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$..... ہیں اور نسب نما $ل_۱$، $ل_۲$، $ل_۳$...... ہیں۔

فرض کرو کہ کلیہ بالا ن ویں مستدق کے لئے صحیح ہے یعنی فرض کرو کہ

$$ق_ن = ا_ن ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}$$

اور $$ل_ن = ا_ن ل_{ن-۱} + ل_{ن-۲}$$

(ن + ۱) ویں مستدق اور ن ویں مستدق میں فرق صرف اس قدر ہے کہ آخرالذکر کے خارج قسمت $ا_ن$ کی بجائے اول الذکر میں خارج قسمت $ا_ن + \frac{۱}{ا_{ن+۱}}$ ہے، پس (ن + ۱) واں مستدق

$$= \frac{\left(ا_ن + \frac{۱}{ا_{ن+۱}}\right) ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}}{\left(ا_ن + \frac{۱}{ا_{ن+۱}}\right) ل_{ن-۱} + ل_{ن-۲}}$$

$$= \frac{ا_{ن+۱}\left(ا_ن ق_{ن-۱} + ق_{ن-۲}\right) + ق_{ن-۱}}{ا_{ن+۱}\left(ا_ن ل_{ن-۱} + ل_{ن-۲}\right) + ل_{ن-۱}}$$

$$= \frac{ا_{ن+۱} ق_ن + ق_{ن-۱}}{ا_{ن+۱} ل_ن + ل_{ن-۱}}$$ حسب مفروض

اس لئے اگر ہم

$$ق_{ن+1} = ا_{ن+1} ق_{ن} + ق_{ن-1} ، ل_{ن+1} = ا_{ن+1} ل_{ن} + ل_{ن-1}$$ رکھیں

تو ہم دیکھتے ہیں کہ (ن + ۱) ویں مستدق کا شمار کنندہ اور نسب نما اسی کلیہ کے موافق بنتا ہے جو ن ویں مستدق کی صورت میں درست تسلیم کیا گیا تھا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ تیسرے مستدق کی صورت میں درست ہے، اس لئے یہ چوتھے مستدق کے لئے درست ہے اور علیٰ ہذالقیاس، پس یہ ہر حالت میں درست ہے۔

۳۳۷۔ $ا_{ن}$ کو ن ویں **جزوی خارج قسمت** کے نام سے موسوم کرنا زیادہ مناسب اور سہولت بخش ہوگا کیونکہ اس منزل پر **مکمل خارج قسمت** $ا_{ن} + \frac{1}{ا_{ن+1} +} \frac{1}{ا_{ن+2} +} \ldots$ ہوتا ہے،

ہم بالعموم کسی منزل پر مکمل خارج قسمت کو ک سے تعبیر کرینگے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} = \frac{ا_{ن} ق_{ن-1} + ق_{ن-2}}{ا_{ن} ل_{ن-1} + ل_{ن-2}}$

مسلسل کسر کو لا سے تعبیر کرو، تب لا، کسر $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ سے صرف اس بات کے لحاظ سے فرق رکھتا ہے کہ لا میں جزوی خارج قسمت $ا_{ن}$ کی بجائے مکمل خاج قسمت ک لیا گیا ہے۔

پس

$$\text{لا} = \frac{\text{ک ق}_{\text{ن}-۱} + \text{ق}_{\text{ن}-۲}}{\text{ک ل}_{\text{ن}-۱} + \text{ل}_{\text{ن}-۲}}$$

۳۲۸ - اگر $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ کسی مسلسل کسر کا ن' واں مستدق

$$\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱} - \text{ق}_{\text{ن}-۱}\,\text{ل}_{\text{ن}} = (-۱)^{\text{ن}}$$

فرض کرو کہ مسلسل کسر

$$\text{ا}_۱ + \frac{۱}{\text{ا}_۲ +}\ \frac{۱}{\text{ا}_۳ +}\ \frac{۱}{\text{ا}_۴ +}$$

ہے، تب

$$\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱} - \text{ق}_{\text{ن}-۱}\,\text{ل}_{\text{ن}} = (\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ق}_{\text{ن}-۱} + \text{ق}_{\text{ن}-۲})\,\text{ل}_{\text{ن}-۱}$$

$$- \text{ق}_{\text{ن}-۱}(\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱} + \text{ل}_{\text{ن}-۲})$$

$$= (-۱)(\text{ق}_{\text{ن}-۱}\,\text{ل}_{\text{ن}-۲} - \text{ق}_{\text{ن}-۲}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱})$$

$$= (-۱)^۲(\text{ق}_{\text{ن}-۲}\,\text{ل}_{\text{ن}-۳} - \text{ق}_{\text{ن}-۳}\,\text{ل}_{\text{ن}-۲})$$ اس

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= (-۱)^{\text{ن}-۲}(\text{ق}_۲\,\text{ل}_۱ - \text{ق}_۱\,\text{ل}_۲)$$

لیکن $\text{ق}_۲\,\text{ل}_۱ - \text{ق}_۱\,\text{ل}_۲ = (\text{ا}_۱\text{ا}_۲ + ۱) - \text{ا}_۱\text{ا}_۲ = ۱ = (-۱)^۲$

پس $\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱} - \text{ق}_{\text{ن}-۱}\,\text{ل}_{\text{ن}} = (-۱)^{\text{ن}}$

جب مسلسل کسر ایک سے [illegible] ہو تو یہ نتیجہ درست رہتا ہے [illegible] ہم $ر_{۰} = ۰$ ، $ر_{۱}$
فرض کریں، اور پہلا مستدق بھی صفر ہو۔

نوٹ۔ جب ہم متواتر مستدقوں کی عددی قیمتیں نکال رہے ہوں تو متذکرۂ بالا مسئلہ عمل کی صحت کی جانچ کرنے کا ایک سیادہ اور آسان ذریعہ ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ ہر ایک مستدق مفرد ترین شکل میں ہوتا ہے
کیونکہ اگر $ق_{ن}$ اور $ل_{ن}$ میں کوئی جزوِ ضربی مشترک ہو تو

یہ $ق_{ن} ل_{ن-۱} - ق_{ن-۱} ل_{ن}$ یعنی ۱ کو پورا تقسیم کریگا جو صریحاً ناممکن ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ دو متواتر مستدقوں کا فرق ایک کسر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ ۱ ہوتا ہے، کیونکہ

$$\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} - \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}} = \frac{ق_{ن} ل_{ن-۱} - ق_{ن-۱} ل_{ن}}{ل_{ن} ل_{ن-۱}} = \frac{۱}{ل_{ن} ل_{ن-۱}}$$

امثلہ نمبری ۲۵ (ا)

ذیل کے سلسلوں کے متواتر مستدق معلوم کرو۔

۱ — $۲ + \frac{۱}{۶+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱۱+}\ \frac{۱}{۲}$

۲ — $\frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۴+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۶}$

۳ — $۳ + \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۱+} + \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۹}$

ذیل کی مقداروں کو مسلسل کسور کی شکل میں لاؤ اور ہر ایک کا
چوتھا متدق معلوم کرو۔

۴۔ $\frac{۲۵۳}{۱۷۹}$ ۵۔ $\frac{۸۳۲}{۱۵۹}$ ۶۔ $\frac{۱۱۸۹}{۳۹۲۷}$

۷۔ $\frac{۷۲۹}{۲۳۱۸}$ ۸۔ ۳۷، ۹۔ ۱،۳۲۳۹

۱۰۔ ۳۰۲۹، ۱۱۔ ۴،۳۱۶

۱۲۔ ایک میتر ۳۹،۳۷۰۷۹ انچ کے مساوی ہوتا ہے مسلسل
کسور کے نظریہ سے ثابت کرو کہ ۳۲ میتر تقریباً ۳۵ گز کے
مساوی ہونگے۔

۱۳۔ کسروں کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو ۲۴۲۲۶، کی جانب
متدق ہو، یہ کسر اعشاریہ ۳۶۵ دنوں پر شمسی سال کی زیادتی
کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۴۔ ایک کلومیتر تقریباً ۶۲۱۳۸، میل کے مساوی ہوتا ہے
ثابت کرو کہ کسور $\frac{۵}{۸}$، $\frac{۱۸}{۲۹}$، $\frac{۲۳}{۳۷}$، $\frac{۶۴}{۱۰۳}$ اُس نسبت کی جو ایک
کلومیتر کو ایک میل کے ساتھ ہے متواتر متدق قیمتیں ہیں۔

۱۵۔ مساوی طول کی دو پٹریاں بالترتیب ۱۶۲ اور ۲۰۹ برابر
حصوں میں تقسیم کی گئی ہیں اگر اُن کے صفر کے نشان
دوسرے پر منطبق ہوں تو بتاؤ کہ ایک کا ۳۱ واں نشان
کے ۴۰ ویں نشان پر تقریباً منطبق ہوگا۔

۱۶۔ اگر $\frac{ن^{۴} + ن^{۲} - ۱}{ن^{۳} + ن^{۲} + ن + ۱}$ کو مسلسل کسر میں تبدیل کیا جائے
تو ثابت کرو کہ خارج قسمت متبادلاً ن - ۱ اور ن + ۱ ہونگے
نیز متواتر متدق معلوم کرو۔

۱۷- ثابت کرو کہ

(۱) $$\frac{ق_{ن+۱} - ق_{ن-۱}}{ل_{ن+۱} - ل_{ن-۱}} = \frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$$

(۲) $$\left(\frac{ق_{ن+۲}}{ق_{ن}} - ۱\right)\left(۱ - \frac{ق_{ن-۱}}{ق_{ن+۱}}\right) = \left(\frac{ل_{ن+۲}}{ل_{ن}} - ۱\right)\left(۱ - \frac{ل_{ن-۱}}{ل_{ن+۱}}\right)$$

۱۸- اگر $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ ایک مسلسل کسر کا ن واں مستدق ہو اور اسکا متناظر خارج قسمت $ا_{ن}$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ق_{ن+۲}\, ل_{ن-۲} - ق_{ن-۲}\, ل_{ن+۲} = ا_{ن+۲} \times ا_{ن+۱} \times ا_{ن} + ا_{ن} + ا_{ن+۲}$$

۳۲۹- ہر مستدق اپنے پہلے کے مستدق کی نسبت مسلسل کسر کی قیمت کے مقابلتہً زیادہ قریب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مسلسل کسر لا ہے اور اس کے تین متواتر مستدق

$\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ ، $\frac{ق_{ن+۱}}{ل_{ن+۱}}$ ، $\frac{ق_{ن+۲}}{ل_{ن+۲}}$ ہیں، اب لا اور کسر $\frac{ق_{ن+۲}}{ل_{ن+۲}}$ میں فرق صرف اس قدر ہے کہ لا میں $ا_{ن+۲}$ کی بجائے (ن+۲) واں پورا خارج قسمت لیا گیا ہے، اس پورے خارج قسمت کو ک سے تعبیر کرو، تب

$$لا = \frac{ک\, ق_{ن+۱} + ق_{ن}}{ک\, ل_{ن+۱} + ل_{ن}}$$

$$\text{لا} \sim \frac{ق_ن}{ل_ن} = \frac{ک(ق_{ن+1}\,ل_ن \sim ق_ن\,ل_{ن+1})}{ل_ن(ک\,ل_{ن+1} + ل_ن)} = \frac{ک}{ل_ن(ک\,ل_{ن+1} + ل_ن)}$$

اور

$$\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}} \sim \text{لا} = \frac{ق_{ن+1}\,ل_ن \sim ق_ن\,ل_{ن+1}}{ل_{ن+1}(ک\,ل_{ن+1} + ل_ن)} = \frac{1}{ل_{ن+1}(ک\,ل_{ن+1} + ل_ن)}$$

اب ک ایک سے بڑا ہے اور $ل_ن$ چھوٹا ہے $ل_{ن+1}$ سے، اسلئے اِن دونوں وجوہات کی بناء پر $\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}}$ اور لا کا فرق چھوٹا ہے $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ اور لا کے فرق سے، اس سے ثابت ہوا کہ کسی مسلسل کسر کا ہر ایک مستدق اپنے عین پہلے مستدق کی نسبت اور بنا بریں پہلے مستدقوں میں سے ہر ایک کی نسبت کسر مذکور کی قیمت کے زیادہ قریب ہوتا ہے۔ دفعۂ ہٰذا کے نتیجہ کو دفعہ ۳۳۵ کے نتیجہ کے ساتھ ملانے سے یہ ظاہر ہے کہ
طاق رتبہ کے مستدق قیمت میں بالتسلسل بڑھتے جاتے ہیں لیکن کسر کی قیمت سے کبھی تجاوز نہیں کرسکتے۔
جفت رتبہ کے مستدق قیمت میں بالتسلسل کم ہوتے جاتے ہیں لیکن مسلسل کسر کی قیمت سے کبھی کم نہیں ہوتے۔

۳۴۰۔ کسی مستدق کو مسلسل کسر کے مساوی لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے اسکی حدود معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{ق_ن}{ل_ن}$، $\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}}$، $\frac{ق_{ن+2}}{ل_{ن+2}}$ تین مسلسل مستدق

ہیں اور ک پورے (ن + ۲) ویں خارج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{تب لا} = \frac{\text{ک}\,\text{ق}_{\text{ن}+1} + \text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ک}\,\text{ل}_{\text{ن}+1} + \text{ل}_{\text{ن}}}$$

$$\therefore \text{لا} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = \frac{\text{ک}}{\text{ل}_{\text{ن}}(\text{ک}\,\text{ل}_{\text{ن}+1} + \text{ل}_{\text{ن}})} = \frac{1}{\text{ل}_{\text{ن}}\left(\text{ل}_{\text{ن}+1} + \frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ک}}\right)}$$

اب ک ایک سے بڑا ہے، اس لئے $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ اور لا کا فرق

$\frac{1}{\text{ل}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}+1}}$ سے کم ہے اور $\frac{1}{\text{ل}_{\text{ن}}(\text{ل}_{\text{ن}+1} + \text{ل}_{\text{ن}})}$ سے بڑا ہے

نیز چونکہ $\text{ل}_{\text{ن}+1} > \text{ل}_{\text{ن}}$ اس لئے $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ کو لا کی بجائے لینے سے

جو غلطی واقع ہوتی ہے وہ $\frac{1}{\text{ل}^2_{\text{ن}}}$ سے کم ہے اور $\frac{1}{\text{ل}^2_{\text{ن}+1}}$ سے

زیادہ ہے۔

۳۴۱ — دفعۂ ماقبل سے یہ ظاہر ہے کہ $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ کو مسلسل

کسر کی بجائے لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے وہ $\frac{1}{\text{ل}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}+1}}$ یا

$\frac{1}{ل_ن(ا_{ن+1}ل_ن+ل_{ن-1})}$ سے کم ہے یعنی $\frac{1}{ا_{ن+1}ل_ن^2}$ سے کم

ہے، پس $ا_{ن+1}$ جتنا بڑا ہوگا اتنا ہی $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ کی قیمت مسلسل کسر کی قیمت کے زیادہ قریب ہو گی۔

پس کسی بڑے خارج قسمت کے عین پہلے کا مستدق مسلسل کسر کی قیمت سے بہت قریب ہوتا ہے۔

اب چونکہ غلطی $\frac{1}{ل_ن^2}$ سے کم ہے اس لئے ایک ایسا مستدق معلوم کرنے کے لئے جس کی قیمت اور مسلسل کسر کی قیمت کا باہمی فرق ایک معلومہ مقدار $\frac{1}{ا}$ سے کم ہو ہمیں $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ تک متواتر مستدق نکالنے چاہئیں جہاں $ق_ن^2$ بڑا ہے ا سے۔

۳۴۲۔ مسلسل کسروں کے خواص کی مدد سے ہم دو ایسے چھوٹے صحیح اعداد معلوم کر سکتے ہیں جن کی نسبت دو متبائن مقادیر کی نسبت کے بہت قریب ہو یا دو ایسی مقادیر کی باہمی نسبت کے بہت قریب ہو جنکی ٹھیک نسبت صرف دو بڑے صحیح عددوں سے تعبیر ہو سکتی ہو۔

مثال۔ کسور کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو عدد ۳٫۱۴۱۵۹ کی طرف مستدق ہو ۱۴۱۵۹ اور ۱۰۰۰۰۰ کا عاد اعظم نکالنے کے عمل میں متواتر خارج قسمت ۷، ۱۵، ۱، ۲۵، ۱، ۷، ۴ ہیں، تب

$$۳٫۱۴۱۵۹ = ۳ + \frac{۱}{۷+} \frac{۱}{۱۵+} \frac{۱}{۱+} \frac{۱}{۲۹۲+} \frac{۱}{۱+} \frac{۱}{۱+} \frac{۱}{۴}$$

پس متواتر مستدق

$$\frac{۳}{۱}،\ \frac{۲۲}{۷}،\ \frac{۳۳۳}{۱۰۶}،\ \frac{۳۵۵}{۱۱۳}،\ \ldots\ldots$$

ہیں، آخر کا مستدق جو کہ بڑے خارج قسمت ۲۹۲ سے پہلے ہے کسر کی قیمت کے نہایت قریب ہے، اس مستدق اور کسر کی قیمت میں

اختلاف $\frac{۱}{۲۹۲ \times (۱۱۳)^۲}$ سے کم ہے اور اس لئے $\frac{۱}{۲۹۲ \times (۱۰۰)^۲}$ سے

یعنی ۰۰۰۰۰۴ سے کم ہے۔

۳۴۳۔ کوئی مستدق کسی ایسی کسر کی نسبت جس کا نسب نما مستدق کے نسب نما سے کم ہو مسلسل کسر کی قیمت کے زیادہ قریب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مسلسل کسر لا ہے، $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ اور $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ دو متصل مستدق ہیں اور $\frac{ر}{س}$ ایک ایسی کسر ہے جس کا نسب نما س، $ل_ن$ سے کم ہے۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ کسر $\frac{ر}{س}$ مستدق $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ کی نسبت لا کے زیادہ قریب ہے تب دفعہ ۳۳۹ کی رو سے $\frac{ر}{س}$ مستدق $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ کی نسبت بھی لا کے زیادہ قریب ہوگا۔

ہے چونکہ لا، $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ اور $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ کے درمیان واقع ہے ایسا

لازماً $\frac{ر}{س}$ کو $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ اور $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ کے درمیان واقع

ہونا چاہئے۔

اسلئے $\frac{ر}{س} \sim \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}} < \frac{ق_ن}{ل_ن} \sim \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ یعنی $< \frac{۱}{ل_ن ل_{ن-۱}}$

$$\therefore ر ل_{ن-۱} \sim س ق_{ن-۱} < \frac{س}{ل_ن}$$

یعنی ایک صحیح عدد ایک کسر سے کم ہے جو صریحاً ناممکن۔

لہذا $\frac{ق_ن}{ل_ن}$، کسر $\frac{ر}{س}$ کی نسبت مسلسل کسر کے زیادہ

قریب ہوگا۔

۲۴۴۔ اگر $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{قَ}{لَ}$ کسی مسلسل کسر لا کے د

متواتر مستدق ہوں تو $\frac{ق قَ}{ل لَ}$ بڑا ہوگا لا^2 سے جب $\frac{ق}{ل}$

بڑا ہو $\frac{قَ}{لَ}$ سے اور $\frac{ق قَ}{ل لَ}$ چھوٹا ہوگا لا^2 سے جب $\frac{ق}{ل}$

چھوٹا ہو $\frac{قَ}{لَ}$ سے۔

فرض کرو کہ $\frac{قَ}{لَ}$ کے عین بعد جو مستدق ہے اس

جواب میں مکمل خارج قسمت ک ہے، تب $لا = \frac{ک\,قَ + ق}{ک\,لَ + ل}$

$$\therefore \frac{ق\,قَ}{ل\,لَ} - لا^{۲} = \frac{۱}{ل\,لَ(ک\,لَ+ل)^{۲}}\left\{ق\,قَ(ک\,لَ+ل)^{۲} - ل\,لَ(ک\,قَ+ق)^{۲}\right\}$$

$$= \frac{(ک^{۲}\,قَ\,لَ - ق\,ل)(ق\,لَ - قَ\,ل)}{ل\,لَ(ک\,لَ+ل)^{۲}}$$

جزو ضربی $ک^{۲}\,قَ\,لَ - ق\,ل$ مثبت ہے کیونکہ $قَ > ق$، $لَ > ل$ اور $ک > ۱$ اسلئے $\frac{ق\,قَ}{ل\,لَ} >$ یا $< لا^{۲}$ یعنی اگر بالترتیب $ق\,لَ - قَ\,ل$ مثبت ہو یا منفی ہو یعنی اگر بالترتیب $\frac{ق}{ل} >$ یا $< \frac{قَ}{لَ}$

نتیجہ صریح۔ اوپر کی تحقیقات سے ظاہر ہے کہ جملات $ق\,لَ - قَ\,ل$، $ق\,قَ - ل\,لَ\,لا^{۲}$، $قَ^{۲} - لَ^{۲}\,لا^{۲}$، $لَ^{۲}\,لا^{۲} - قَ^{۲}$ کی علامت ایک ہی ہوگی۔

امثلہ نمبری ۲۵ (ب)

(۱) $\frac{۲۲۲}{۲۰۳}$ گزوں کو ایک میٹر کا معادل لینے میں جو غلطی ہو گی اس کی حدود دریافت کرو، معلوم ہے کہ ایک میٹر = ۱٫۰۹۳۶ گز

(۲) سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۳+}\,\frac{۱}{۵+}\,\frac{۱}{۷+}\,\frac{۱}{۹+}\,\frac{۱}{۱۱+}$ ..... کی ایسی تقریبی قیمت معلوم کرو جس میں اور سلسلہ بالا کی اصلی قیمت میں اختلاف ۰٫۰۰۱ سے کم ہو۔

(۳) مسلسل سلسلوں کے نظریہ کی رو سے ثابت کرو کہ $\frac{۹۹}{۷۰}$

اور ۱،۴۱۴۲۱ کا فرق $\frac{۱}{۱۱۸۳۰}$ سے کم ہے۔

(۴) $\frac{\text{ا}^۳ + ۶\text{ا}^۲ + ۱۲\text{ا} + ۱۰}{\text{ا}^۴ + ۶\text{ا}^۳ + ۱۴\text{ا}^۲ + ۱۵\text{ا} + ۷}$ کو کسر مسلسل کی شکل میں لاؤ اور تیسرا مستدق معلوم کرو

(۵) ثابت کرو کہ پہلے اور ن ویں مستدق کا فرق تعداداً

$$\frac{۱}{\text{ل}_۱\text{ل}_۲} - \frac{۱}{\text{ل}_۲\text{ل}_۳} + \frac{۱}{\text{ل}_۳\text{ل}_۴} - \cdots + \frac{(۱-)^{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-۱}\text{ل}_{\text{ن}}}$$

کے مساوی ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ اگر مستدق $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ کے جواب میں خارج قسمت $\text{ا}_{\text{ن}}$ ہو تو

(۱) $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-۱}} = \text{ا}_{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۱}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۲}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۳}+} \cdots\cdots \frac{۱}{\text{ا}_۲+}$ [illegible]

(۲) $\frac{\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}-۱}} = \text{ا}_{\text{ن}} + \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۱}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۲}+}\ \frac{۱}{\text{ا}_{\text{ن}-۳}+} \cdots\cdots \frac{۱}{\text{ا}_۲+}$ [illegible]

(۷) مسلسل کسر $\frac{۱}{\text{ا}+}\ \frac{۱}{\text{ا}+}\ \frac{۱}{\text{ا}+}\ \frac{۱}{\text{ا}+} \cdots\cdots$ میں ثابت کر[illegible]

(۱) $\text{ق}_{\text{ن}}^۲ + \text{ق}_{\text{ن}+۱}^۲ = \text{ق}_{\text{ن}-۱}\text{ق}_{\text{ن}+۱} + \text{ق}_{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}+۲}$

(۲) $\text{ق}_{\text{ن}} = \text{ل}_{\text{ن}-۱}$

۸۔ اگر $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ مسلسل کسر

$$\frac{1}{\text{ا}+}\;\frac{1}{\text{ب}+}\;\frac{1}{\text{ا}+}\;\frac{1}{\text{ب}+}\;\frac{1}{\text{ا}+}\;\cdots\cdots$$

کا ن واں متدق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ل}_{\text{۲ن}} = \text{ق}_{\text{۲ن}+۱} \quad \text{اور} \quad \text{ل}_{\text{۲ن}-۱} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{ق}_{\text{۲ن}}$$

۹- مسلسل کسر

$$\frac{1}{\text{ا}+}\;\frac{1}{\text{ب}+}\;\frac{1}{\text{ا}+}\;\frac{1}{\text{ب}+}$$

میں ثابت کرو کہ $\text{ق}_{\text{ن}+۲} - (\text{اب}+۲)\,\text{ق}_{\text{ن}} + \text{ق}_{\text{ن}-۲} = ۰$

اور $\text{ل}_{\text{ن}+۲} - (\text{اب}+۲)\,\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ل}_{\text{ن}-۲} = ۰$

۱۰- ثابت کرو کہ

$$\text{ا}\left(\text{لا}_۱ + \frac{1}{\text{الا}_۲+}\;\frac{1}{\text{لا}_۳+}\;\frac{1}{\text{الا}_۴}\cdots\cdots \text{۲ن خارج قسمتوں تک}\right)$$

$$= \text{الا}_۱ + \frac{1}{\text{لا}_۲+}\;\frac{1}{\text{الا}_۳+}\;\frac{1}{\text{لا}_۴+}\cdots\cdots \text{۲ن خارج قسمتوں تک}$$

۱۱- اگر مسلسل کسور $\frac{1}{\text{ا}_۱+}\;\frac{1}{\text{ا}_۲+}\;\frac{1}{\text{ا}_۳+}\cdots$، $\frac{1}{\text{ا}_۲+}\;\frac{1}{\text{ا}_۳+}\;\frac{1}{\text{ا}_۴+}\cdots$، $\frac{1}{\text{ا}_۳+}\;\frac{1}{\text{ا}_۴+}\;\frac{1}{\text{ا}_۵+}$

میں سے پہلی کا ع واں، دوسری کا (ع - ۱) واں، تیسری کا (ع - ۲) واں متدق بالترتیب $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$، $\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$، $\frac{\text{ر}}{\text{س}}$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{م} = \text{ا}_۱\text{ق} + \text{ر}،\quad \text{ن} = (\text{ا}_۱\text{ا}_۲ + ۱)\,\text{ل} + \text{ا}_۱\text{ر}$$

۱۲- اگر سلسلہ

$$\frac{1}{ا+}\;\frac{1}{ا+}\;\frac{1}{ا+}\cdots$$

کا ن واں متدق $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ ہو تو ثابت کرو کہ $ق_ن$ اور $ل_ن$ بالترتیب

$$\frac{لا}{1-الا-لا^2} \quad \text{اور} \quad \frac{الا+لا^2}{1-الا-لا^2}$$

کی تفصیلوں میں $لا^ن$ کے سر ہیں۔ اس سے ثابت کرو کہ

$ق_ن = ل_{ن-1} = \frac{عہ^ن - بہ^ن}{عہ - بہ}$ جہاں عہ اور بہ مساوات

$ت^2 - ات - 1 = 0$ کی اصلیں ہیں۔

۱۳۔ اگر کسر مسلسل

$$\frac{1}{ا+}\;\frac{1}{ب+}\;\frac{1}{ا+}\;\frac{1}{ب}\cdots$$

کا ن واں متدق $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ ہو تو ثابت کرو کہ $ق_ن$ اور $ل_ن$ بالترتیب

$$\frac{لا+بلا^2-لا^3}{1-(اب+2)لا^2+لا^4} \quad \text{اور} \quad \frac{الا+(اب+1)لا^2-لا^3}{1-(اب+2)لا^2+لا^4}$$

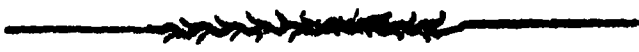
کی تفصیلوں میں $لا^ن$ کے سر ہیں، اس سے ثابت کرو کہ

$$ا\,ق_{2ن} = ب\,ل_{2ن-1} = اب\,\frac{عہ^ن - بہ^ن}{عہ - بہ}$$

$$ق_{2ن+1} = ل_{2ن} = \frac{عہ^{ن+1} - بہ^{ن+1} - (عہ^ن - بہ^ن)}{عہ - بہ}$$

جہاں عہ اور یہ مساوات

$$۱ - (ا ب + ۲) لا^{۲} + لا^{۴} = ۰$$

میں $لا^{۲}$ کی قیمتیں ہیں ۔

چھبیسواں باب

درجۂ اول کی غیر معین مساواتیں

۳۴۵ - دسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کس طرح عددی سروں والی غیر معیّن مساواتوں کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو سکتے ہیں۔ یہاں ہم درجۂ اول کی کسی غیر معیّن مساوات کے عام حل حاصل کرنے کے لئے مسلسل کسروں کے خواص کو کام میں لائیں گے۔

۳۴۶ - ہم درجۂ اول کی کسی مساوات کو جس میں دو مجہول لا اور ما شامل ہوں ا لا ± ب ما = ± ج کی شکل میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں ا، ب، ج مثبت صحیح اعداد کو تعبیر کرتے ہیں۔ اس مساوات کے بے شمار حل ہو سکتے ہیں لیکن اگر سوال کی شرائط کی رُو سے لا، ما مثبت صحیح اعداد ہوں تو ممکن ہے کہ حلوں کی تعداد محدود ہو۔

یہ ظاہر ہے کہ مساوات ا لا + ب ما = -ج کا کوئی حل مثبت صحیح عدد نہیں ہو سکتا، نیز مساوات ا لا - ب ما = - ج وہی ہے جو مساوات ب ما - ا لا = ج ہے، اس لئے صرف مساوات ا لا ± ب ما = ج پر بحث کرنا کافی ہوگا۔

اگر ا اور ب میں کوئی جزوِ ضربی م ہو اور ج میں یہ جزو ضربی شامل نہ ہو تو مساوات ا لا ± ب ما = ج میں سے کوئی

بھی لا، ما کی صحیح عددی قیمت سے پوری نہیں ہوتی کیونکہ ا لا ± ب ما
م پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے لیکن ج پورا تقسیم نہیں ہوتا۔
اگر ا، ب، ج میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو تقسیم کرنے
سے اسے نکال دیا جا سکتا ہے، پس ہم یہ فرض کرینگے کہ
ا، ب، ج میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے اور ا اور ب
ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں۔

۳۴۷۔ مساوات ا لا ۔ ب ما = ج کا عام حل مثبت صحیح اعداد میں دریافت کرو۔

$\frac{ا}{ب}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کرو اور $\frac{ا}{ب}$ کے عین
پہلے مستنق کو $\frac{ق}{ل}$ سے تعبیر کرو، تب ا ل ۔ ب ق = ± ۱

[دفعہ ۳۳۸]

اسے اگر ا ل ۔ ب ق = ۱ تو مساوات بالا کو ذیل کی شکل
میں لکھا جا سکتا ہے۔

ا لا ۔ ب ما = ج (ا ل ۔ ب ق)

∴ ا (لا ۔ ج ل) = ب (ما ۔ ج ق)

اب چونکہ ا اور ب میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے اس لئے
لا ۔ ج ل، ب پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے، پس لا ۔ ج ل = ب د
جہاں د کوئی صحیح عدد ہے

$$∴ \frac{لا - ج ل}{ب} = د = \frac{ما - ج ق}{ا}$$

یعنی لا = ب د + ج ل، ما = ا د + ج ق
جس سے د کو مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے یا کوئی
ایسی منفی صحیح عددی قیمتیں دینے سے جو تعداداً متقادیر

$\frac{ج ل}{ب}$ اور $\frac{ج ق}{ا}$ میں سے چھوٹی مقدار سے کم ہوں مطلوبہ صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں، نیز د صفر کے مساوی ہو سکتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۲۔ اگر ا ل ۔ ب ق = ۔۱ تو

$$ا لا - ب ما = - ج (ا ل - ب ق)$$

$$\therefore ا (لا + ج ل) = ب (ما + ج ق)$$

$$\therefore \frac{لا + ج ل}{ب} = \frac{ما + ج ق}{ا} = د \quad \text{.... کوئی صحیح عدد}$$

اس لئے لا = ب د ۔ ج ل، ما = ا د ۔ ج ق

ان مساواتوں میں د کو کوئی ایسی مثبت صحیح عددی قیمت دینے سے جو مقادیر $\frac{ج ل}{ب}$ اور $\frac{ج ق}{ا}$ میں سے بڑی مقدار سے زیادہ ہو مطلوبہ عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں، پس اس صورت میں بھی حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۳۔ اگر ا اور ب میں سے کوئی ایک، ۱ کے مساوی ہو تو کسر $\frac{ا}{ب}$ کو ایسی مسلسل کسر کی صورت میں تحویل نہیں کیا جا سکتا جس میں شمار کنندگان '۱' ہوں اس لئے آگے عمل نہیں کیا جا سکتا تاہم ان صورتوں میں حل محض دیکھنے سے معلوم ہو سکتے ہیں کیونکہ مثلاً اگر ب = ۱ تو مساوات ہو جاتی ہے ا لا ۔ ما = ج جس سے ما = ا لا ۔ ج، اس میں لا کو $\frac{ج}{ا}$ سے بڑی کوئی مثبت صحیح عددی قیمت دینے سے مطلوبہ حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

نوٹ۔ دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ لا اور ما کی قیمتوں کے سلسلے

دو حسابی سلسلے ہیں جن میں مشترک فرق بالترتیب ب اور ا ہیں۔

مثال۔ مساوات ۲۹ لا ۔ ۴۲ ما = ۵ کا عام حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

$\frac{۴۲}{۲۹}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{۴۲}{۲۹}$ کے عین پہلے کا متدق $\frac{۱۳}{۹}$ ہے، پس

۲۹ × ۱۳ ۔ ۴۲ × ۹ = ۔۱

∴ ۲۹ × ۶۵ ۔ ۴۲ × ۴۵ = ۔۵

اس کو اصلی مساوات کے ساتھ ملانے سے

۲۹ (لا + ۶۵) = ۴۲ (ما + ۴۵)

∴ $\frac{\text{لا} + ۶۵}{۴۲} = \frac{\text{ما} + ۴۵}{۲۹}$ = د ایک صحیح عدد

پس عام حل ہوا

لا = ۴۲ د ۔ ۶۵، ما = ۲۹ د ۔ ۴۵

۳۴۸۔ اگر مساوات ا لا ۔ ب ما = ج کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں دیا ہوا ہو تو عام حل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ھ، ک مساوات ا لا ۔ ب ما = ج کا ایک حل ہے، تب ا ھ ۔ ب ک = ج

∴ ا لا ۔ ب ما = ا ھ ۔ ب ک

∴ ا (لا ۔ ھ) = ب (ما ۔ ک)

∴ $\frac{\text{لا} - \text{ھ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ما} - \text{ک}}{\text{ا}}$ = د، کوئی صحیح عدد

لہٰذا لا = ھ + ب د، ما = ک + ا د جو عام حل ہے۔

۳۴۹۔ مساوات ا لا + ب ما = ج کا عام حل مثبت صحیح

اعداد میں معلوم کرو۔

$\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کرو اور فرض کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ کے عین پہلے کا مستدق $\frac{\text{ق}}{\text{ل}}$ ہے، تب

ال ـ ب ق = ± ۱

۱۔ اگر ال ـ ب ق = ۱ تو

الا + ب ما = ج (ال ـ ب ق)

∴ ا (ج ل ـ لا) = ب (ما + ج ق)

∴ $\frac{\text{ج ل ـ لا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ما + ج ق}}{\text{ا}}$ = د، کوئی صحیح عدد

∴ لا = ج ل ـ ب د اور ما = ا د ـ ج ق

جس سے د کو $\frac{\text{ج ق}}{\text{ا}}$ سے بڑی اور $\frac{\text{ج ل}}{\text{ب}}$ سے چھوٹی مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے مطلوبہ مثبت صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

پس اس صورت میں مطلوبہ حلوں کی تعداد محدود ہوگی اور اگر کوئی صحیح عدد ایسا نہ ہو جو اِن شرائط کو پورا کرے تو کوئی حل نہ ہوگا۔

۲۔ اگر ال ـ ب ق = ـ ۱ تو

الا + ب ما = ـ ج (ال ـ ب ق)

∴ ا (لا + ج ل) = ب (ج ق ـ ما)

∴ $\frac{\text{لا + ج ق}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج ق ـ ما}}{\text{ا}}$ = د، (صحیح عدد)

∴ لا = ب د ـ ج ل، ما = ج ق ـ ا د

جس سے د کو ایسی مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے

جو $\frac{ج ل}{ب}$ سے بڑی اور $\frac{ج ق}{ا}$ سے چھوٹی ہوں مطلوبہ حل صحیح عددوں میں حاصل ہو سکتے ہیں۔ حسب سابق حلوں کی کی تعداد اس صورت میں بھی محدود ہے اور ممکن ہے کہ کوئی بھی حل نہ ہو۔

۳۔ اگر ا یا ب ایک کے مساوی ہو تو دفعہ ۳۴۷ کی طرح حل محض دیکھنے سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

۳۵۰ ۔ اگر مساوات ا لا + ب ما = ج کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو تو عام حل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ا لا + ب ما = ج کا ایک حل ھ، ک ہے، تب ا ھ + ب ک = ج

$$\therefore \text{ا لا + ب ما = ا ھ + ب ک}$$

$$\therefore \text{ا(لا - ھ) = ب (ک - ما)}$$

$$\therefore \frac{\text{لا - ھ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ک - ما}}{\text{ا}} = \text{د} \quad \text{(صحیح عدد)}$$

$$\therefore \text{لا = ھ + ب د، ما = ک - ا د}$$

جو مطلوبہ عام حل ہے۔

۳۵۱ ۔ معلوم کرو کہ مساوات ا لا + ب ما = ج کے مثبت صحیح عددوں میں کتنے حل ہیں۔

$\frac{ا}{ب}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کرو اور فرض کرو کہ $\frac{ا}{ب}$ سے عین پہلے کا مستدق $\frac{ق}{ل}$ ہے، تب ا ل ~ ب ق = ±۱

(۱) فرض کرو کہ ا ل - ب ق = ۱، تب عام حل ہو گا

[دفعہ ۲۴۹

$لا = ج ل - ب د، ما = ا د - ج ق$

ان مساواتوں میں د کو ایسی مثبت صحیح عددی قیمتیں

سے جو $\frac{ج ل}{ب}$ سے بڑی نہ ہوں اور $\frac{ج ق}{ا}$ سے چھو

مطلوبہ مثبت صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ $\frac{ج}{ا}$ اور $\frac{ج}{ب}$ صحیح اعداد نہیں۔

فرض کرو کہ $\frac{ج ق}{ا} = م + ف$، $\frac{ج ل}{ب} = ن + گ$

م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں اور ف اور گ کسور

ہیں، تب د کی جو کم سے کم قیمت ہوسکتی ہے وہ م

اور بڑی سے بڑی قیمت ن ہے

لہذا حلوں کی تعداد ہے

$$ن - م = \frac{ج ل}{ب} - \frac{ج ق}{ا} + ف - گ$$

$$= \frac{ج}{ا ب} + ف - گ$$

اب یہ ایک صحیح عدد ہے جو اس صورت میں جب ف

گ سے $\frac{ج}{ا ب}$ + ایک کسر کی شکل میں اور جب

ہو گ سے تو $\frac{ج}{ا ب}$ - ایک کسر کی شکل میں لکھا

ہے، بالفاظ دیگر حلوں کی تعداد اس صحیح عدد سے تعبیر

جو $\frac{ج}{ا ب}$ کے قریب ترین ہو اور جو اس سے بڑا ہو

ف > گ اور چھوٹا ہو ا ر ن > گ

۲- فرض کرو کہ $\frac{ج}{ب}$ کوئی صحیح عدد ہے

اس صورت میں گ = ۰ اور لا کی ایک قیمت صفر ہے،
اگر ہم اس کو شامل کرلیں تو حلوں کی تعداد $\frac{ج}{اب}$ + ن ہے
جو لازماً ایک صحیح عدد ہو گا۔ پس اگر ہم صفر والے حل کو شمار
میں لائیں تو حلوں کی تعداد اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے
تعبیر ہو گی جو $\frac{ج}{اب}$ + ۱ میں شامل ہے اور اگر صفر والے
حل کو شمار میں نہ لائیں تو اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے
تعبیر ہو گی جو $\frac{ج}{اب}$ میں شامل ہے۔

۳- فرض کرو کہ $\frac{ج}{ا}$ ایک صحیح عدد ہے

اس صورت میں ف = ۰ اور ما کی ایک قیمت صفر ہے، اگر
ہم اس کو شامل کرلیں تو د کی کم سے کم قیمت م اور بڑی سے
بڑی قیمت ن ہے، پس حلوں کی تعداد ن-م + ۱ یا
$\frac{ج}{اب}$ -گ + ۱ ہے، لہذا اگر ہم صفر والے حل کو شمار کریں تو حلوں
کی تعداد اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے تعبیر ہو گی
جو $\frac{ج}{اب}$ + ۱ میں شامل ہے اور اگر ہم صفر والے حل کو
شمار میں نہ لائیں تو اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے
تعبیر ہو گی جو $\frac{ج}{اب}$ میں شامل ہے۔

۴۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ا}$ اور $\frac{ج}{ب}$ دونوں صحیح اعداد ہیں۔

اس صورت میں ف = ۰ اور گ = ۰ اور لا اور ما دونوں
ایک ایک قیمت صفر ہے۔ اگر ہم اِن کو شمار میں لائیں
کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت م ہو سکتی ہے اور بڑی سے

ن، پس حلوں کی تعداد ن ۔ م + ۱ یا $\frac{ج}{اب}$ + ۱ ہے،

ہم صفر والی قیمتوں کو شمار نہ کریں تو حلوں کی تعداد $\frac{ج}{اب}$
ہے۔

۲۔ اگر ا ل ۔ ب ق = ۔ ۱، تو عام حل ہے

لا = ب د ۔ ج ل، ما = ج ق ۔ ا د

اور مماثل نتیجے مستنبط ہو سکتے ہیں

۳۵۲۔ مساوات الا + ب ما + ج ی = ر کے حل
صحیح اعداد میں معلوم کرنے کے لئے یوں عمل کرنا چاہئے
عمل نقل سے الا + ب ما = ر ۔ ج ی، اس میں ی
بالتواتر قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳، ... دینے سے ہمیں الا + ب
کی شکل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جن کو حسب سابق
کیا جا سکتا ہے۔

۳۵۳۔ اگر ہمارے پاس دو ہمزاد مساواتیں

ا لا + ب ما + ج ی = ر

اَ لا + بَ ما + جَ ی = رَ

ہوں تو ایک مجہول مثلاً ی کو ساقط کرنے سے ہمیں
ا۱ لا + ب۱ ما = ج۱ کی شکل کی ایک مساوات حاصل ہو

فرض کرو کہ اس مساوات کا ایک حل لا = ف اور ما = گ ہے،
تب عام حل کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے
لا = ف + ب۱ س، ما = گ - ا۱ س جہاں س
کوئی صحیح عدد ہے۔
لا اور ما کی یہ قیمتیں اوپر کی مساواتوں میں سے کسی ایک
میں مندرج کرنے سے ہمیں ف۱ س + گ۱ ی = ہ کی
شکل کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے، فرض کرو کہ اس کا
عام حل یہ ہے

س = ہ + گ۱ د
ی = ک - ف۱ د

س کی قیمت مندرج کرنے سے

لا = ف + ب۱ ہ + ب۱ گ۱ د
ما = گ - ا۱ ہ - ا۱ گ۱ د

لا، ما، ی کی قیمتیں، د کو مناسب صحیح عددی قیمتیں دینے
سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

۳۵۴- اگر مساوات

ا لا + ب ما + ج ی = ر اور اَ لا + بَ ما + جَ ی = رَ

کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو سکے تو عام حل
معلوم کرنے کے لئے یوں عمل کرنا چاہئے۔
فرض کرو کہ ف، گ، ہ ایک حل ہے، تب

ا ف + ب گ + ج ہ = ر اور اَ ف + بَ گ + جَ ہ = رَ

تفریق کرنے سے

ا (لا - ف) + ب (ما - گ) + ج (ی - ہ) = ۰

اَ(لا-ف)+بَ(ما-گ)+جَ(ی-ھ)=۰

ان سے (لا-ف)/(ب جَ-جَ بَ) = (ما-گ)/(ج اَ-جَ ا) = (ی-ھ)/(ا بَ-اَ ب) = د/ک

جہاں د ایک صحیح عدد ہے اور ک نسب نماؤں ب جَ-ج بَ، ج اَ-جَ ا، اور ا بَ-اَ ب کے عاد اعظم کو تعبیر کرتا ہے، پس عام حل یہ ہے

لا = ف+(ب جَ-بَ ج) د/ک، ما = گ+(ج اَ-جَ ا) د/ک

ی = ھ+(ا بَ-اَ ب) د/ک

امثلہ نمبری ۲۶

ذیل کی مساواتوں کا عام حل اور چھوٹے سے چھوٹا مثبت حل صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

۱- ۷۷۵ لا - ۱۱۷ ما = ۱، ۲- ۴۵۵ لا - ۵۱۹ ما = ۱

۳- ۴۳۶ لا - ۳۹۳ ما = ۵

۴- ۱ پونڈ ۱۹ شلنگ ۶ پنس کتنے طریقوں سے فلورنوں اور نصف کراؤنوں میں ادا کئے جا سکتے ہیں۔

۵- معلوم کرو کہ مساوات ۱۱لا + ۱۵ما = ۱۰۳۱ کے حل مثبت صحیح اعداد میں کتنے ہیں۔

۶- دو کسریں معلوم کرو جن کے نسب نما بالترتیب ۷ اور ۹ ہوں اور جنکا مجموعہ ۱ ۱۰/۶۳ کے مساوی ہو۔

مفرد کسور واجب معلوم کرو جن کے نسب نما بالترتیب
ہوں اور جن کا فرق $\frac{۱}{۲۴}$ کے مساوی ہو۔
ت خاص رقم میں لا پونڈ ما شلنگ ہیں اور یہ رقم ما پونڈ
ف کا نصف ہے، رقم کی مقدار معلوم کرو۔
ف صحیح اعداد میں حل کرو۔

+ ۷ ما + ۴ ی = ۱۲۲
+ ۸ ما − ۶ ی = ۱۴۵

۱۰۔ ۱۲ لا − ۱۱ ما + ۴ ی = ۲۲
۴ لا + ۵ ما + ی = ۱۷

− ۲۱ ما = ۳۸
+ ۴ ی = ۳۴

۱۲۔ ۱۳ لا + ۱۱ ی = ۱۰۳
۷ ی − ۵ ما = ۴

+ ۴ ما + ۱۹ ی = ۸۴

۱۴۔ ۲۳ لا + ۱۷ ما + ۱۱ ی = ۱۳۰

ن تمام مثبت صحیح اعداد کی عام سے عام شکل معلوم کرو کہ
کو ۵، ۷، ۸ پر تقسیم کیا جائے تو باقیاں بالترتیب ۳،
ہیں۔
و چھوٹے سے چھوٹے صحیح اعداد معلوم کرو کہ اگر ان کو ۳، ۷،
م کیا جائے تو باقیاں بالترتیب ۱، ۶، ۵ ہوں۔
بعی پیمانہ میں تین ہندسوں کا ایک عدد تسعی پیمانہ میں
ی ہندسوں سے تعبیر ہوتا ہے لیکن ہندسوں کی ترتیب
اتی ہے، اگر ہر صورت میں درمیانی ہندسہ صفر ہو تو عشری
س عدد کی قیمت معلوم کرو۔
صحیح اعداد ۶، ا، ب سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ا اور
تمام ممکن قیمتیں معلوم کرو۔
ساوی طول کی دو سلاخیں الگ الگ ۲۵۰ اور ۲۴۳ مساوی
میں تقسیم کی گئی ہیں، اگر ان کے سرے ایک دوسرے پر
ہوں تو بتاؤ کہ کونسے نشان ایک دوسرے کے قریب ترین

واقع ہوں گے۔

۲۰۔ تین گھنٹے ایک ساتھ بجنا شروع ہوتے ہیں اور بالترتیب ۳۶ ۲۹، ۳۴ سکنڈوں کے وقفوں سے بجتے ہیں، دوسرا اور تیسرا گھنٹہ پہلے گھنٹہ کی نسبت بالترتیب ۳۹ اور ۴۰ سکنڈ زیادہ بجتے ہیں اگر شب ۲۰ منٹ سے پہلے بجنا بند ہو جائیں تو بتاؤ کہ ہر ایک گھنٹہ کتنی دفعہ بجا ہے۔

۲۱۔ ج کی ایسی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو کہ مساوات ۷لا+۹ما=ج کے مثبت صحیح اعداد میں پورے چھ حل ہوں۔

۲۲۔ ج کی ایسی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کروکہ مساوات ۴لا+۱۱ما=ج کے مثبت صحیح اعداد میں پورے پانچ حل ہوں۔

۲۳۔ وہ حدود معلوم کرو جن کے اندر ج کو واقع ہونا چاہئے تاکہ مساوات ۱۹لا + ۱۴ما = ج کے چھ حل ہوں جبکہ صفر والے حل شمار میں نہ لائے جائیں۔

۲۴۔ ثابت کروکہ اگر مساوات الا + ب ما = ج کے مثبت صحیح اعداد میں پورے ن حل ہوں تو ج کی بڑی سے بڑی قیمت (ن + ۱) اب - ا - ب ہے اور چھوٹی سے چھوٹی (ن - ۱) اب + ا + ب جبکہ صفر والے حلوں کو شمار میں نہ لایا جائے۔

ستائیسواں باب

متوالی مسلسل کسور

۳۵۵۔ پچیسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مسلسل کسر کو جس کے خارج قسمت ناطق ہوں ایک ایسی معمولی کسر میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صحیح عدد ہوں، اس لحاظ سے یہ کسر غیر ناطق یا اصم مقدار کے مساوی نہیں ہو سکتی۔ لیکن یہاں ہم ثابت کرینگے کہ درجۂ دوم کی مقدار اصم ایک ایسی لا متناہی مسلسل کسر میں تحویل ہو سکتی ہے جس کے خارج قسمت متوالی ہوں، پہلے ہم ایک عددی مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال۔ $\sqrt{19}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ اور ان کسروں کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو اس کی قیمت کی طرف استدلاق کرے۔

$$\sqrt{19} = 4 + (\sqrt{19} - 4) = 4 + \frac{3}{\sqrt{19} + 4}$$

$$\frac{\sqrt{19} + 4}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19} - 2}{3} = 2 + \frac{5}{\sqrt{19} + 2}$$

$$\frac{\sqrt{19} + 2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19} - 3}{5} = 1 + \frac{2}{\sqrt{19} + 3}$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{19}-3}{2} = 3 + \frac{5}{\sqrt{19}+3}$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19}-2}{5} = 1 + \frac{3}{\sqrt{19}+2}$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19}-4}{3} = 2 + \frac{1}{\sqrt{19}+4}$$

$$\sqrt{19}+4 = 8 + (\sqrt{19}-4) = 8 + \dots\dots\dots$$

اس کے بعد خارج قسمت ۲، ۱، ۳، ۱، ۲، ۸ متوالی ہونا شروع ہوتے ہیں، اس لئے

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{8+}\ \dots\dots$$

یہاں یہ بات قابل غور ہے کہ جب ہم اس خارج قسمت پر پہنچ جاتے ہیں جو پہلے خارج قسمت سے دُگنا ہو تو خارج قسمت متوالی ہونا شروع ہوتے ہیں۔ دفعہ ۳۶۱ میں ہم ثابت کرینگے کہ ہر صورت میں یہی واقع ہوتا ہے۔

[تشریح۔ اوپر کی ہر ایک سطر میں ہم نے ایک ہی طرح کا عمل کیا۔ مثلاً دوسری سطر پر غور کرو۔ ہم پہلے $\frac{\sqrt{19}+4}{3}$ کا بڑے سے بڑا صحیح عدد معلوم کرتے ہیں یہ عدد ۲ ہے اور باقی $\frac{\sqrt{19}+4}{3} - 2$ یعنی $\frac{\sqrt{19}-2}{3}$ ہے، اس کے بعد ہم شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\sqrt{19}-2$ کے مزدوج سے ضرب دیتے ہیں پھر حاصل یعنی $\frac{5}{\sqrt{19}+2}$ کو الٹا کر ہم منطق نسب نما سے نئی سطر شروع کرتے ہیں]

سات متدق جو دفعہ ۲۳۶ کے مطابق بنائے گئے ہیں یہ ہیں

$$\frac{۳}{۱}،\ \frac{۹}{۲}،\ \frac{۱۳}{۳}،\ \frac{۴۸}{۱۱}،\ \frac{۶۱}{۱۴}،\ \frac{۱۷۰}{۳۹}،\ \frac{۱۴۲۱}{۳۲۶}$$

متدق کو کسر کی بجائے لینے سے غلطی $\left(\frac{۱}{۳۲۶}\right)^۲$ سے کم ہے

$\left(\frac{۱}{۳۲۰}\right)^۲$ سے یا $\frac{۱}{۱۰۲۴۰۰}$ سے کم ہے اور بنائً علیہ

۰۰۱ سے کم ہے گویا ساتویں متدق سے اعشاریہ کے کم از درجوں تک درست قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۳ ـ ہر دوری کسر مسلسل کی قیمت ایک ایسی مساوات درجہ دوم اصل کے مساوی ہوتی ہے جس کے سر ناطق ہوں

سل کسر کو لا سے اور دوری حصہ کو ما سے تعبیر کرو اور کرو کہ

$$لا = ا + \frac{۱}{ب +}\ \frac{۱}{ج +} \cdots\cdots \frac{۱}{ھ +}\ \frac{۱}{ک +}\ \frac{۱}{ما}$$

$$ما = م + \frac{۱}{ن +} \cdots\cdots\cdots \frac{۱}{ء +}\ \frac{۱}{و +}\ \frac{۱}{ما}$$

ا، ب، ج، ھ، ک، م، ن، ... ء، و مثبت صحیح اعداد ہیں

رو کہ $\frac{ق}{ل}$، $\frac{قَ}{لَ}$ بالترتیب خارج قسمتوں ھ، ک کے متناظر متدق ہیں، تب چونکہ ما مکمل خارج قسمت ہے اس لئے

$$\frac{قَ ما + ق}{لَ ما + ل}$$ جس سے $$ما = \frac{ق - ل لا}{لَ لا - قَ}$$

رو کہ $\frac{ر}{س}$، $\frac{رَ}{سَ}$ بالترتیب خارج قسمتوں ء، و کے جواب

میں ما کے متدرق ہیں، تب ما = $\frac{\bar{ق} ما + ق}{\bar{ل} ما + ل}$

ما کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کرنے اور مختصر کرنے سے ہمیں درجہ دوم کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جسکے سر ناطق ہیں۔

ما کی قیمت جس مساوات سے حاصل ہوتی ہے وہ

$\bar{ل} ما^2 + (ل - \bar{ق}) ما - ق = ۰$ ہے، اس کی اصلیں حقیقی اور مختلف ہیں

اگر ما کی مثبت قیمت لا = $\frac{\bar{ق} ما + ق}{\bar{ل} ما + ل}$ میں درج کی جائے

اور نسب نما کو ناطق بنایا جائے تو لا کی جو قیمت حاصل ہوگی

اس کی شکل $\frac{ا + \sqrt{ب}}{ج}$ ہوگی جہاں ا، ب، ج صحیح

اعداد ہیں اور ب مثبت ہے کیونکہ ما کی قیمت حقیقی ہے۔

مثال۔ سلسلہ $۱ + \frac{1}{2+} \frac{1}{3+} \frac{1}{2+} \frac{1}{3+} \ldots$ کو مقدار اصم کی شکل میں لاؤ

فرض کرو کہ کسر مسلسل کی قیمت لا ہے، تب

$لا - ۱ = \frac{1}{2+} \frac{1}{3 + (لا - 1)}$ جس سے $۲ لا^2 + ۲ لا - ۷ = ۰$

مسلسل کسر کی قیمت اس مساوات کی مثبت اصل کے مساوی

ہے اور اس لئے $\frac{\sqrt{15} - 1}{2}$ کے مساوی ہے۔

امثلہ نمبری ۲۷ (ا)

ذیل کی مقادیر اصم کو مسلسل کسور کی شکل میں لاؤ اور ہر ایک کسر کا ۶ واں متدرق معلوم کرو۔

۱- $\sqrt{3}$ ۲- $\sqrt{5}$ ۳- $\sqrt{6}$ ۴- $\sqrt{8}$ ۵- $\sqrt{11}$ ۶- $\sqrt{14}$

۸- $\sqrt{۲۲}$ ۹- $\sqrt{۳۲}$ ۱۰- $\sqrt{۲۴}$ ۱۱- $\sqrt{۵۴}$

۱۳- $\sqrt{\frac{۱}{۲۲}}$ ۱۴- $\sqrt{\frac{۱}{۲۳}}$ ۱۵- $\sqrt{\frac{۷}{۵}}$ ۱۶- $\sqrt{\frac{۴}{۱۱}}$

$\frac{۲}{۶}$ کو $\sqrt{۱۷}$ کی بجائے لینے سے جو غلطی واقع ہوتی
...ی حدود معلوم کرو۔

...ی کی حدود دریافت کرو جب کہ $\frac{۹۱۶}{۱۹۱}$ کو $\sqrt{۲۳}$ کی
...یا جائے۔

$\sqrt{۱۰}$ کا پہلا متدق معلوم کرو جو اعشاریہ کے پانچویں
... درست ہو۔

$\sqrt{۱۷}$ کا پہلا متدق معلوم کرو جو اعشاریہ کے پانچویں
... درست ہو۔

...ی کی مساواتوں میں سے ہر ایک کی مثبت اصل کو
...سر کی شکل میں لاؤ۔

... $+ ۲$لا $- ۱ = ۰$ ۲۲- لا$^۲ - ۴$لا $- ۳ = ۰$

... لا$^۲ - ۸$لا $- ۳ = ۰$

...اوات لا$^۲ - ۵$لا $+ ۳ = ۰$ کی ہر ایک اصل کو مسلسل
...کل میں لاؤ۔

$+۱ \frac{۱}{+۶} \frac{۱}{+۶} \frac{۱}{+۶}$ .... کی قیمت معلوم کرو۔

$\frac{۱}{+۱} \frac{۱}{+۳} \frac{۱}{+۱} \frac{۱}{+۳}$ ...... کی قیمت معلوم کرو۔

$+ \frac{۱}{+۱} \frac{۱}{+۲} \frac{۱}{+۳} \frac{۱}{+۱} \frac{۱}{+۲} \frac{۱}{+۳}$ ...... کی قیمت معلوم

۲۸- $5+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{10+}\cdots\cdots$ کی قیمت معلوم کرو۔

۲۹- ثابت کرو کہ

$$3+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots\cdots = 3\left(1+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\cdots\right)$$

۳۰- ذیل کی دو لامتناہی کسور کا باہمی فرق معلوم کرو

$$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\cdots\cdots ،$$

اور $\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\cdots\cdots$

۳۵۷- درجہ دوم کی ایک مقدار اصم کو مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کرو۔

فرض کرو کہ ث ایک مثبت صحیح عدد ہے جو پورا مربع نہیں ہے اور بڑے سے بڑا صحیح عدد جو $\sqrt{\text{ث}}$ میں شامل ہے ا_1 ہے، تب

$$\sqrt{\text{ث}} = \text{ا}_1 + (\sqrt{\text{ث}} - \text{ا}_1) = \text{ا}_1 + \frac{\text{ل}_1}{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_1} \quad \text{جہاں}\ \text{ل}_1 = \text{ث} - \text{ا}_1^2$$

نیز فرض کرو کہ بڑے سے بڑا صحیح عدد جو $\frac{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_1}{\text{ل}_1}$ میں شامل ہے ب_1 ہے، تب

$$\frac{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_1}{\text{ل}_1} = \text{ب}_1 + \frac{\sqrt{\text{ث}} - \text{ب}_1\text{ل}_1 + \text{ا}_1}{\text{ل}_1} = \text{ب}_1 + \frac{\sqrt{\text{ث}} - \text{ا}_2}{\text{ل}_1} = \text{ب}_1 + \frac{\text{ل}_2}{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_2}$$

جہاں $\text{ا}_2 = \text{ب}_1\text{ل}_1 - \text{ا}_1$ اور $\text{ل}_1\text{ل}_2 = \text{ث} - \text{ا}_2^2$

اسی طرح سے $\frac{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_2}{\text{ل}_2} = \text{ب}_2 + \frac{\sqrt{\text{ث}} - \text{ا}_3}{\text{ل}_2} = \text{ب}_2 + \frac{\text{ل}_3}{\sqrt{\text{ث}} + \text{ا}_3}$

جہاں $ا_۳ = ب_۲ ل_۲ - ا_۲$ اور $ل_۲ ل_۳ = ث - ا_۳^۲$
علیٰ ہذا القیاس، عام طور پر

$$\frac{\sqrt{ث} + ا_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}} = ب_{ن-۱} + \frac{\sqrt{ث} - ا_ن}{ل_{ن-۱}} = ب_{ن-۱} + \frac{ل_ن}{\sqrt{ث} + ا_ن}$$

جہاں $ا_ن = ب_{ن-۱} ل_{ن-۱} - ا_{ن-۱}$ اور $ل_{ن-۱} ل_ن = ث - ا_ن^۲$

اس لئے $\sqrt{ث} = ا_۱ + \frac{۱}{ب_۱ +} \frac{۱}{ب_۲ +} \frac{۱}{ب_۳ +} \frac{۱}{ب_۴ +} \dots$

اس طرح سے $\sqrt{ث}$ کو ایک لامتناہی مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ ہم ابھی یہ ثابت کرینگے کہ یہ کسر متوالی دوروں پر مشتمل ہے، یہ ظاہر ہے کہ نیا دور شروع ہوگا جب کوئی مکمل خارج قسمت پہلی دفعہ عود کرکے آئیگا۔

ہم خارج قسمتوں

$$\sqrt{ث}،\ \frac{\sqrt{ث} + ا_۲}{ل_۱}،\ \frac{\sqrt{ث} + ا_۳}{ل_۲}،\ \frac{\sqrt{ث} + ا_۴}{ل_۳}،\ \dots\dots$$

کے سلسلہ کو بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے مکمل خارج قسمت کے نام سے موسوم کرینگے۔

۳۵۸۔ دفعہ ماقبل سے یہ ظاہر ہے کہ مقادیر $ا_۱$، $ب_۱$، $ب_۲$، $ب_۳$ سب مثبت صحیح عدد ہیں، اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ مقادیر $ا_۲$، $ا_۳$، ...... $ل_۱$، $ل_۲$، $ل_۳$ ...... وغیرہ بھی مثبت صحیح عدد ہیں۔

فرض کرو کہ $\frac{ق}{ل}$، $\frac{ق'}{ل'}$، $\frac{ق''}{ل''}$ تین متواتر مستدق ہیں

√ث کے اور $\frac{ق'}{ل'}$ متدق ہے جو جزوی خارج قسمت بن
کے جواب میں ہے۔

اس منزل پر کمل خارج قسمت $\frac{\sqrt{ث}+لن}{لسن}$ ہوگا، اس لئے

$$\sqrt{ث} = \frac{\frac{\sqrt{ث}+لن}{لسن}\,ق' + ق}{\frac{\sqrt{ث}+لن}{لسن}\,ل' + ل} = \frac{ق'\sqrt{ث} + لن\,ق' + لسن\,ق}{ل'\sqrt{ث} + لن\,ل' + لسن\,ل}$$

کسریں صاف کرنے اور ناطق اور غیر ناطق حصوں کو جداگانہ
مساوی کرنے سے $لن\,ق' + لسن\,ق = ث\,ل'$، $لن\,ل' + لسن\,ل = ق'$
جس سے $لن(ق\,ل' - ق'\,ل) = ق\,ق' - ل\,ل'\,ث$ اور

$$لسن(ق\,ل' - ق'\,ل) = ث\,ل'^2 - ق'^2$$

لیکن $ق\,ل' - ق'\,ل = \pm ۱$ اور $ق\,ل' - ق'\,ل$، $ق\,ق' - ل\,ل'\,ث$
اور $ث\,ل'^2 - ق'^2$ کی علامت ایک ہی ہے (دیکھو دفعہ ۳۴۴)
اس لئے لن اور لسن مثبت صحیح اعداد ہیں، چونکہ دو متدق
کمل خارج قسمت $\frac{\sqrt{ث}+لن}{لسن}$ سے پہلے آتے ہیں، یہ تحقیقات
ن کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو ۱ سے بڑی ہوں برقرار
رہتی ہے۔

۳۵۹ — ثابت کرو کہ کمل اور جزوی خارج قسمت متوالی ہوتے ہیں۔
دفعہ ۳۵۷ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ $لن\,لسن_{ن-۱} = ث - لن^2$
نیز لن اور لسن مثبت صحیح اعداد ہیں، اس لئے لن لازماً

کم ہوگا $\frac{ب}{ا}$ سے، پس $ل_ن$ بڑا نہیں ہو سکتا $ا$ سے، لہذا یہ سوائے ۱، ۲، ۳، ... $ا$ کے اور کوئی قیمت اختیار نہیں کر سکتا یعنی $ل_ن$ جو مختلف قیمتیں اختیار کر سکتا ہے اُن کی تعداد کبھی $ا$ سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

نیز $ل_{ن+۱} = ل_ن ب_ن - ل_ن$ یعنی $ل_ن ب_ن = ل_ن + ل_{ن+۱}$، پس $ل_ن ب_ن$، ۲$ا$ سے بڑا نہیں ہو سکتا، نیز $ب_ن$ ایک مثبت صحیح عدد ہے اس لئے $ل_ن$ کبھی ۲$ا$ سے بڑا نہیں ہو سکتا لہذا $ل_ن$ سوائے ۱، ۲، ۳، ... ۲$ا$ کے اور کوئی قیمت اختیار نہیں کر سکتا یعنی $ل_ن$ جو مختلف قیمتیں اختیار کر سکتا ہے اُن کی تعداد کبھی ۲$ا$ سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

پس مکمل خارج قسمت $\frac{\sqrt{ا} + ل_ن}{ل_ن}$ کی مختلف قیمتوں کی تعداد کبھی ۲$ا^۲$ سے بڑی نہیں ہو سکتی اس لئے ضرور ہے کہ کوئی ایک مکمل خارج قسمت اور بنا بریں اس کے بعد کے تمام خارج قسمت عود کریں یعنی متوالی ہوں۔

نیز $ب_ن$، $\frac{\sqrt{ا} + ل_ن}{ل_ن}$ میں کا بڑے سے بڑا صحیح عدد ہے، پس جزوی خارج قسمت بھی ضرور متوالی ہوں گے۔ اور ہر دور میں جزوی خارج قسمتوں کی تعداد ۲$ا^۲$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

۳۶۰۔ ثابت کرو کہ $ا < ل_ن + ل_ن$

ہم جانتے ہیں کہ $ل_{ن-۱} + ل_ن = ب_{ن-۱} ل_{ن-۱}$

$\therefore$ $ل_{ن-۱} + ل_ن =$ یا $> ل_{ن-۱}$

چونکہ $ب_{ن-۱}$ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\therefore \sqrt{\text{ث}} + \text{ل}_{\text{ن}} > \text{لس}_{\text{ن}-1}$$

لیکن $\text{ث} - \text{ل}_{\text{ن}}^2 = \text{لس}_{\text{ن}}\,\text{لس}_{\text{ن}-1}$

$$\therefore \sqrt{\text{ث}} - \text{ل}_{\text{ن}} < \text{لس}_{\text{ن}}$$

$\therefore \text{ل} - \text{ل}_{\text{ن}} < \text{لس}_{\text{ن}}$، پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۳۶۱ - ثابت کرو کہ دور دوسرے جزوی خارج قسمت سے شروع ہوتا ہے اور پہلے جزوی خارج قسمت سے دگنے خارج قسمت پر ختم ہوتا ہے۔

ہم دفعہ ۳۵۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ خارج قسمتوں کا متوالی ہونا لازمی ہے، اس لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ (ن + ۱) واں مکمل خارج قسمت (س + ۱) ویں مکمل خارج قسمت پر عود کرکے آتا ہے یعنی (ن + ۱) واں اور (س + ۱) واں مکمل خارج قسمت باہم مساوی ہیں، تب

$$\text{ل}_{\text{س}} = \text{ل}_{\text{ن}} ،\ \text{لس}_{\text{س}} = \text{لس}_{\text{ن}} ،\ \text{ب}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{ن}}$$

ہم ثابت کرینگے کہ

$$\text{ل}_{\text{س}-1} = \text{ل}_{\text{ن}-1} ،\ \text{لس}_{\text{س}-1} = \text{لس}_{\text{ن}-1} ،\ \text{ب}_{\text{س}-1} = \text{ب}_{\text{ن}-1}$$

ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{لس}_{\text{س}-1}\,\text{لس}_{\text{س}} = \text{ث} - \text{ل}_{\text{س}}^2 = \text{ث} - \text{ل}_{\text{ن}}^2 = \text{لس}_{\text{ن}}\,\text{لس}_{\text{ن}-1} = \text{لس}_{\text{ن}-1}\,\text{لس}_{\text{س}}$$

$$\therefore \text{لس}_{\text{س}-1} = \text{لس}_{\text{ن}-1}$$

نیز $\text{ل}_{\text{ن}-1} + \text{ل}_{\text{ن}} = \text{ب}_{\text{ن}-1}\,\text{لس}_{\text{ن}-1}$ ، $\text{ل}_{\text{س}-1} + \text{ل}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}-1}\,\text{لس}_{\text{س}-1}$

$$= \text{ب}_{\text{س}-1}\ \text{ل}_{\text{ن}-1}$$

$$\therefore\ \text{ل}_{\text{ن}-1} - \text{ل}_{\text{س}-1} = \text{ل}_{\text{ن}-1}\left(\text{ب}_{\text{ن}-1} - \text{ب}_{\text{س}-1}\right)$$

$$\frac{\text{ل}_{\text{ن}-1} - \text{ل}_{\text{س}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}-1}} = \text{ب}_{\text{ن}-1} - \text{ب}_{\text{س}-1} = 0$$ یا کوئی صحیح عدد

دفعہ ۳۶۰ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ $\text{اُ} - \text{اُ}_{\text{ن}-1} < \text{ل}_{\text{ن}-1}$

...$\text{اُ} - \text{ل}_{\text{س}-1} < \text{ل}_{\text{س}-1}$ یعنی $\text{اُ} - \text{اُ}_{\text{س}-1} < \text{ل}_{\text{ن}-1}$

...لئے $\text{ل}_{\text{ن}-1} - \text{ل}_{\text{س}-1} < \text{ل}_{\text{ن}-1}$، پس $\frac{\text{ل}_{\text{ن}-1} - \text{ل}_{\text{س}-1}}{\text{ل}_{\text{ن}-1}}$ کم ہے

...سے اس لئے یہ لازماً صفر ہوگا۔

...ں $\text{ل}_{\text{س}-1} = \text{ل}_{\text{ن}-1}$ نیز $\text{ب}_{\text{س}-1} = \text{ب}_{\text{ن}-1}$

...لئے اگر (ن + ۱) واں مکمل خارج قسمت متوالی ہو تو

...اں مکمل خارج قسمت بھی لازماً متوالی ہوگا، اس لئے...
...- ۱) واں مکمل خارج قسمت بھی لازماً متوالی ہوگا، علیٰ ہٰذا القیاس
...ثبوت برقرار رہتا ہے تاوقتیکہ ن، ۲ سے کم نہ ہو جائے

...و دفعہ ۳۵۸) پس مکمل خارج قسمت دوسرے خارج قسمت $\frac{\text{ب}_1\text{اُ} + \text{اُ}}{\text{ل}_1}$...

...شروع ہوکر متوالی ہوتے ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ
...ت دوسرے جزوی خارج قسمت ب_1 سے شروع ہوتی
...اب ہم یہ بتائیں گے کہ یہ جزوی خارج قسمت
...پر ختم ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{\sqrt{\text{ث}}+\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ر}_{\text{ن}}}$ وہ مکمل خارج قسمت ہے جو دوسرے مکمل خارج قسمت $\frac{\sqrt{\text{ث}}+\text{ل}_{۱}}{\text{ر}_{۱}}$ سے عین پہلے واقع ہوتا ہے جبکہ موخرالذکر عود کرکے آئے، تب $\frac{\sqrt{\text{ث}}+\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ر}_{\text{ن}}}$ اور $\frac{\sqrt{\text{ث}}+\text{ل}_{۱}}{\text{ر}_{۱}}$ دو متواتر مکمل خارج قسمت ہیں، اسلئے

$$\text{ل}_{\text{ن}}+\text{ل}_{۱}=\text{ر}_{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}}،\quad \text{ر}_{\text{ن}}\,\text{ر}_{۱}=\text{ث}-\text{ل}_{۱}^{۲}$$

لیکن $\text{ث}-\text{ل}_{۱}^{۲}=\text{ر}_{۱}$، اس لئے $\text{ر}_{\text{ن}}=۱$

نیز $\text{ل}_{۱}-\text{ل}_{\text{ن}}<\text{ر}_{\text{ن}}$ یعنی <۱، اسلئے $\text{ل}_{۱}-\text{ل}_{\text{ن}}=۰$ یعنی

$$\text{ل}_{\text{ن}}=\text{ل}_{۱}$$

نیز $\text{ل}_{\text{ن}}+\text{ل}_{۱}=\text{ر}_{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}}=\text{ب}_{\text{ن}}$، اس لئے $\text{ب}_{\text{ن}}=۲\,\text{ل}_{۱}$،

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۳۶۲۔ ثابت کرو کہ کسی دور میں اول اور آخر سے متساوی الفصل جزوی خارج قسمت باہم مساوی ہوتے ہیں جبکہ آخری جزوی خارج قسمت کو دور میں شمار نہ کیا جائے۔

فرض کرو کہ آخری مکمل خارج قسمت $\frac{\sqrt{\text{ث}}+\text{ل}_{\text{ن}}}{\text{ر}_{\text{ن}}}$ ہے، تب

$$\text{ر}_{\text{ن}}=۱،\ \text{ل}_{\text{ن}}=\text{ل}_{۱}،\ \text{ب}_{\text{ن}}=۲\,\text{ل}_{۱}$$

ہم ثابت کرینگے کہ

$$\text{ر}_{\text{ن}-۱}=\text{ر}_{۱}،\ \text{ل}_{\text{ن}-۱}=\text{ل}_{۲}،\ \text{ب}_{\text{ن}-۱}=\text{ب}_{۱}$$

$ل_{ن-۲} = ل_۲$ ، $ر_{ن-۲} = ر_۳$ ، $ب_{ن-۲} = ب_۲$

. . . .

ہم جانتے ہیں کہ $ل_{ن-۱} = ل_ن ل_{ن-۱} = ث - ر_ن^۲ = ث - ر_۱^۲ = ل_۱$

$ر_{ن-۱} + ر_۱ = ر_{ن-۱} + ر_ن = ل_{ن-۱} ب_{ن-۱} = ل_۱ ب_{ن-۱}$

اور $ر_۱ + ر_۲ = ل_۱ ب_۱$

$\therefore ر_۲ - ر_{ن-۱} = ل_۱ (ب_۱ - ب_{ن-۱})$

$\therefore \frac{ر_۲ - ر_{ن-۱}}{ل_۱} = ب_۱ - ب_{ن-۱} = ۰$ یا کوئی صحیح عدد

لیکن $\frac{ر_۲ - ر_{ن-۱}}{ل_۱} < \frac{ر_۱ - ر_{ن-۱}}{ل_۲}$ یعنی $< \frac{ر_۱ - ر_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ جو ایک سے کم ہے

لہٰذا $ر_۲ - ر_{ن-۱} = ۰$ اس لئے $ر_{ن-۱} = ر_۲$ اور $ب_{ن-۱} = ب_۱$

اسی طرح سے $ل_{ن-۲} = ل_۲$ ، $ر_{ن-۲} = ر_۳$ اور $ب_{ن-۲} = ب_۲$ اور علیٰ ہذا القیاس

۳۶۱ـ دفعات ۳۶۱ اور ۳۶۲ کے نتائج سے ظاہر ہے کہ جب درجہ دوم کی کسی مقدار اصم $\sqrt{ث}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کیا جائے تو یہ کسر ذیل کی شکل اختیار کرے گی

$$ر_۱ + \frac{1}{ب_۱ +} \frac{1}{ب_۲ +} \frac{1}{ب_۳ +} \cdots\cdots + \frac{1}{ب_۳ +} \frac{1}{ب_۲ +} \frac{1}{ب_۱ +} \frac{1}{۲ر_۱ +} \cdots$$

۳۶۱ـ متوالی دوروں کے ماقبل الآخر مستدق معلوم کرو۔
فرض کرو کہ متوالی دور میں جزوی خارج قسمتوں کی تعداد ن ہے
جب متوالی دوروں کے ماقبل الآخر مستدق بالترتیب ن واں ،
۲ن واں ، ۳ن واں مستدق ہونگے ، فرض کرو کہ یہ بالترتیب

$\frac{ق_ن}{ل_ن}$ ، $\frac{ق_{۲ن}}{ل_{۲ن}}$ ، $\frac{ق_{۳ن}}{ل_{۳ن}}$ ، ..... ہیں

اب $\sqrt{ت} = ا_1 + \frac{1}{ب_1+} \frac{1}{ب_2+} \frac{1}{ب_3+} \cdots \frac{1}{ب_{ن-1}+} \frac{1}{2ا_1+} \cdots$

گویا $\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}}$ کے متناظر جزوی خارج قسمت ۲ $ا_1$ ہے، اسلئے

$$\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}} = \frac{2ا_1 ق_ن + ق_{ن-1}}{2ا_1 ل_ن + ل_{ن-1}}$$

اس منزل پر پورا خارج قسمت ذیل کے دَور پر مشتمل ہے

$$2ا_1 + \frac{1}{ب_1+}\frac{1}{ب_2+}\frac{1}{ب_3+}\cdots\frac{1}{ب_{ن-1}+}\cdots$$

اور اس لئے $ا_1 + \sqrt{ت}$ کے مساوی ہے، لہذا

$$\sqrt{ت} = \frac{(ا_1+\sqrt{ت})ق_ن + ق_{ن-1}}{(ا_1+\sqrt{ت})ل_ن + ل_{ن-1}}$$

کسروں سے پاک کرنے اور ناطق اور غیر ناطق حصوں کو جداگانہ مساوی کرنے سے

$$ا_1 ق_ن + ق_{ن-1} = ت ل_ن ، \quad ا_1 ل_ن + ل_{ن-1} = ق_ن \cdots (1)$$

نیز $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ اور $\frac{ق_{ن-1}}{ل_{ن-1}}$ کی مدد سے

خارج قسمت $2ا_1 + \frac{1}{ب_1+}\frac{1}{ب_2+}\cdots\frac{1}{ب_{ن-1}}$

لینے سے جو $ا_1 + \frac{ق_ن}{ل_ن}$ کے مساوی ہے $\frac{ق_{2ن}}{ل_{2ن}}$ کی قیمت

حاصل ہو سکتی ہے۔

پس $\frac{ق_{۲ن}}{ل_{۲ن}} = \frac{(ا_ا + \frac{ق_ن}{ل_ن})ق_ن + ق_{ن-۱}}{(ا_ا + \frac{ق_ن}{ل_ن})ل_ن + ل_{ن-۱}} = \frac{ث ل_ن + \frac{ق_ن}{ل_ن} \times ق_ن}{ق_ن + \frac{ق_ن}{ل_ن} \times ل_ن}$ سے

$$\therefore \frac{ق_{۲ن}}{ل_{۲ن}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{ق_ن}{ل_ن} + \frac{ث ل_ن}{ق_ن}\right) \ldots\ldots (۲)$$

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ج ویں متوالی دَور میں ماقبل الآخر مستدق $\frac{ق_{جن}}{ل_{جن}}$ ہو تو

$$ا_ا ق_{جن} + ق_{جن-۱} = ث ل_{جن} ، \quad ا_ا ل_{جن} + ل_{جن-۱} = ق_{جن}$$

اور اِن مساواتوں کو استعمال کرنے سے ہمیں $\frac{ق_{۳ن}}{ل_{۳ن}}$ ، $\frac{ق_{۴ن}}{ل_{۴ن}}$ ، ..... کی قیمتیں یکے بعد دیگرے معلوم ہو سکتی ہیں۔

طالب علم دیکھ لے کہ مساوات (۲) ن کے تمام اضعاف کے لئے درست رہتی ہے، مثلاً

$$\frac{ق_{۲جن}}{ل_{۲جن}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{ق_{جن}}{ل_{جن}} + \frac{ث ل_{جن}}{ق_{جن}}\right)$$

ثبوت ویسا ہی ہے جو پہلے دیا جا چکا ہے۔

۳۶۵۔ دفعہ ۳۵۶ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک دوری مسلسل کسر ناطق سروں والی مساوات درجہ دوم کی اصل سے تعبیر ہو سکتی ہے۔ برعکس اس کے دفعہ ۳۵۷ کے طریقہ سے ہم یہ ثابت

کر سکتے ہیں کہ $\frac{ا+\sqrt{ب}}{ج}$ کی شکل کے کسی جملہ کو جس میں ا، ب، ج
مثبت صحیح اعداد ہیں اور ب پورا مربع نہیں ہے ایک متوالی
مسلسل کسر میں تحویل کیا جا سکتا ہے، اس صورت میں دَوری
حصہ بالعموم دوسرے جزوی خارج قسمت سے شروع نہیں ہوگا،
نہ ہی آخری جزوی خارج قسمت پہلے سے دگنا ہوگا۔

متوالی مسلسل کسور کے مضمون کے متعلق مزید معلومات حاصل
کرنے کے لئے طالب علم کو چاہیئے کہ سیرٹ کے اعلیٰ الجبرا
کے کورس کا مطالعہ کرے یا طامس مائیٹر صاحب ایم۔ اے
ایف۔ آر۔ ایس کی کتاب "درجہ دوم کی مقدار اصم کی تعبیر
مسلسل کسروں میں" ملاحظہ کرے۔

امثلہ نمبری ۲۷ (ب)

ذیل کی مقادیر اصم کو مسلسل کسور کی شکل میں بیان کرو
اور ہر ایک کا چوتھا مستدق معلوم کرو

۱۔ $\sqrt{ا^{2}+1}$ ۲۔ $\sqrt{ا^{2}-ا}$ ۳۔ $\sqrt{ا^{2}-1}$

۴۔ $\sqrt{1+\frac{1}{ا}}$ ۵۔ $\sqrt{ا^{2}+\frac{2ا}{ب}}$ ۶۔ $\sqrt{ا^{2}-\frac{ا}{ن}}$

۷۔ ثابت کرو کہ $\sqrt{9ا^{2}+2} = 3ا + \frac{1}{2ا+}\,\frac{1}{6ا+}\,\frac{1}{2ا+}\,\frac{1}{6ا+}\cdots$
اور پانچواں مستدق معلوم کرو۔

۸۔ ثابت کرو کہ

$$ق + \frac{2}{1+}\,\frac{1}{ق+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{ق+}\,\frac{1}{1+}\cdots = \sqrt{ق^{2}+4ق}$$

۹۔ ثابت کرو کہ

$$ق\left(ا_۱ + \frac{1}{ق ل ا_۲+}\ \frac{1}{ا_۳+}\ \frac{1}{ق ل ا_۴+} \cdots\cdots\right)$$

$$= ق ا_۱ + \frac{1}{ل ا_۲+}\ \frac{1}{ق ا_۳+}\ \frac{1}{ل ا_۴+} \cdots\cdots$$

۱۰۔ اگر $\sqrt{لا^۲ + ۱}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں لایا جائے تو ثابت کرو کہ

$$۲\,(لا^۲+۱)\,ل_ن = ق_{ن-۱} + ق_{ن+۱}$$

$$۲\,ق_ن = ل_{ن-۱} + ل_{ن+۱}$$

۱۱۔ اگر $لا = \frac{1}{ا_۱+}\ \frac{1}{ا_۲+}\ \frac{1}{ا_۳+}\ \frac{1}{ا_۴+} \cdots\cdots\cdots\cdots$

$$ما = \frac{1}{۲ا_۱+}\ \frac{1}{۲ا_۲+}\ \frac{1}{۲ا_۳+}\ \frac{1}{۲ا_۴+} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$ی = \frac{1}{۳ا_۱+}\ \frac{1}{۳ا_۲+}\ \frac{1}{۳ا_۳+}\ \frac{1}{۳ا_۴+} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

تو ثابت کرو کہ $لا(ما^۲ - ی^۲) + ۲ما(ی^۲ - لا^۲) + ۳ی(لا^۲ - ما^۲) = ۰$

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\left(ا + \frac{1}{ب+}\ \frac{1}{ا+}\ \frac{1}{ب+}\ \frac{1}{ا+} \cdots\right)\left(\frac{1}{ب+}\ \frac{1}{ا+}\ \frac{1}{ب+}\ \frac{1}{ا+} \cdots\right) = \frac{ا}{ب}$$

۱۳۔ اگر $لا = ا + \frac{1}{ب+}\ \frac{1}{ب+}\ \frac{1}{ا+}\ \frac{1}{ا+} \cdots\cdots\cdots$

$$ما = ب + \frac{1}{ا+}\ \frac{1}{ا+}\ \frac{1}{ب+}\ \frac{1}{ب+} \cdots\cdots\cdots$$

تو ثابت کرو کہ $(\text{ا}\text{ب}^2+\text{ا}+\text{ب})\,\text{لا} - (\text{ا}^2\text{ب}+\text{ا}+\text{ب})\,\text{ما} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$

۱۴- اگر $\frac{\text{ق}_\text{ن}}{\text{ل}_\text{ن}}$ ، $\sqrt{\text{ا}^2+1}$ کا ن واں مستدق ہو تو ثابت کرو

$$\frac{\text{ق}_1^2+\text{ق}_2^2+\ldots+\text{ق}_{\text{ن}+1}^2}{\text{ل}_1^2+\text{ل}_2^2+\ldots+\text{ل}_{\text{ن}+1}^2} = \frac{\text{ق}_{\text{ن}+1}\,\text{ق}_{\text{ن}+2} - \text{ق}_1\,\text{ق}_2}{\text{ل}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}+2} - \text{ل}_1\,\text{ل}_2}$$

۱۵- ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{1}{\text{ا}+}\,\frac{1}{\text{ب}+}\,\frac{1}{\text{ج}+}\ldots\right)\left(\text{ج}+\frac{1}{\text{ب}+}\,\frac{1}{\text{ا}+}\,\frac{1}{\text{ج}+}\ldots\right) = \frac{1+\text{ب}\text{ج}}{1+\text{ا}\text{ب}}$$

۱۶- اگر $\frac{\text{ق}_\text{ر}}{\text{ل}_\text{ر}}$ ، $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ کے ر ویں مستدق کو تعبیر کرے،
تو ثابت کرو کہ

$$\text{ق}_1+\text{ق}_2+\ldots+\text{ق}_{\text{ن}-1} = \text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_2$$

$$\text{ل}_1+\text{ل}_2+\ldots+\text{ل}_{\text{ن}-1} = \text{ل}_{\text{ن}+1} - \text{ل}_2$$

۱۷- ثابت کرو کہ لامتناہی مسلسل کسور

$$\frac{1}{\text{ا}+}\,\frac{1}{\text{ب}+}\,\frac{1}{\text{ج}+}\ldots\ \text{اور}\ \frac{1}{\text{ب}+}\,\frac{1}{\text{ا}+}\,\frac{1}{\text{ج}+}\ldots$$

کا فرق $\frac{\text{ا}-\text{ب}}{1+\text{ا}\text{ب}}$ کے مساوی ہے۔

۱۸- اگر $\sqrt{\text{ش}}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کیا جائے اور اگر اسکے دَور میں خارج قسمتوں کی تعداد ن ہو، تو ثابت کرو کہ

$$ل_{۲ن} = ۲ ق_ن ل_ن$$

$$ق_{۲ن} = ۲ ق_ن^۲ + (-۱)^{ن+۱}$$

۱۱- اگر $\sqrt{ث}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کیا جائے اور اگر پہلے، دوسرے، تیسرے... ک ویں متوالی دَور میں ماقبل الآخر مستدقوں کو بالترتیب $ن_۱$، $ن_۲$ ...... $ن_ک$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ن_ک + \sqrt{ث}}{ن_ک - \sqrt{ث}} = \left(\frac{ن_۱ + \sqrt{ث}}{ن_۱ - \sqrt{ث}}\right)^ک$$

اٹھائیسواں باب

درجۂ دوم کی غیر معیّن مساواتیں

۳۶۶ ۔ جن غیر معیّن مساواتوں کا درجہ ایک سے زیادہ ہو اُن کا حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرنا اگرچہ عملی طور پر زیادہ سود مند نہیں لیکن اس کا جو تعلق اعداد کے نظریہ کے ساتھ ہے اس کی وجہ سے دلچسپ ضرور ہے۔ اس باب میں ہم صرف دو متغیروں کی معادلات درجہ دوم پر بحث کرینگے۔

۳۶۷ ۔ لا اور ما کی ایسی قیمتیں مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو جو مساوات

$$\text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$$

کو پورا کریں جہاں ا، ب، ج، ف، گ، ھ صحیح اعداد ہیں۔
اس مساوات کو لا میں درجہ دوم کی ایک مساوات فرض کرکے اسکو دفعہ ۱۲۷ کے مطابق حل کرنے سے

$$\text{ا لا} + \text{ھ ما} + \text{گ} = \pm\sqrt{(\text{ھ}^2 - \text{اب})\,\text{ما}^2 + ۲(\text{ھ گ} - \text{ا ف})\,\text{ما} + (\text{گ}^2 - \text{ا ج})} \quad ....(۱)$$

اب اگر لا اور ما کی قیمتیں مثبت صحیح اعداد ہوں تو ضرور ہے کہ علامتِ جذر کے اندر کا جملہ جو $\text{ق ما}^2 + ۲\,\text{ل ما} + \text{ر}$ سے تعبیر ہو سکتا ہے پورا مربع ہو، یعنی فرض کرو کہ

ق ما^2 + ۲ ل ما + ر = ی^2

ں کو ما میں مساوات درجہ دوم سمجھ کر حل کرنے سے

ق ما + ل = ± $\sqrt{\text{ل}^2 - \text{ق ر} + \text{ق ی}^2}$

ب سابق علامت جذر کے اندر کا جملہ پورا مربع ہونا چاہئے۔
ں کروکہ یہ ت^2 کے مساوی ہے، تب

ت^2 - ق ی^2 = ل^2 - ق ر

یہاں ت اور ی متغیر ہیں اور ق، ل، ر مستقل ہیں۔
ابتدائی مساوات کو مثبت صحیح اعداد میں حل کرنا اسی صورت
ں ممکن ہوسکتا ہے جبکہ مندرجۂ بالا مساوات کا مثبت صحیح
عداد میں حل کرنا ممکن ہو۔ اس بحث کی طرف ہم دفعہ ۲۷۴
ں رجوع کرینگے۔

اگر ا، ب، ھ سب مثبت ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ حلوں
ں تعداد محدود ہوگی کیونکہ لا اور ما کی بڑی قیمتوں کے لئے
ائیں جانب کے رکن کی علامت ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2
ں علامت پر موقوف ہوگی (دیکھو دفعہ ۲۶۹) اور اس لئے لا
ر ما کی بڑی قیمتوں کے لئے جو مثبت صحیح اعداد ہوں یہ صفر
ے مساوی نہیں ہوسکتی۔

نیز اگر ھ^2 - اب منفی ہو تو (۱) میں ما^2 کا سر منفی ہوگا،
ر اسی قسم کے استدلال سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ حلوں کی تعداد
حدود ہوگی۔

مثال۔ مثبت صحیح اعداد میں مساوات

لا^2 - ۴ لا ما + ۶ ما^2 - ۲ لا - ۲۰ ما = ۲۹

ے حل معلوم کرو۔

اس کو لا میں درجۂ دوم کی ایک مساوات سمجھ کر حل کرنے سے

$$\text{لا} = ۲\,\text{ما} + ۱ \pm \sqrt{۳۰ + ۲۴\,\text{ما} - ۲\,\text{ما}^2}$$

لیکن $۳۰ + ۲۴\,\text{ما} - ۲\,\text{ما}^2 = ۱۰۲ - ۲(\text{ما} - ۶)^2$، پس $(\text{ما} - ۶)^2$، ۵۱ سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ جانچ کرنے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ علامتِ جذر کے اندر کی رقم پورا مربع ہوگی جبکہ $(\text{ما} - ۶)^2 = ۱$ یا ۴۹، لہذا ما کی مثبت صحیح عددی قیمتیں ۵، ۷، ۱۳ ہیں۔

جب ما = ۵، لا = ۲۱ یا ۱

جب ما = ۷، لا = ۲۵ یا ۵

جب ما = ۱۳، لا = ۲۹ یا ۲۵

۳۶۸ ۔ ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ مثبت صحیح اعداد میں مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + ۲\,\text{گ}\,\text{لا} + ۲\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$$

کے حلوں کو ایک ایسی مساوات کے حلوں پر موقوف کر سکتے ہیں جس کی شکل

$$\text{لا}^2 \pm \text{ث}\,\text{ما}^2 = \pm\,\text{ر}$$

ہو جہاں ث اور ر مثبت صحیح اعداد ہیں۔

مساوات $\text{لا}^2 + \text{ث}\,\text{ما}^2 = -\text{ر}$ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور مساوات $\text{لا}^2 + \text{ث}\,\text{ما}^2 = \text{ر}$ کے حلوں کی تعداد محدود ہے جو آزمائش سے معلوم ہو سکتے ہیں، اس لئے ہم صرف اُن مساواتوں پر بحث کریں گے جنکی شکل $\text{لا}^2 - \text{ث}\,\text{ما}^2 = \pm\,\text{ر}$ ہو۔

۳۶۹ ۔ ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^2 - \text{ث}\,\text{ما}^2 = ۱$ کو ہمیشہ مثبت صحیح عددوں میں حل کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ $\sqrt{\text{ث}}$ کو ایک مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کیا

گیا ہے اور ق/ل ، قَ/لَ ، قً/لً کوئی سے تین مسلسل مستدق ہیں۔

نیز فرض کرو کہ مستدق قً/لً کے جواب میں مکمل خارج قسمت (√ث + اں)/لں ہے، تب

لں (قَ لَ - قَ ل) = ث لَ² - قَ² .....[دفعہ ۴۵۸]

لیکن ہر ایک دور کے آخر میں لں = ۱ ......[دیکھو دفعہ ۴۶۱]

∴ قَ² - ث لَ² = قَ ل - ق لَ

جہاں قَ/لَ کسی متوالی دور کا ماقبل الآخر مستدق ہے۔

اگر دور میں خارج قسمتوں کی تعداد جفت ہو تو قَ/لَ جفت مستدق ہے اور اسلئے √ث سے بڑا ہے اور بنا بریں ق/ل سے بھی بڑا ہے۔ پس قَ ل - ق لَ = ۱، اس صورت میں قَ² - ث لَ² = ۱، لہذا لا = قَ اور ما = لَ مساوات لا² - ث ما² = ۱ کا حل ہے۔

چونکہ قَ/لَ ہر ایک متوالی دور کا ماقبل الآخر مستدق ہے، اس لئے حلوں کی تعداد محدود ہے۔

اگر دور میں خارج قسمتوں کی تعداد طاق ہو تو پہلے دور کا ماقبل الآخر مستدق طاق واں مستدق ہوگا لیکن دوسرے

دور کا ماقبل الآخر مستدق جفت واں مستدق ہے پس لا = ق'
ما = ل' رکھنے سے صحیح عددی حل حاصل ہوں گے جہاں
$\frac{ق'}{ل'}$ دوسرے چوتھے، چھٹے ..... متوالی دور کا ماقبل الآخر
مستدق ہے۔

لہٰذا اس صورت میں بھی حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۷۰۳۔ مثبت صحیح اعداد میں مساوات لا² ۔ ث ما² = ۔ ۱ کا
حل معلوم کرو۔

دفعہ ماقبل کی طرح

$$ق'^2 - ث\, ل'^2 = ق'ل - ق\, ل'$$

اگر دور میں خارج قسمتوں کی تعداد طاق ہو اور $\frac{ق'}{ل'}$ کسی
متوالی دور کا طاق واں ماقبل آلاخر مستدق ہو تو $\frac{ق'}{ل'} < \frac{ق}{ل}$
اس لئے ق' ل ۔ ق ل' = ۔ ۱ اس صورت میں ق'² ۔ ث ل'² = ۔ ۱
اور مساوات لا² ۔ ث ما² = ۔ ۱ کے صحیح عددی حل لا = ق'، ما = ل'
رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں جہاں $\frac{ق'}{ل'}$ پہلے، تیسرے،
پانچویں، ..... متوالی دور کا ماقبل الآخر مستدق ہے۔

مثال ۔ لا² ۔ ۱۳ ما² = ± ۱ کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو
ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\sqrt{۱۳} = ۳ + \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۶+} \ldots\ldots$$

یہاں دور میں خارج قسمتوں کی تعداد طاق ہے، پہلے دور
میں ماقبل الآخر مستدق $\frac{۱۸}{۵}$ ہے، پس لا = ۱۸، ما = ۵ مساو:

$$لا^2 - ۱۳ ما^2 = -۱$$

ایک حل ہے۔

دفعہ ۲۶۴ کی رو سے دوسرے متوالی دور کا ماقبل الآخر مستدق

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۸}{۵} + \frac{۵}{۱۸} \times ۱۳\right) \text{ یعنی } \frac{۶۴۹}{۱۸۰}$$

اس لئے لا = ۶۴۹ ، ما = ۱۸۰ مساوات

$$لا^2 - ۱۳ ما^2 = ۱$$

حل ہے۔

اس طرح متوالی دوروں کے مسلسل ماقبل الآخر مستدق بنانے سے ہم مساواتوں

$$لا^2 - ۱۳ ما^2 = -۱ \text{ اور } لا^2 - ۱۳ ما^2 = ۱$$

جتنے حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

۳۔ جب مساوات $لا^2 - ث ما^2 = ۱$ کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرلیا جائے تو ذیل کے طریقہ سے ہم اور حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ لا = ھ ، ما = ک ایک حل ہے جہاں ھ، ک مثبت صحیح اعداد ہیں، تب $(ھ^2 - ث ک^2)^{ن} = ۱$ جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے،

$$\text{پس} \quad لا^2 - ث ما^2 = (ھ^2 - ث ک^2)^{ن}$$

$$(لا + ما\sqrt{ث})(لا - ما\sqrt{ث}) = (ھ + ک\sqrt{ث})^{ن}(ھ - ک\sqrt{ث})^{ن}$$

$لا + ما\sqrt{ث} = (ھ + ک\sqrt{ث})^{ن}$ اور $لا - ما\sqrt{ث} = (ھ - ک\sqrt{ث})^{ن}$ رکھو

$$۲ لا = (ھ + ک\sqrt{ث})^{ن} + (ھ - ک\sqrt{ث})^{ن}$$

۲ ما $\overline{\text{ماث}}$ = (ھ + ک $\overline{\text{ماث}}$)^ث - (ھ - ک $\overline{\text{ماث}}$)^ث

لا اور ما کی جو قیمتیں اس طرح معلوم ہوتی ہیں وہ مثبت صحیح اعداد ہیں اور ث کو بالتسلسل ۱، ۲، ۳، ..... قیمتیں دینے سے ہم جتنے حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

اسی طرح سے اگر لا = ھ، ما = ک مساوات لا^۲ - ث ما^۲ = -۱ کا ایک حل ہو اور ث کوئی طاق مثبت صحیح عدد ہو

تو لا^۲ - ث ما^۲ = (ھ^۲ - ث ک^۲)^ث

پس لا اور ما کی قیمتیں وہی ہیں جو پہلے معلوم کی جا چکی ہیں لیکن ث کی قیمتیں ۱، ۳، ۵، ... تک محدود ہیں۔

۳۷۲ ـ لا = ا / لا، ما = ا / ما رکھنے سے مساوات لا^۲ - ث ما^۲ = ± ا^۲ ہو جاتی ہے لا^۲ - ث ما^۲ = ± ۱ اور ہم پہلے بتا چکے ہیں کہ اس کو کس طرح حل کرنا چاہئے۔

۳۷۳ ـ ہم دفعہ ۳۶۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ

ق^۲ - ث ل^۲ = - ر (ق ل - ق ل) = ± ر

لہذا $\overline{\text{ماث}}$ کو متناظر کسر مسلسل میں تحویل کرنے سے اگر اس کسر کے کسی مکمل خارج قسمت کا نسب نما ا ہو اور اس مکمل خارج قسمت کی بجائے جزوی خارج قسمت لینے سے جو مستدق حاصل ہو وہ ق/ل ہو

تو مساواتات لا^۲ - ث ما^۲ = ± ا میں سے ایک مساوات لا = ق اور ما = ل سے پوری ہو گی۔

نیز طاق مستدق سب $\overline{\text{ماث}}$ سے کم ہیں اور جفت مستدق

سب ما ث سے بڑے ہیں، پس اگر ق/ل کوئی جفت مستدق ہو تو

لا = ق اور ما = ل مساوات لا^۲ - ث ما^۲ = ۱

کا ایک حل ہے اور اگر ق/ل کوئی طاق مستدق ہو تو

لا = ق اور ما = ل مساوات لا^۲ - ث ما^۲ = -۱ کا ایک حل ہے

۳۷۴ - دفعہ ماقبل میں جو طریقہ بتایا گیا ہے اس کی مدد سے مساواتوں لا^۲ - ث ما^۲ = ± ا میں سے ایک کا حل معلوم ہو سکتا ہے جہاں ا ان نسب نماؤں میں سے ایک ہے جو ما ث کو مسلسل کسر میں تحویل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم ما ۷ کو مسلسل کسر میں تحویل کریں تو ہمیں معلوم ہو گا کہ

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{4+} \ldots\ldots\ldots$$

اور مکمل خارج قسمتوں کے نسب نما ۳، ۲، ۳، ۱ ہیں۔

متواتر مستدق

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48},\ \ldots\ldots$$

ہیں اور اگر ہم مساواتوں

لا^۲ - ۷ ما^۲ = -۳، لا^۲ - ۷ ما^۲ = ۲، لا^۲ - ۷ ما^۲ = -۳، لا^۲ - ۷ ما^۲ = ۱

کا دور لیں تو ہمیں معلوم ہو گا کہ یہ مساواتیں

لا کی قیمتوں ۲، ۳، ۵، ۸، ۳۷، ۴۵، ۸۲، ۱۲۷، ......

اور ما کی تناظر قیمتوں ۱، ۱، ۲، ۳، ۱۴، ۱۷، ۳۱، ۴۸، ...... سے

پوری ہوتی ہیں۔

۳۷۵ - اس سے ظاہر ہے کہ بہت محدود صورتوں میں مساواتوں

لا۲ - ث ما۲ = ± ا کے حل یقینی طور پر صحیح عددوں میں ہو سکتے ہیں تاہم کسی عددی مثال میں بعض اوقات ایسا کہ ہم محض جانچ یا آزمائش سے مساواتوں لا۲ - ث ما۲ = کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کر لیتے ہیں جبکہ بالا نسب نماؤں میں سے نہ ہو۔ مثلاً ہم آسانی سے کر سکتے ہیں کہ مساوات لا۲ - ۷ ما۲ = ۲ لا ما = ۲ سے پوری ہوتی ہے، جب ایک حل معلوم تو حلوں کی کوئی تعداد معلوم ہو سکتی ہے جیسا کہ ذیل کی میں بتایا گیا ہے۔

۳۷۶ - فرض کرو کہ لا = ف، ما = گ، مساوات لا۲ - ث کا ایک حل ہے، نیز فرض کرو کہ مساوات لا۲ - ث ما۲ = ا حل لا = ہ، ما = ک ہے۔ تب

لا۲ - ث ما۲ = (ف۲ - ث گ۲) (ہ۲ - ث ک۲)

= (ف ہ ± ث گ ک)۲ - ث (ف ک ± گ ہ)۲

لا = ف ہ ± ث گ ک اور ما = ف ک ± گ ہ رکھنے سے ہ، ک کو انکی قیمتیں جو دفعہ ۳۷۱ کے مطابق معلوم کی جا سکیں دینے سے حلوں کی کوئی تعداد معلوم ہو سکتی ہے۔

۳۷۷ - اب تک ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ ث پورا مربع ہے اگر ث پورا مربع ہو تو مساوات کی شکل لا۲ - ث۲ ما۲ = ہو جاتی ہے، جس کو ذیل کے طریقہ سے فوراً حل کیا جا سکتا فرض کرو کہ ا = ب ج جہاں ب اور ج دو مثبت صحیح اعداد ہیں جن میں ب بڑا ہے، تب

(لا + ث ما) (لا - ث ما) = ب ج

رکھو لا + ث ما = ب اور لا - ث ما = ج، اگر لا اور ما کی وہ قیمتیں جو ان مساواتوں سے حاصل ہوں صحیح اعداد ہوں تو ب اور ج کو سب ممکن قیمتیں دینے سے باقی حل معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثال۔ دو مثبت صحیح اعداد معلوم کرو جن کے مربعوں کا فرق ۶۰ ہو۔

فرض کرو کہ لا اور ما مطلوبہ اعداد ہیں، تب لا۲ - ما۲ = ۶۰

یعنی (لا + ما) (لا - ما) = ۶۰

اب ۶۰ ذیل کے زوجوں میں سے ہر ایک کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

۱ × ۶۰، ۲ × ۳۰، ۳ × ۲۰، ۴ × ۱۵، ۵ × ۱۲، ۶ × ۱۰

اور مطلوبہ قیمتیں مساواتوں

لا + ما = ۳۰ لا + ما = ۱۰

لا - ما = ۲ اور لا - ما = ۶

سے معلوم ہو سکتی ہیں، باقی مساواتوں سے لا، ما کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ کسری ہیں۔

پس اعداد مطلوبہ ۱۶، ۱۴ اور ۸، ۲ ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اسی طرح سے ہم مساوات

ر لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ک

کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دائیں جانب کے رکن کو دو ناطق خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا ممکن ہو۔

۲۷۸۔ اگر عام مساوات میں ر یا ب یا دونوں صفر ہوں تو دفعہ ۲۷۶ کا طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ذیل کی مثال کے مطابق عمل کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔

مثال۔ مثبت صحیح اعداد میں حل کرو

۲ لا ما ـ ۴ لا۲ + ۱۲ لا ـ ۵ ما = ۱۱

ما کو لا کی رقوم میں بیان کرو۔

ما = (۴ لا۲ ـ ۱۲ لا + ۱۱) / (۲ لا ـ ۵) = ۲ لا ـ ۱ + ۶ / (۲ لا ـ ۵)

اگر ما کوئی صحیح عدد ہو تو ۶ / (۲ لا ـ ۵) بھی صحیح عدد ہوگا لہٰذا ۲ لا ـ ۵ لازماً ± ۱ کے یا ± ۲، یا ± ۳ کے یا ± ۶ کے مساوی ± ۲ اور ± ۶ کی صورتیں صریحاً ناقابل تسلیم ہیں، اور لا کی قابل قبول قیمتیں صرف ۲ لا ـ ۵ = ± ۱ اور ۲ لا ـ ۵ = ± ۳ سے حاصل ہوتی ہیں جو ۳، ۲، ۴، ۱ ہیں۔

اِن قیمتوں کو یکے بعد دیگرے لینے سے ہمیں حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں

لا = ۳، ما = ۱۱ ؛ لا = ۲، ما = ـ۳ ؛ لا = ۴، ما = ۹ ؛ لا = ۱، ما = ـ

پس قابل قبول حل صرف لا = ۳، ما = ۱۱ اور لا = ۴، ما = ۹ ہیں

۳۷۹۔ اِس اصول کی مدد سے جو ابھی مذکور ہوا ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ متغیروں کی کن قیمتوں کے لئے لا اور ما کا کو دیا ہوا تفاعل درجۂ اول یا دوم پورا مربع ہو سکتا ہے۔

اِس قسم کے سوالوں کو بعض اوقات دافنطین کے سوال کہتے ہیں کیونکہ اِن پر پہلے پہل یونان کے ایک ریاضی دان دافنطین نامی نے چوتھی صدی عیسوی میں بحث کی تھی۔

مثال ۱۔ دو مثبت صحیح اعداد ایسے ہیں کہ اگر اُن کے مربعوں کے حاصل جمع میں سے اُن کا حاصل ضرب تفریق کیا جائے حاصل تفریق پورا مربع ہوتا ہے، اُن اعداد کے لئے عام جملے معلوم کرو۔

مطلوبہ اعداد کو لا، ما سے تعبیر کرو

$\text{لا}^2 - \text{لا ما} + \text{ما}^2 = \text{ی}^2$ (فرض کرو)

$\therefore \text{لا} (\text{لا} - \text{ما}) = \text{ی}^2 - \text{ما}^2$

یہ مساوات مفروضات

$\text{م لا} = \text{ن} (\text{ی} + \text{ما})$ اور $\text{ن} (\text{لا} - \text{ما}) = \text{م} (\text{ی} - \text{ما})$

سے پوری ہوتی ہے جہاں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں۔

لہٰذا $\text{م لا} - \text{ن ما} - \text{ن ی} = ۰$

اور $\text{ن لا} + (\text{م} - \text{ن}) \text{ما} - \text{م ی} = ۰$

ضرب چلیپائی سے اِن مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا}}{۲\,\text{م ن} - \text{ن}^2} = \frac{\text{ما}}{\text{م}^2 - \text{ن}^2} = \frac{\text{ی}}{\text{م}^2 - \text{م ن} + \text{ن}^2}$$

اور چونکہ مساوات زیر بحث متجانس ہے، اس لئے ہم اسکے عام حل

$$\text{لا} = ۲\,\text{م ن} - \text{ن}^2،\ \text{ما} = \text{م}^2 - \text{ن}^2،\ \text{ی} = \text{م}^2 - \text{م ن} + \text{ن}^2$$

سے لے سکتے ہیں۔ یہاں م اور ن دو مثبت صحیح اعداد ہیں۔ جن میں سے م بڑا ہے مثلاً اگر م = ۷، ن = ۴ تو

$\text{لا} = ۴۰$، $\text{ما} = ۳۳$، $\text{ی} = ۳۷$

مثال ۲۔ تین مثبت صحیح اعداد سلسلۂ حسابیہ میں ہیں اور یہ عدد ایسے ہیں کہ اِن میں سے ہر دو کا مجموعہ پورا مربع ہے، اِن کے لئے عام جملے معلوم کرو۔

اِن اعداد کو $\text{لا} - \text{ما}$، لا، $\text{لا} + \text{ما}$ سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ

$$۲\,\text{لا} - \text{ما} = \text{ق}^2،\ ۲\,\text{لا} = \text{ل}^2،\ ۲\,\text{لا} + \text{ما} = \text{ر}^2$$

تب $\text{ق}^2 + \text{ر}^2 = ۲\,\text{ل}^2$

یا $ر^2 - ل^2 = ل^2 - ق^2$

یہ مساوات ذیل کے مفروضات

$م (ر - ل) = ن (ل - ق)، ن (ر + ل) = م (ل + ق)$

سے پوری ہوتی ہے جہاں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں۔
ضرب چلیپائی سے ہمیں اِن مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ق}{ن^2 + ۲م ن - م^2} = \frac{ل}{م^2 + ن^2} = \frac{ر}{م^2 + ۲ ن - ن^2}$$

پس عام حل

$ق = ن^2 + ۲م ن - م^2 ، ل = م^2 + ن^2 ، ر = م^2 + ۲م ن - ن^2$

لے سکتے ہیں جہاں

$لا = \frac{۱}{۲} (م^2 + ن^2)^2 ، ما = ۴م ن (م^2 - ن^2)$

اور پھر تین صحیح اعداد مطلوبہ آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔
لا کی قیمت سے ظاہر ہے کہ م اور ن یا دونوں جفت ہیں یا دونوں طاق ۔ نیز اِن کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں

کہ لا > ما یعنی $(م^2 + ن^2)^2 > ۸ م ن (م^2 - ن^2)$

یعنی $م^3 (م - ۸ ن) + ۲ م^2 ن^2 + ۸ م ن^3 + ن^4 > ۰$

یہ شرط پوری ہوتی ہے اگر م > ۸ ن
اگر م = ۹، ن = ۱ تو لا = ۳۳۶۲، ما = ۲۸۸۰ اور اعداد ہیں
۴۸۲، ۳۳۶۲، ۶۲۴۲، اِن میں سے دو دو کے حاصل جمع
۳۸۴۴، ۶۷۲۴ اور ۹۶۰۴ ہیں جو بالترتیب ۶۲، ۸۲، ۹۸ کے مربعے ہیں ۔

امثلہ نمبری ۲۸

...ں کی مساواتوں کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

۵ لا^{2} - ۱۰ لا ما + ۷ ما^{2} = ۷۷

۔ لا^{2} - ۲ لا ما + ۳ ما^{2} = ۲۷

ما^{2} - ۴ لا ما + ۵ لا^{2} - ۱۰ لا = ۴

لا ما - ۲ لا - ما = ۸ ۵۔ ۲ لا + ۳ لا ما - ۴ ما = ۱۴

۴ لا^{2} - ما^{2} = ۳۱۵

...ں کی مساواتوں میں سے ہر ایک کا چھوٹے سے چھوٹا حل ... صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

لا^{2} - ۱۴ ما^{2} = ۱ ۸۔ لا^{2} - ۱۹ ما^{2} = ۱

لا^{2} = ۴۱ ما^{2} - ۱ ۱۰۔ لا^{2} - ۶۱ ما^{2} + ۵ = ۰

لا^{2} - ۷ ما^{2} - ۹ = ۰

...ں کی مساواتوں میں سے ہر ایک کا عام سے عام مثبت عددی حل معلوم کرو۔

لا^{2} - ۳ ما^{2} = ۱ ۱۳۔ لا^{2} - ۵ ما^{2} = ۱

لا^{2} - ۱۷ ما^{2} = -۱

... اور ما کی ایسی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو جن سے ... کا ہر ایک جملہ پورا مربع بن جائے۔

لا^{2} - ۳ لا ما + ۳ ما^{2} ۱۶۔ لا^{2} + ۲ لا ما + ۲ ما^{2}

۵ لا^{2} + ما^{2}

... دو مثبت صحیح عدد ایسے معلوم کرو کہ اُن میں سے ایک ... ربع دوسرے کے مربع سے بقدر ۱۰۵ کے بڑا ہو۔

... تین ایسے عددوں کے لئے عام سے عام ضابطہ معلوم

کرو جن سے قائم الزاویہ مثلث کے اضلاع کے طول تعبیر ہو سکتے ہیں۔

۲۰۔ دو مثبت صحیح عدد ایسے ہیں کہ اگر اُن کے مربعوں کے مجموعہ میں اُن کا حاصل ضرب جمع کردیا جائے تو کل مجموعہ پورا مربع ہوتا ہے، اِن عددوں کے لئے عام ضابطہ معلوم کرو۔

۲۱۔ میرے پاس تین نئے شادی شدہ آدمی مع اپنی بیویوں کے ملنے کے لئے آئے مردوں کے نام دیوی دیال، متھرا داس اور رام گوپال تھے اور عورتوں کے بسنتی، کیسری اور چاہی لیکن مجھے یہ معلوم نہیں کہ ہر مرد کی بیوی کا نام کیا ہے۔ انہوں نے مجھ سے کہا کہ وہ سب بازار میں گائے کے بچھڑے خریدنے گئے تھے اور ہر ایک نے اتنے بچھڑے خریدے جتنے کہ ایک بچھڑے کے لئے شلنگ ادا کئے۔ دیوی دیال نے کیسری کی نسبت ۲۳ بچھڑے زیادہ خرید کئے اور متھرا داس نے بسنتی کی نسبت ۱۱ زیادہ خریدے۔ نیز ہر ایک آدمی نے اپنی بیوی کی نسبت ۳ گنی زیادہ خرچ کئے، میں ہر ایک مرد کی بیوی کا نام جداگانہ معلوم کرنا چاہتا ہوں۔

۲۲۔ اگر $\frac{n}{2}$ کے کسی طاق متدق کا شمار کنندہ ک ہو اور کسی جفت متدق کا شمار کنندہ کَ ہو تو ثابت کرو کہ پہلے کَ یا کَ۔ ا طبعی اعداد کا حاصل جمع پورا مربع ہوگا۔

انیسواں باب

سلسلوں کو جمع کرنا

۳۰- ابواب ماقبل میں بعض قسم کے سلسلوں کے جمع
نے کی مثالیں درج کیجا چکی ہیں۔ سلسلوں کے جمع کرنے کے
لق جن طریقوں کی تفصیل پہلے آ چکی ہے وہ حسب
ں ہیں :-

(۱) سلسلۂ حسابیہ باب ۴
(۲) سلسلۂ ہندسیہ باب ۵
(۳) وہ سلسلے جو جزوی طور پر حسابیہ اور جزوی طور پر ہندسیہ ہوتے ہیں - دفعہ ۶۰
(۴) طبعی اعداد کی قوتوں اور ان کے متعلقہ سلسلوں کے حاصل جمع دفعات ۶۸ تا ۷۵
(۵) نامعلوم سروں کی مدد سے جمع کرنا دفعہ ۳۱۲
(۶) متوالی سلسلے باب ۲۴

ب ہم زیادہ عام طریقوں پر بحث کرنے کی طرف متوجہ
تے ہیں۔ لیکن بایں ہمہ باب ہذا کے دوران میں یہ معلوم
ا کہ متذکرہ بالا طریقے بھی بعض صورتوں میں مفید طور پر
ال ہو سکتے ہیں۔

۲- اگر ایک سلسلہ کی ر ویں رقم دو ایسی مقادیر کے
سے تعبیر ہو سکے جن میں سے ایک رقم ر کا وہی تفاعل

ہو جو دوسری رقم ر - ا کا ہے تو سلسلہ کا حاصل جمع آسانی سے محسوب ہو سکتا ہے
فرض کرو کہ ایسا سلسلہ

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots\dots + ع_ن$$

ہے اور اس کا حاصل جمع $ج_ن$ ہے، نیز فرض کرو کہ اس کی ر' ویں رقم $و_ر - و_{ر-۱}$ کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔ تب

$$ج_ن = (و_۱ - و_۰) + (و_۲ - و_۱) + \dots\dots + (و_{ن-۱} - و_{ن-۲})$$
$$+ (و_ن - و_{ن-۱})$$
$$= و_ن - و_۰$$

مثال۔ سلسلہ ذیل

$$\frac{۱}{(۱+لا)(۱+۲لا)} + \frac{۱}{(۱+۲لا)(۱+۳لا)} + \frac{۱}{(۱+۳لا)(۱+۴لا)} + \dots\dots$$

کو ن رقموں تک جمع کرو۔
اگر ہم سلسلۂ بالا کو

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots\dots + ع_ن$$

سے تعبیر کریں تو ظاہر ہے کہ

$$ع_۱ = \frac{۱}{لا}\left(\frac{۱}{۱+لا} - \frac{۱}{۱+۲لا}\right)$$

$$ع_۲ = \frac{۱}{لا}\left(\frac{۱}{۱+۲لا} - \frac{۱}{۱+۳لا}\right)$$

$$ع_۳ = \frac{۱}{لا}\left(\frac{۱}{۱+۳لا} - \frac{۱}{۱+۴لا}\right)$$

....

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{لا}}\left(\frac{1}{1+\text{ن لا}} - \frac{1}{1+\overline{\text{ن}+1}\,\text{لا}}\right)$$

پس جمع کرنے سے

$$\text{ج}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{لا}}\left(\frac{1}{1+\text{لا}} - \frac{1}{1+\overline{\text{ن}+1}\,\text{لا}}\right)$$

$$= \frac{\text{ن}}{(1+\text{لا})(1+\overline{\text{ن}+1}\,\text{لا})}$$

مثال۔ تیئسویں باب کی رو سے بعض اوقات $\text{ع}_{\text{ن}}$ کو جزوی کسور میں تحویل کرنے سے نہایت مناسب استحالہ معلوم ہو سکتا ہے۔

مثال۔ $\frac{1}{(1+\text{لا})(1+\text{ر لا})} + \frac{\text{ر}}{(1+\text{ر لا})(1+\text{ر}^2\text{لا})} + \frac{\text{ر}^2}{(1+\text{ر}^2\text{لا})(1+\text{ر}^3\text{لا})} + \ldots\ldots$ تا ن رقوم

$$\text{ن ویں رقم} = \frac{\text{ر}^{\text{ن}-1}}{(1+\text{ر}^{\text{ن}-1}\text{لا})(1+\text{ر}^{\text{ن}}\text{لا})}$$

$$= \frac{\text{عہ}}{(1+\text{ر}^{\text{ن}-1}\text{لا})} + \frac{\text{بہ}}{1+\text{ر}^{\text{ن}}\text{لا}}$$

$$\therefore \text{ر}^{\text{ن}-1} = \text{عہ}(1+\text{ر}^{\text{ن}}\text{لا}) + \text{بہ}(1+\text{ر}^{\text{ن}-1}\text{لا})$$

$1+\text{ر}^{\text{ن}-1}\text{لا}$ اور $1+\text{ر}^{\text{ن}}\text{لا}$ کو یکے بعد دیگرے صفر کے مساوی فرض کرنے سے

$$\text{عہ} = \frac{\text{ر}^{\text{ن}-1}}{1-\text{ر}} \quad \text{اور} \quad \text{بہ} = -\frac{\text{ر}^{\text{ن}}}{1-\text{ر}}$$

پس $\text{ع}_1 = \frac{1}{1-\text{ر}}\left(\frac{1}{1+\text{لا}} - \frac{\text{ر}}{1+\text{ر لا}}\right)$

اسی طرح سے $ع_۲ = \frac{۱}{۱-ر}\left(\frac{ر}{۱+ر\,لا} - \frac{ر^۲}{۱+ر^۲\,لا}\right)$

....

$$ع_ن = \frac{۱}{۱-ر}\left(\frac{ر^{ن-۱}}{۱+ر^{ن-۱}\,لا} - \frac{ر^ن}{۱+ر^ن\,لا}\right)$$

$$\therefore\ ج_ن = \frac{۱}{۱-ر}\left(\frac{۱}{۱+لا} - \frac{ر^ن}{۱+ر^ن\,لا}\right)$$

۳۸۳- ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم ر اجزائے ضربی سے بنی ہوئی ہے اور یہ اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، نیز ہر ایک رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو جزو ضربی واقع ہوتے ہیں وہ سب ایک ہی سلسلۂ حسابیہ میں ہیں، اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سلسلہ

$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots\dots + ع_ن$ سے تعبیر ہوتا ہے

جہاں $ع_ن = (ا+ن\,ب)(ا+\overline{ن+۱}\,ب)(ا+\overline{ن+۲}\,ب)\dots(ا+\overline{ن+ر-۱}\,ب)$

ن کی بجائے ن - ۱ رکھنے سے

$$ع_{ن-۱} = (ا+\overline{ن-۱}\,ب)(ا+ن\,ب)(ا+\overline{ن+۱}\,ب)\dots\dots(ا+\overline{ن+ر-۲}\,ب)$$

$\therefore$ فرض کرو $و_ن = ع_{ن-۱}(ا+\overline{ن+ر-۱}\,ب) = ع_ن(ا+\overline{ن-۱}\,ب)$

ن کی بجائے ن + ۱ لکھنے سے

$$و_{ن+۱} = ع_ن(ا+\overline{ن+ر}\,ب)$$

لہذا تفریق کرنے سے

$$(ل+۱)ب \times ع_{ن} = و_{ن+۱} - و_{ن}$$

اسی طرح $(ل+۱)ب\, ع_{ن-۱} = و_{ن} - و_{ن-۱}$

....

$$(ل+۱)ب\, ع_{۲} = و_{۳} - و_{۲}$$

$$(ل+۱)ب\, ع_{۱} = و_{۲} - و_{۱}$$

جمع کرنے سے $(ل+۱)ب \times ج_{ن} = و_{ن+۱} - و_{۱}$

یعنی $ج_{ن} = \frac{و_{ن+۱} - و_{۱}}{(ل+۱)ب}$

$= \frac{(ا + \overline{ن+ل}\, ب)ع_{ن}}{(ل+۱)ب} + م$ جہاں م کوئی مقدار ہے جو ن کے تابع نہیں اور جس کی قیمت ن کو کوئی خاص قیمت دینے سے معلوم ہو سکتی ہے۔

مندرجۂ بالا جواب سے ہمیں ذیل کا آسان کلیہ معلوم ہوتا ہے

پہلے ن ویں رقم لکھ لو اور اس کے آخری جزوِ ضربی کے بعد کا (یعنی ن + ۱ واں) جزو ضربی بعد میں لکھ دو پھر اضافہ شدہ اجزائے ضربی کی تعداد اور مشترک فرق کے حاصلِ ضرب پر تقسیم کر کے ایک مستقل رقم جمع کر دو۔

یہ دیکھ لینا چاہئے کہ $م = -\frac{و_{۱}}{(ل+۱)ب} = -\frac{ا}{(ل+۱)ب}\, ع_{۱}$

لیکن م کی بجائے اس کی یہ قیمت نہ لینا ہی بہتر ہے، م

کی ... حسب بالا معلوم کرنی چاہئے ۔

مثال ۔ سلسلہ

۱×۳×۵ + ۳×۵×۷ + ۵×۷×۹ + ...

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو ۔

ن ویں رقم (۲ن - ۱)(۲ن + ۱)(۲ن + ۳) ہے

پس قاعدہ کی رو سے

$$ج_ن = \frac{(۲ن-۱)(۲ن+۱)(۲ن+۳)(۲ن+۵)}{۲ \times ۴} + م$$

م کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ن = ۱ رکھنے سے سا...
میں صرف پہلی رقم رہ جاتی ہے، پس

$$۱۵ = \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷}{۸} + م \text{، اس سے } م = \frac{۵}{۸}$$

$$ج_ن = \frac{(۲ن-۱)(۲ن+۱)(۲ن+۳)(۲ن+۵)}{۸} + \frac{۱۵}{۸}$$

جو اختصار کے بعد = ن (۲ن^۳ + ۸ن^۲ + ۷ن - ۲)

۳۸۴ ۔ دفعہ ماقبل کا حاصل جمع نامعلوم سروں کے ... سے بھی معلوم ہو سکتا ہے (دیکھو دفعہ ۲۱۲) نیز ملاحظہ ذیل کا طریقہ ۔

ظاہر ہے کہ ع$_ن$ = (۲ن - ۱) (۲ن + ۱)(۲ن + ۳) = ۸ن^۳ + ۱۲ن...

پس دفعہ (۲۰۷) کی ترقیم کی رُو سے

$$ج_ن = ۸ \sum ن^۳ + ۱۲ \sum ن^۲ - ۲ \sum ن - ۳ن$$

$$\therefore ج_ن = ۲ن^۲(ن+۱)^۲ + ۲ن(ن+۱)(۲ن+۱) - ن(ن...$$

$$= ن (۲ن^۳ + ۸ن^۲ + ۷ن - ۲)$$

۳۸۵ - یاد رہے کہ دفعہ ۳۸۳ کا طریق صرف اسی صورت میں کارآمد ہو سکتا ہے جبکہ ہر ایک رقم کے اجزائے ضربی سلسلۂ حسابیہ میں ہوں اور ہر رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو جزو ضربی ہوتے ہیں وہ ایک ہی سلسلۂ حسابیہ میں ہوں۔

مثلاً سلسلہ

۱×۳×۵ + ۲×۴×۶ + ۳×۵×۷ + ۵×۷×۹.... تا ن رقم

کا حاصل جمع ان دو کلیوں میں سے جن کا دفعۂ ماقبل میں ذکر ہوا ہر ایک سے نکل سکتا ہے لیکن دفعہ ۳۸۳ کے قاعدہ سے براہِ راست نہیں نکل سکتا۔

یہاں عن = ن(ن+۲)(ن+۴) = ن(ن+۱+۱)(ن+۲+۲)

= ن(ن+۱)(ن+۲) + ۲ن(ن+۱) + ن(ن+۲) + ۲ن

= ن(ن+۱)(ن+۲) + ۳ن(ن+۱) + ۳ن

یہی قاعدہ ہر رقم پر لگانے سے

ج ن = ۱/۴ ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳) + ن(ن+۱)(ن+۲)

+ ۳/۲ ن(ن+۱) + م

= ۱/۴ ن(ن+۱)(ن+۴)(ن+۵) ... کیونکہ مستقل رقم صفر ہے۔

۳۸۶ - ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم ایسے ر اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے متکافی پر مشتمل ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور نیز ہر رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو اجزائے ضربی واقع ہوتے ہیں وہ بھی ایک ہی سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔ اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ کو

$$ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \ldots\ldots + ع_ن$$

سے تعبیر کرو۔

جہاں $\frac{۱}{ع_ن} = (ا + ن ب)(ا + \overline{ن + ۱}\, ب)(ا + \overline{ن + ۲}\, ب)\ldots\ldots(ا + \overline{ن + ل - ۱}\, ب)$

ن کی بجائے ن - ۱ رکھنے سے

$$\frac{۱}{ع_{ن-۱}} = (ا + \overline{ن - ۱}\, ب)(ا + ن ب)(ا + \overline{ن + ۱}\, ب)\ldots\ldots(ا + \overline{ن + ل - ۲}\, ب)$$

$\therefore (ا + \overline{ن + ل - ۱}\, ب) ع_ن = (ا + \overline{ن - ۱}\, ب) ع_{ن-۱} = و_ن$ (فرض کرو)

ن کی بجائے ن + ۱ رکھنے سے

$$(ا + ن ب) ع_ن = و_{ن+۱}$$

اس لئے تفریق کرنے سے

$$(ل - ۱) ب \times ع_ن = و_ن - و_{ن+۱}$$

اسی طرح سے $(ل - ۱) ب \times ع_{ن-۱} = و_{ن-۱} - و_ن$

....

$$(ل - ۱) ب \times ع_۲ = و_۲ - و_۳$$

$$(ل - ۱) ب \times ع_۱ = و_۱ - و_۲$$

پس جمع کرنے سے $(ل - ۱) ب \times ج_ن = و_۱ - و_{ن+۱}$

یعنی $ج_ن = \frac{و_۱ - و_{ن+۱}}{(ل - ۱) ب} = م - \frac{(ا + ن ب) ع_ن}{(ل - ۱) ب}$

جہاں م ایک مقدار ہے جو ن کے تابع نہیں اور جسکی قیمت

...ن کو کوئی خاص قیمت دینے سے معلوم ہوسکتی ہے۔

پس $ج_ن = م - \frac{1}{(ل-1)ب} \times \frac{1}{(ا+ن+1ب)....(ا+ن+ل-1ب)}$

لہٰذا حاصل جمع ذیل کے کلیہ سے معلوم ہوسکتا ہے۔

ن ویں رقم لکھ لو اور پہلا جزو ضربی نکال دو۔ پھر
...اجزائے ضربی کی جو تعداد رہ جائے اُس سے اور فرق سے
...تقسیم کرکے ایک مستقل رقم جمع کردو۔

$م$ کی قیمت $= \frac{و}{(ل-1)ب} = \frac{ا+لب}{(ل-1)ب}$ ؛

لیکن ہر ایک صورت میں $م$ کی قیمت ن کو کوئی خاص قیمت
...کر معلوم کرنا ہی مناسب اور مصلحت آمیز ہوتا ہے۔

مثال ا۔ سلسلۂ ذیل

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4} + \frac{1}{2\times3\times4\times5} + \frac{1}{3\times4\times5\times6} + \dots\dots$$

...ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

ن ویں رقم $= \frac{1}{ن(ن+1)(ن+2)(ن+3)}$ ہے

...اس کلیہ کی رو سے

$$ج_ن = م - \frac{1}{3(ن+1)(ن+2)(ن+3)}$$

ن = ۱ رکھو، تب $\frac{1}{1\times2\times3\times4} = م - \frac{1}{3\times2\times3\times4}$

...س سے $م = \frac{1}{18}$

لہٰذا $ج_ن = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(ن+1)(ن+2)(ن+3)}$

ن کو لا انتہا بڑا بنا دینے سے ہمیں ج_{∞} کی قیمت $\frac{1}{18}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ سلسلہ

$$\frac{3}{1\times 2\times 4}+\frac{4}{2\times 3\times 5}+\frac{5}{3\times 4\times 6}+\cdots\cdots$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

یہاں مندرجۂ بالا قاعدہ کا بالراست اطلاق نہیں ہوسکتا کیونکہ اگرچہ نسب نماؤں کے پہلے اجزائے ضربی جو جداگانہ ۱، ۲، ۳ ..... کے مساوی ہیں سلسلۂ حسابیہ میں ہیں لیکن کسی ایک نسب نما کے اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں نہیں ہیں۔ اس مثال میں ہمیں حسب ذیل عمل کرنا چاہیے۔

$$\text{ع}_{\text{ن}}=\frac{\text{ن}+2}{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+3)}=\frac{(\text{ن}+2)^2}{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}$$

$$=\frac{\text{ن}(\text{ن}+1)+3\text{ن}+4}{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}$$

$$=\frac{1}{(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}+\frac{3}{(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}+\frac{4}{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}$$

اب ان تین رقموں میں سے ہر ایک کو ن ویں رقم کا ایک جزو خیال کیا جاسکتا ہے جو جداگانہ مندرجۂ بالا قاعدہ کے تحت میں آتی ہیں

$$\therefore \text{ج}_{\text{ن}}=\text{م}-\frac{1}{\text{ن}+3}-\frac{3}{2(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}-\frac{4}{3(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}$$

ن = ۱ رکھنے سے

$$\frac{3}{1\times 2\times 4}=\text{م}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2\times 3\times 4}-\frac{4}{3\times 2\times 3\times 4} \qquad \text{جس سے } \text{م}=\frac{29}{36}$$

۹ ج = (۳ ن - ۱) (۳ ن + ۲) (۳ ن + ۵) - ۲ × ۵ × ۸ + ۲ × ۵ × ۹

∴ ج = ن (۳ ن^۲ + ۶ ن + ۱)

۳۸۸ - جب کسی سلسلہ کی ن ویں رقم ن کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہو تو یہ سلسلہ ایک ایسی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جس پر دفعہ ۳۸۲ کا اطلاق آسانی سے ہوسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ف (ن)، ن کا ایک ناطق، صحیح، ق ابعاد کا تفاعل ہے اور مان لو کہ

ف (ن) = ا + ب ن + ج ن (ن + ۱) + د ن (ن + ۱) (ن + ۲) + ...

جہاں ا، ب، ج، د... غیر معین مستقل ہیں جو تعداد میں ق + ۱ ہیں۔

چونکہ یہ مساوات متماثلہ ن کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے اس لئے ہم ن کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرسکتے ہیں، اس طرح ہمیں ق + ۱ مستقل معلوم کرنے کے لئے ق + ۱ سادہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

مثال - ایک ایسے سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو جس کی ن ویں رقم ن^۴ + ۶ ن^۳ + ۵ ن^۲ ہے۔

فرض کرو کہ

ن^۴ + ۶ ن^۳ + ۵ ن^۲ = ا + ب ن + ج ن (ن + ۱) + د ن (ن + ۱) (ن + ۲)

+ ع ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳)

فوراً معلوم ہوجاتا ہے کہ ا = ۰، ب = ۰، ع = ۱ اور ن = -۲، ن = -۳ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ج = -۶، د = ۰، پس

ن^۴ + ۶ ن^۳ + ۵ ن^۲ = ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳) - ۶ ن (ن + ۱)

اس لئے ج~ن~ = ۱/۵ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳) (ن + ۴) - ۲ ن (ن + ۱) (ن + ۲)

= ۱/۵ ن(ن+۱)(ن+۲)(ن² + ۷ن + ۲)

کثیر ضلعی اور اشکالی اعداد

۳۸۹ — ایک سلسلۂ حسابیہ کی پہلی رقم ۱ ہے اور مشترک فرق ب ہے، ظاہر ہے کہ اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع ن + ½ن(ن−۱) ب ہوگا، اگر ہم اس جملہ میں ب کو بالترتیب ۰، ۱، ۲، ۳، ...... قیمتیں دیں تو ہمیں اعداد

ن، ½ن(ن+۱)، ن²، ½ن(۳ن−۱)، ......

حاصل ہوتے ہیں۔

عددوں کے وہ سلسلے جنکی ن ویں رقمیں ان عددوں کے جداگانہ مساوی ہوں بالترتیب دوسرے، تیسرے، چوتھے، پانچویں رتبہ کے کثیر ضلعی عدد کہلاتے ہیں۔ پہلے رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کے سلسلہ میں ہر رقم ۱ کے مساوی ہے، دوسرے، تیسرے، چوتھے، پانچویں، ...... رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کو خطی، مثلث، مربع، مخمس، ...... اعداد بھی کہتے ہیں۔

۳۹۰ — ر ویں رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو۔

ر ویں رتبہ کے اعداد کی ن ویں رقم ن + ½ن(ن−۱)(ر−۲) ہے

ج~ن~ = مجموعہ ن + ½(ر−۲) مجموعہ (ن−۱) ن

= ½ن(ن+۱) + ⅙(ر−۲)(ن−۱)ن(ن+۱) ... [دفعہ ۳۸۳]

= ⅙ ن(ن+۱){(ر−۲)(ن−۱) + ۳}

۳۹۱- اگر سلسلہ

۱، ۱، ۱، ۱، ....

کی ن رقموں کے مجموعہ کو ایک نئے سلسلہ کی ن ویں رقم قرار دیا جائے تو ہمیں ایک اور سلسلہ

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ....

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح سے اگر ہم موخرالذکر سلسلہ کی ن رقموں کے مجموعہ یعنی $\frac{ن (ن + ۱)}{۲}$ کو ایک اور سلسلہ کی ن ویں رقم قرار دیں تو ہمیں سلسلہ

۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ....

حاصل ہوتا ہے۔ یہی عمل بار بار کرنے سے ہمیں مسلسل ایسے سلسلے ملتے ہیں جن میں سے ہر ایک سلسلہ کی ن ویں رقم سلسلۂ ماقبل کی ن رقموں کے مجموعہ کے برابر ہوتی ہے۔ ان مسلسل سلسلوں کو پہلے، دوسرے، تیسرے، .... رتبہ کے اشکالی اعداد کہتے ہیں۔

۳۹۲- لؔ ویں رتبہ کے اشکالی اعداد کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

پہلے رتبہ کی ن ویں رقم ۱ ہے، دوسرے رتبہ کی ن، ہے تیسرے رتبہ کی ح ن یعنی $\frac{۱}{۲}$ ن(ن+۱)، چوتھے رتبہ کی ن ویں رقم ح $\frac{ن(ن+۱)}{۲\times۱}$ یعنی $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۳\times۲\times۱}$ ہے، پانچویں رتبہ کی ن ویں رقم ح $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۳\times۲\times۱}$ یعنی $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}{۴!}$

اور علیٰ ہٰذا القیاس۔

اسی طرح سے آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ ر ویں رتبہ کی ن ویں رقم $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots(ن+ر-۲)}{\lfloor ر-۱}$ یعنی $\frac{\lfloor ن+ر-۲}{\lfloor ن-۱ \lfloor ر-۱}$ ہے

نیز ر ویں رتبہ کی ن رقموں کا مجموعہ

$$\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)\ldots(ن+ر-۱)}{\lfloor ر}$$

ہے جو (ر+۱) ویں رتبہ کے اشکالی اعداد کی ن ویں رقم ہے۔

نوٹ۔ کسی رتبہ کے اشکالی اعداد کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرنے کے لئے دفعہ ۳۸۳ کا قاعدہ لگانے سے معلوم ہوگا کہ مستقل رقم ہمیشہ صفر ہوتی ہے۔

۳۹۳۔ حکیم پاسکل نے اپنی کتاب ٹریٹی ڈو ٹرائینگل اریتھمیٹک میں جو ۱۶۶۵ء میں طبع ہوئی اشکالی اعداد کے خواص پر بحث کی ہے اس لحاظ سے یہ اعداد تاریخی دلچسپی بھی رکھتے ہیں۔

ذیل کی جدول میں سادہ شکل کا ایک حسابی مثلث دکھایا گیا ہے

۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶		
۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶	۸۴			
۱	۵	۱۵	۳۵	۷۰	۱۲۶				
۱	۶	۲۱	۵۶	۱۲۶					
۱	۷	۲۸	۸۴						
۱	۸	۳۶							
۱	۹								
۱									

پاسکل نے مثلث بالا کے اعداد کو ذیل کے قاعدہ کی رو سے

بنایا تھا۔

ہر ایک عدد اپنے اوپر کے اور اپنے دائیں جانب کے عدد کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔ مثلاً

۱۵ = ۵ + ۱۰، ۲۸ = ۷ + ۲۱، ۱۲۶ = ۵۶ + ۷۰

اعداد کو بنانے کے طریقہ سے ظاہر ہے کہ متواتر افقی قطاریں یا انتصابی ستون بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے، .... رتبہ کے اشکالی اعداد ہیں۔

اگر ایک خط اس طرح کھینچا جائے کہ اس سے پہلی قطار اور دائیں جانب کے ستون میں سے اعداد کی مساوی تعداد قطع ہو تو اس خط کو قاعدہ کہتے ہیں اور قاعدوں کا شمار اوپر کے دائیں کونے سے کرتے ہیں۔ مثلاً چھٹا قاعدہ وہ خط ہے جو اعداد ۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱ میں سے گزرتا ہے۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ یہ اعداد تعداد میں چھ ہیں اور $(۱ + لا)^۵$ کے پھیلاؤ کی رقوم کے سر ہیں۔

ان اعداد کے خواص پر حکیم پاسکل نے بڑی قابلانہ بحث کی ہے، بالخصوص اس نے اپنے حسابی مثلث کو اجتماع کے نظریہ کو وسعت دینے اور احتمالات کے متعلق چند دلچسپ مسئلے ثابت کرنے میں نہایت خوبی کے ساتھ استعمال کیا، احتمال کی تاریخ مصنفہ ٹاڈ ہنٹر میں اس مضمون پر بسیط بحث کی ہے۔

۳۹۴ — جہاں کسی سلسلہ میں تعداد رقوم کے متعلق کوئی اشتباہ نہ ہو وہاں ہم نے عمل جمع کو ظاہر کرنے کے لئے علامت $\sum$ سے کام لیا ہے۔ بعض اوقات ان حدود کو ظاہر کرنے کے لئے جن کے اندر جمع کا عمل کرنا مقصود ہوتا ہے ذیل کی مرقومہ علامت کا استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ثابت ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ف (لا)، لا کا کوئی تفاعل ہے، تب $\sum_{لا=ا}^{لا=م}$ ف (لا)

ان سب رقوم کے حاصل جمع کو تعبیر کیا جائے [illegible]
ل سے لیکر م تک سب صحیح عددی قیمتیں دینے سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ل اور م دونوں شامل ہیں۔ بطور مثال کے فرض کرو کہ اس سلسلہ کی سب رقوم کا حاصل جمع دریافت کرنا مقصود ہے جو جملہ

$$\frac{(ن-۱)(ن-۲)\ldots(ن-ر)}{\underline{|ر}}$$

میں ن کو ر+۱ سے لیکر ن تک سب صحیح عددی قیمتیں دینے سے بشمول ن اور ر+۱ کے حاصل ہوتی ہے۔

شمار کنندہ کے اجزائے ضربی کو صعودی ترتیب میں لکھنے سے

$$\text{حاصل جمع مطلوبہ} = \sum_{ن=ر+۱}^{ن=ن} \frac{(ن-ر)(ن-ر+۱)\ldots(ن-۱)}{\underline{|ر}}$$

$$= \frac{۱}{\underline{|ر}}\Big\{۱\times۲\times۳\times\ldots\times ر + ۲\times۳\times۴\ldots(ر+۱) + \ldots\ldots$$

$$+ (ن-ر)(ن-ر+۱)\ldots(ن-۱)\Big\}$$

$$= \frac{۱}{\underline{|ر}} \times \frac{(ن-ر)(ن-ر+۱)\ldots(ن-۱)ن}{ر+۱} \quad \ldots\text{دفعہ ۳۸۳}$$

$$= \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\ldots(ن-ر)}{\underline{|ر+۱}}$$

چونکہ جملہ زیر بحث ۱ سے لیکر ر تک ن کی سب قیمتوں کے لئے صفر کے مساوی ہے، اس لئے مندرجہ بالا نتیجہ بشکل ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sum_{ن=۱}^{ن=ن} \frac{(ن-۱)(ن-۲)\ldots(ن-ر)}{\underline{|ر}}$$

$$= \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)....(ن-ر)}{\underline{|ر+۱}}$$

امثلہ نمبری ۲۹ (ر)

ذیل کے سلسلوں کو ن رقموں تک جمع کرو

(۱) $۱\times۲\times۳ + ۲\times۳\times۴ + ۳\times۴\times۵ + ...$

(۲) $۱\times۲\times۳\times۴ + ۲\times۳\times۴\times۵ + ۳\times۴\times۵\times۶ + ...$

(۳) $۱\times۴\times۷ + ۴\times۷\times۱۰ + ۷\times۱۰\times۱۳ + ...$

(۴) $۱\times۴\times۷ + ۲\times۵\times۸ + ۳\times۶\times۹ + ...$

(۵) $۱\times۵\times۹ + ۲\times۶\times۱۰ + ۳\times۷\times۱۱ + ...$

ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کا مجموعہ ن رقموں تک اور لاتناہی تک معلوم کرو۔

(۶) $\frac{۱}{۱\times۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + ...$

(۷) $\frac{۱}{۱\times۴} + \frac{۱}{۴\times۷} + \frac{۱}{۷\times۱۰} + ...$

(۸) $\frac{۱}{۱\times۳\times۵} + \frac{۱}{۳\times۵\times۷} + \frac{۱}{۵\times۷\times۹} + ...$

(۹) $\frac{۱}{۱\times۴\times۷} + \frac{۱}{۴\times۷\times۱۰} + \frac{۱}{۷\times۱۰\times۱۳} + ...$

(۱۰) $\frac{۴}{۱\times۲\times۳} + \frac{۵}{۲\times۳\times۴} + \frac{۶}{۳\times۴\times۵} + ...$

(۱۱) $\frac{۱}{۳\times۴\times۵} + \frac{۲}{۴\times۵\times۶} + \frac{۳}{۵\times۶\times۷} + ...$

(۱۲) $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{3}{2\times3\times4}+\frac{5}{3\times4\times5}+\frac{7}{4\times5\times6}+\dots$

ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱۳) $1\times3\times2^2+2\times4\times3^2+3\times5\times4^2+\dots$

(۱۴) $(ن^2-1^2)+2(ن^2-2^2)+3(ن^2-3^2)+\dots$

اُن سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو جن کی ن ویں رقمیں حسب ذیل ہیں۔

(۱۵) $ن^2(ن^2-1)$ (۱۶) $(ن^2+5ن+4)(ن^2+5ن+8)$

(۱۷) $\frac{ن^2(ن^2-1)}{4ن^2-1}$ (۱۸) $\frac{ن^4+2ن^3+ن^2-1}{ن^2+ن}$

(۱۹) $\frac{ن^4+3ن^3+2ن+2}{ن^2+2ن}$ (۲۰) $\frac{ن^4+ن^2+1}{ن^4+ن}$

(۲۱) ثابت کرو کہ اشکالی اعداد کے ر ویں رتبہ کی ن ویں رقم ن ویں رتبہ کی ر ویں رقم کے مساوی ہے۔

(۲۲) اگر اشکالی اعداد کے ر ویں رتبہ کی ن ویں رقم (ر-۲) ویں رتبہ کی (ن + ۲) ویں رقم کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ ر = ن + ۲

(۲۳) پہلے رتبہ سے لیکر ر ویں رتبہ (بشمول ر واں) تک کے کثیر ضلعی اعداد کے مختلف جٹ لئے گئے ہیں اور ہر جٹ میں رقوم کی تعداد ن ہے،

ثابت کرو کہ اِن سب رقوم کا حاصل جمع

$\frac{(ل-۱)ل(ن+۱)}{۱۲}$ (رن-۲ن-ر+۸)-

فرقوں کے طریقہ سے جمع کرنا

۳۹۵- فرض کرو کہ ع_ن، ن کا ایک صحیح منطق تفاعل ہے، نیز فرض کرو کہ جب ن کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ... قیمتیں دی جائیں تو ع_ن کی قیمتیں بالترتیب $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$.. ہوتی ہیں۔

اب ہم ایک ایسا طریقہ دریافت کرینگے کہ اگر $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$، $ع_۴$... میں سے چند رقوم معلوم ہوں تو ع_ن کی قیمت معلوم ہو سکے

پہلے ہم سلسلہ $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$، $ع_۴$، $ع_۵$، .... کی ہر ایک رقم کو رقم مابعد میں سے تفریق کرنے سے ایک اور سلسلہ حاصل کرتے ہیں جو حسب ذیل ہے

$ع_۲-ع_۱$، $ع_۳-ع_۲$، $ع_۴-ع_۳$، $ع_۵-ع_۴$، $ع_۶-ع_۵$، ....

اس سلسلہ کو فرقوں کے پہلے رتبہ کا سلسلہ کہتے ہیں اور آسا[illegible] کی خاطر

$\Delta ع_۱$، $\Delta ع_۲$، $\Delta ع_۳$، $\Delta ع_۴$ ..... سے تعبیر کرتے [illegible]

اس سلسلہ کی ہر رقم کو رقم مابعد میں سے تفریق کرنے [illegible] جو سلسلہ

$\Delta ع_۲ - \Delta ع_۱$، $\Delta ع_۳ - \Delta ع_۲$، $\Delta ع_۴ - \Delta ع_۳$،...

حاصل ہوتا ہے اس کو فرقوں کے دوسرے رتبہ کا سلـ[illegible] کہتے ہیں اور

$\Delta^{۲} ع_{۱}$، $\Delta^{۲} ع_{۲}$، $\Delta^{۲} ع_{۳}$، ...... سے تعبیر کرتے ہیں

اسی طرح سلسلہ بالا سے ہم بالترتیب تیسرے، چوتھے، پانچویں، فرقوں کے رقموں کے سلسلے بنا سکتے ہیں - اِن سلسلوں کی عام رقمیں بالترتیب $\Delta^{۳} ع_{ر}$، $\Delta^{۴} ع_{ر}$، $\Delta^{۵} ع_{ر}$، .... ہونگی

ذیل کے سلسلوں

$ع_{۱}$　$ع_{۲}$　$ع_{۳}$　$ع_{۴}$　$ع_{۵}$　$ع_{۶}$ ....

$\Delta ع_{۱}$　$\Delta ع_{۲}$　$\Delta ع_{۳}$　$\Delta ع_{۴}$　$\Delta ع_{۵}$ ....

$\Delta^{۲} ع_{۱}$　$\Delta^{۲} ع_{۲}$　$\Delta^{۲} ع_{۳}$　$\Delta^{۲} ع_{۴}$ ....

$\Delta^{۳} ع_{۱}$　$\Delta^{۳} ع_{۲}$　$\Delta^{۳} ع_{۳}$ ....

کے بنانے کا جو قاعدہ ہے اس سے ظاہر ہے کہ کسی سلسلہ کی کوئی رقم اپنی رقم ماقبل اور دائیں جانب نیچے کی رقم کو جمع کرنے سے بنتی ہے -

مثلاً $ع_{۳} = ع_{۲} + \Delta ع_{۲}$ اور $\Delta ع_{۲} = \Delta ع_{۱} + \Delta^{۲} ع_{۱}$

جمع کرنے سے چونکہ $ع_{۲} + \Delta ع_{۲} = ع_{۳}$، اس لئے

$$ع_{۳} = ع_{۱} + ۲\Delta ع_{۱} + \Delta^{۲} ع_{۱}$$

بعینہ اسی طرح سے پہلے، دوسرے، تیسرے سلسلوں کی بجائے دوسرا، تیسرا، چوتھا سلسلہ لینے سے

$$\Delta ع_{۳} = \Delta ع_{۱} + ۲\Delta^{۲} ع_{۱} + \Delta^{۳} ع_{۱}$$

اس سلسلۂ بالا میں جمع کرنے سے چونکہ

$$ع_2 + \Delta ع_2 = ع_3 \text{ ، اس لئے}$$

$$ع_4 = ع_1 + 3\Delta ع_1 + 3\Delta^2 ع_1 + \Delta^3 ع_1$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس منزل تک عددی سر اسی ضابطہ کے مطابق بنتے ہیں جس کے مطابق کہ مسئلہ تنا... سے بنتے ہیں، اب ہم استقراء حسابیہ سے یہ ثابت کریں کہ یہ ضابطہ ہر صورت میں درست اور برقرار رہتا ہے۔

فرض کرو کہ $ع_{ن+1} = ع_1 + ن \Delta ع_1 + \frac{ن(ن-1)}{2} \Delta^2 ع_1 + \dots$

$+ ن ج ر \Delta^ر ع_1 + \dots\dots + \Delta^ن ع_1$ سلسلہ ۱

اسی طرح اگر ہم پہلے سلسلہ کو (ن + ۱) ویں تک لینے کے بجائے دوسرے سلسلہ کو (ن+۲) ویں سلسلہ تک لیں

$$\Delta ع_{ن+1} = \Delta ع_1 + ن \Delta^2 ع_1 + \frac{ن(ن-1)}{2\times 1} \Delta^3 ع_1 + \dots$$

$$+ ن ج_{ر-1} \Delta^ر ع_1 + \dots\dots + \Delta^{ن+1} ع_1$$

اس سلسلہ کو سلسلۂ بالا میں جمع کرنے سے چونکہ

$$ع_{ن+1} + \Delta ع_{ن+1} = ع_{ن+2} \text{ ، اس لئے}$$

$$ع_{ن+2} = ع_1 + (ن+1) \Delta ع_1 + (ن ج_ر + ن ج_{ر-1}) \dots$$

لیکن $\text{ن}\text{ج}_{\text{ر}} + \text{ن}\text{ج}_{\text{ر}-۱} = \left(\frac{\text{ن}-\text{ر}+۱}{\text{ر}}+۱\right) \times \text{ن}\text{ج}_{\text{ر}-۱} = \frac{\text{ن}+۱}{\text{ر}} \times \text{ن}\text{ج}_{\text{ر}-۱}$

$$= \frac{(\text{ن}+۱)\,\text{ن}\,(\text{ن}-۱)\ldots\ldots(\overline{\text{ن}+۱}-\text{ر}+۱)}{۱\times۲\times۳\ldots\ldots(\text{ر}-۱)\,\text{ر}}$$

$$= {}_{\text{ن}+۱}\text{ج}_{\text{ر}}$$

پس ثابت ہوا کہ اگر یہ کلیہ $\text{ع}_{\text{ن}+۱}$ کے لئے درست ہو تو یہ $\text{ع}_{\text{ن}+۲}$ کے لئے بھی درست ہوتا ہے۔ لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ یہ $\text{ع}_۴$ کے لئے درست ہے لہٰذا یہ $\text{ع}_۵$ کے لئے درست ہے اور علیٰ ہٰذا القیاس، اسلئے یہ ہر صورت میں درست ہے یعنے

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{ع}_۱ + (\text{ن}-۱)\,\Delta\,\text{ع}_۱ + \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۱\times۲}\,\Delta^۲\,\text{ع}_۱ + \ldots + \Delta^{\text{ن}-۱}\,\text{ع}_۱ + \ldots$$

۳۹۶ - سلسلہ $\text{ع}_۱$، $\text{ع}_۲$، $\text{ع}_۳$، $\text{ع}_۴$، .... کی ن رقموں کا حاصل جمع $\text{ع}_۱$ کے فرقوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سلسلہ $\text{ع}_۱$، $\text{ع}_۲$، $\text{ع}_۳$، ...... سلسلۂ ذیل
$\text{و}_۱$، $\text{و}_۲$، $\text{و}_۳$، ....
کے فرقوں کے پہلے رتبہ کا سلسلہ ہے۔

تب $\text{و}_{\text{ن}+۱} = (\text{و}_{\text{ن}+۱} - \text{و}_{\text{ن}}) + (\text{و}_{\text{ن}} - \text{و}_{\text{ن}-۱}) + \ldots + (\text{و}_۲ - \text{و}_۱) + \text{و}_۱$ متطابقاً

پس سلسلوں

$و_1 ، و_2 ، و_3 ، و_4 ....$

$ع_1 ، ع_2 ، ع_3 ، ع_4 ....$

$\Delta ع_1 ، \Delta ع_2 ، \Delta ع_3 ....$

میں ضابطۂ تکوین وہی ہے جو دفعۂ گذشتہ میں تھا۔

$$\therefore و_{ن+1} = 0 + ن ع_1 + \frac{ن(ن-1)}{1\times 2} \Delta ع_1 + \dots + \Delta^{ن} ع_1$$

یعنی $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots + ع_ن$

$$= ن ع_1 + \frac{ن(ن-1)}{\lfloor 2} \Delta ع_1 + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 3} \Delta^2 ع_1 + \dots + \Delta^{ن} ع_1$$

دفعۂ ہذا اور دفعۂ ماقبل کے ضوابط قدرے مختلف شکل میں بطریق ذیل بھی لکھے جا سکتے ہیں۔ اگر ا کسی مفروضہ سلسلہ کی پہلی رقم کو تعبیر کرے اور فرقوں کے متواتر رتبوں کی پہلی رقمیں بالترتیب $ف_1$، $ف_2$، $ف_3$ ..... ہوں تو مفروضہ سلسلہ کی ن ویں رقم

$$ا + (ن-1) ف_1 + \frac{(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 2} ف_2 + \frac{(ن-1)(ن-2)(ن-3)}{\lfloor 2} + \dots\dots$$

ہوگی اور مفروضہ سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ

$$ن ا + \frac{ن(ن-1)}{\lfloor 2} ف_1 + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 3} ف_2$$

$$+\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴}\,ف_{۴}+\ldots\ldots$$

ہوگا۔

مثال۔ سلسلہ ذیل

۱۲، ۴۰، ۹۰، ۱۶۸، ۲۸۰، ۴۳۲، ....

کی عام رقم اور ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو

فرقوں کے متواتر رتبے یہ ہیں۔

۲۸، ۵۰، ۷۸، ۱۱۲، ۱۵۲، ....

۲۲ ۲۸ ۳۴ ۴۰

۶ ۶ ۶

۰ ۰

لہذا ن ویں رقم $= ۱۲ + ۲۸(ن-۱) + \frac{۲۲(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۲} + \frac{۶(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۳}$

$$= ن^{۳} + ۵ن^{۲} + ۶ن$$

اب ن رقموں کا حاصل جمع $ح ن^{۳} + ۵ح ن^{۲} + ۶ح ن$ کی قیمت محسوب کرنے سے بھی معلوم ہو سکتا ہے، لیکن اگر ہم دفعۂ ہذا کا ضابطہ استعمال کریں تو

$$ج_{ن} = ۱۲ن + \frac{۲۸ن(ن-۱)}{\lfloor ۲} + \frac{۲۲ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳} + \frac{۶ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴}$$

$$= \frac{ن}{۱۲}(۳ن^{۳} + ۲۶ن^{۲} + ۶۹ن + ۴۶)$$

= $\frac{1}{12}$ ن (ن + ۱) (۳ ن^{2} + ۲۳ ن + ۴۶)

۲۹۷ – یہ امر قابل غور ہے کہ جمع کرنے کا یہ عمل صرف اسی صورت میں کام آسکتا ہے جبکہ سلسلہ زیر بحث ایسا ہو کہ فرقوں کے متواتر رتبوں کے لئے سلسلے نکالنے میں ہم بالآخر ایک ایسے سلسلہ پر پہنچ سکیں جس کی سب رقمیں باہم مساوی ہوں، یہ صورت ہمیشہ واقع ہوگی بشرطیکہ سلسلہ کی ن ویں رقم ن کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہو۔
آسانی کی خاطر ہم صرف تین ابعاد کے تفاعل پر بحث کریں گے اگرچہ ثبوت کا طریقہ بالکل عام ہے۔
فرض کرو کہ سلسلہ ہے

ع$_{1}$ + ع$_{2}$ + ع$_{3}$ + ... + ع$_{ن}$ + ع$_{ن+1}$ + ع$_{ن+2}$ + ...

جہاں ع$_{ن}$ = ا ن^{3} + ب ن^{2} + ج ن + د

نیز فرض کرو کہ پہلے، دوسرے، تیسرے فرقوں کے رتبوں کی ن ویں رقمیں بالترتیب ف$_{ن}$، ہ$_{ن}$، ی$_{ن}$ ہیں۔

تب ف$_{ن}$ = ع$_{ن+1}$ − ع$_{ن}$ = ا (۳ ن^{2} + ۳ ن + ۱) + ب (۲ ن + ۱) + ج

یعنی ف$_{ن}$ = ۳ ا ن^{2} + (۳ ا + ۲ ب) ن + ا + ب + ج

اسی طرح سے ہ$_{ن}$ = ف$_{ن+1}$ − ف$_{ن}$ = ۳ ا (۲ ن + ۱) + ۳ ا + ۲ ب

اور ی$_{ن}$ = ہ$_{ن+1}$ − ہ$_{ن}$ = ۶ ا

یعنی فرقوں کے تیسرے رتبہ میں سب رقوم باہم مساوی ہیں

عام طور پر اگر سلسلہ زیر بحث کی ن ویں رقم ق ابعاد کی ہو تو فرقوں کے ق ویں رتبہ کی رقوم باہم مساوی ہونگی اور برعکس اس کے اگر فرقوں کے ق ویں رتبہ کی رقمیں باہم مساوی ہوں تو سلسلہ زیر بحث کی ن ویں رقم ن کا ایک ق ابعاد والا منطق صحیح تفاعل ہوگی۔

مثال۔ سلسلہ ۔۱، ۔۳، ۳، ۲۳، ۶۳، ۱۲۹ ..... کی ن ویں رقم معلوم کرو

فرقوں کے متواتر رتبے یہ ہیں۔

۔۲، ۶، ۲۰، ۴۰، ۶۶ ....

۸، ۱۴، ۲۰، ۲۶ ....

۶، ۶، ۶ ....

پس فرقوں کے تیسرے رتبہ کی سب رقمیں باہم مساوی ہیں۔ اسلئے ہم فرض کرسکتے ہیں کہ $ع_{ن} = ا + ب ن + ج ن^{۲} + د ن^{۳}$ جہاں ا، ب، ج، د کی قیمتیں دریافت کرنا مقصود ہے۔

ن کی بجائے بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ رکھنے سے ہمیں چار ہمزاد مساواتیں ملتی ہیں جن سے ا = ۳، ب = ۔۳، ج = ۔۲، د = ۱ حاصل ہوتے ہیں۔

پس سلسلۂ بالا کی عام رقم $۳ - ۳ن - ۲ن^{۲} + ن^{۳}$ ہے۔

۳۹۸۔ اگر $ا_{ن}$، ن کا ایک ق ابعاد والا منطق صحیح تفاعل ہو تو سلسلہ

$$ا_{۰} + ا_{۱} لا + ا_{۲} لا^{۲} + \ldots\ldots + ا_{ن} لا^{ن}$$

ایک متوالی سلسلہ ہوگا جس کے ربط کا پیمانہ $(۱ - لا)^{ق+۱}$ ہوگا فرض کرو کہ سلسلہ بالا کا حاصل جمع ج ہے۔ تب

$$\text{ج}(1-\text{لا}) = \text{ا}_0 + (\text{ا}_1-\text{ا}_0)\text{لا} + (\text{ا}_2-\text{ا}_1)\text{لا}^2 + \cdots\cdots$$

$$\cdots + (\text{ا}_\text{ن}-\text{ا}_{\text{ن}-1})\text{لا}^\text{ن} - \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}+1}$$

$$= \text{ا}_0 + \text{ب}_1\text{لا} + \text{ب}_2\text{لا}^2 + \cdots + \text{ب}_\text{ن}\text{لا}^\text{ن} - \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}+1} \quad (\text{فرض کرو})$$

یہاں $\text{ب}_\text{ن} = \text{ا}_\text{ن} - \text{ا}_{\text{ن}-1}$ یعنی $\text{ب}_\text{ن}$ کا بعد ن میں ق-۱ ہے
آخری سلسلہ کو ۱-لا سے ضرب دینے سے

$$\text{ج}(1-\text{لا})^2 = \text{ا}_0 + (\text{ب}_1-\text{ا}_0)\text{لا} + (\text{ب}_2-\text{ب}_1)\text{لا}^2 + \cdots\cdots$$

$$\cdots + (\text{ب}_\text{ن}-\text{ب}_{\text{ن}-1})\text{لا}^\text{ن} - (\text{ا}_\text{ن}+\text{ب}_\text{ن})\text{لا}^{\text{ن}+1} + \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}+2}$$

$$= \text{ا}_0 + (\text{ب}_1-\text{ا}_0)\text{لا} + \text{ج}_2\text{لا}^2 + \text{ج}_3\text{لا}^3 + \cdots + \text{ج}_\text{ن}\text{لا}^\text{ن} - (\text{ا}_\text{ن}+\text{ب}_\text{ن})\text{لا}^{\text{ن}+1} + \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}+2} \quad (\text{فرض کرو})$$

یہاں $\text{ج}_\text{ن} = \text{ب}_\text{ن} - \text{ب}_{\text{ن}-1}$، یعنی $\text{ج}_\text{ن}$ کے ابعاد ن میں ق-۲ ہیں
اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ زیر بحث کو بالتواتر (۱-لا) سے ضرب دینے سے پہلے، دوسرے، تیسرے، حاصل ضربوں میں $\text{لا}^\text{ن}$ کے جو سر حاصل ہوں گے وہ بالترتیب سروں کے پہلے، دوسرے، تیسرے فرقوں کے رتبوں کی عام رقموں کے جداگانہ مساوی ہوں گے۔

حسب مفروض $\text{ا}_\text{ن}$، ن کا ایک ق ابعاد والا ناطق صحیح

تفاعل ہے اس لئے (۱ - لا) سے ق بار ضرب دینے سے ہمیں ایک ایسا سلسلہ حاصل ہوگا کہ سوائے شروع کی اور آخری ق رقموں کے سلسلہ کی باقیماندہ رقمیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں گی جن میں سے ہر ایک کا ۔ وہی ہوگا۔ (دیکھو دفعہ ۳۹۷)

پس ج (۱ - لا)^ق = ک (لا^ق + لا^(ق+۱) + ... + لا^ن) + ف (لا)

جہاں ک ایک مستقل ہے اور ف (لا)، حاصل ضرب میں ابتدائی ق اور آخری ق رقموں کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\therefore \text{ج}(۱-\text{لا})^{\text{ق}} = \frac{\text{ک}(\text{لا}^{\text{ق}} - \text{لا}^{\text{ن}+۱})}{۱ - \text{لا}} + \text{ف}(\text{لا})$$

$$\text{یعنی ج} = \frac{\text{ک}\,\text{لا}^{\text{ق}}(۱ - \text{لا}^{\text{ن}-\text{ق}+۱}) + (۱-\text{لا})\,\text{ف}(\text{لا})}{(۱-\text{لا})^{\text{ق}+۱}}$$

پس سلسلہ زیر بحث ایک متوالی سلسلہ ہے جسکا پیمانۂ ربط

$(۱ - \text{لا})^{\text{ق}+۱}$ ہے [دیکھو دفعہ ۳۲۵] ۔

اگر عام رقم نہ دی ہوئی ہو تو اُس کے ابعاد دفعہ ۳۹۰ کے طریقے سے بآسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔

مثال۔ سلسلۂ ذیل

$$۳ + ۵\,\text{لا} + ۹\,\text{لا}^{۲} + ۱۵\,\text{لا}^{۳} + ۲۳\,\text{لا}^{۴} + ۳۳\,\text{لا}^{۵} + \ldots\ldots$$

کا تکوینی تفاعل معلوم کرو۔

سروں سے متواتر فرقوں کے رتبے بنانے سے ہمیں ذیل کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں۔

۲ ۴ ۶ ۸ ۱۰

۲ ۲ ۲ ۲

پس ا٫ ن کا دو ابعاد والا منطق صحیح تفاعل ہے اور اس لئے ربط کا پیمانہ $(۱-لا)^{۳}$ ہے۔ لہذا

$$ج = ۳ + ۵\,لا + ۹\,لا^{۲} + ۱۵\,لا^{۳} + ۲۳\,لا^{۴} + ۳۳\,لا^{۵} + \cdots\cdots$$

$$-۳\,لا\,ج = \quad -۹\,لا - ۱۵\,لا^{۲} - ۲۷\,لا^{۳} - ۴۵\,لا^{۴} - ۶۹\,لا^{۵} - \cdots\cdots$$

$$۳\,لا^{۲}\,ج = \qquad ۹\,لا^{۲} + ۱۵\,لا^{۳} + ۲۷\,لا^{۴} + ۴۵\,لا^{۵} + \cdots\cdots$$

$$-لا^{۳}\,ج = \qquad -۳\,لا^{۳} - ۵\,لا^{۴} - ۹\,لا^{۵} - \cdots\cdots$$

جمع کرنے سے $(۱-لا)^{۳}\,ج = ۳ - ۴\,لا + ۳\,لا^{۲}$

$$ش\,ج = \frac{۳ - ۴\,لا + ۳\,لا^{۲}}{(۱-لا)^{۳}}$$

۳۹۹ — چوبیسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی متوالی سلسلہ کا تفاعل تکوینی ایک ناطق کسر ہوتی ہے جس کا نسب نما پیمانۂ ربط ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس پیمانۂ ربط کو اجزائے ضربی $(۱-ا\,لا)(۱-ب\,لا)(۱-ج\,لا)\cdots\cdots$ میں تحویل کیا جا سکتا ہے، تب تفاعل تکوینی ذیل کی شکل کی جزوی کسور

$$\frac{ا'}{۱-ا\,لا} + \frac{ب'}{۱-ب\,لا} + \frac{ج'}{۱-ج\,لا} + \cdots\cdots$$

میں علحدہ علحدہ کیا جا سکتا ہے، اب ان کسرں میں سے

...یک کسر مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ایک سلسلۂ ہندسیہ کی شکل
...پھیلائی جاسکتی ہے۔ پس اس صورت میں ہم ہم توالی
...و متعدد ہندسی سلسلوں سے حاصل جمع کی شکل میں
...سکتے ہیں۔

...یکن اگر پیمانۂ ربط میں کوئی جزو ضربی مثلاً (۱ - ا لا)
... سے زیادہ بار واقع ہو تو اس کے جواب میں جو
...ی کسریں حاصل ہونگی وہ $\frac{ب}{(۱ - ا لا)^۲}$ ، $\frac{ب}{(۱ - ا لا)^۳}$ ، .....
...ل کی ہوں گی اور ظاہر ہے کہ ان کسروں کو مسئلہ
...ں کے ذریعہ پھیلانے سے ہمیں ہندسی سلسلے حاصل نہیں
... گے، پس ایسی صورت میں توالی سلسلہ کو کسی ایک
...ی سلسلوں کے حاصل جمع کی شکل میں لکھنا ممکن
...و گا۔

...۲۔ سلسلۂ ہندسیہ ا، ار، ار^۲، ار^۳، ار^۴، ار^۵، .....
...واتر فرقوں کے رتبے ہیں : ا (ر - ۱)، ار(ر - ۱)، ار^۲(ر - ۱)، ار^۳(ر - ۱)، ...

ار^۴(ر - ۱).......

ا (ر - ۱)^۲، ار(ر - ۱)^۲، ار^۲(ر - ۱)^۲، ار^۳(ر - ۱)^۲،

ا (ر - ۱)^۳ ر^۳.........

...یہ سب کے سب سلسلے ہندسی سلسلے ہیں جن کی مشترک نسبت
...ئی سلسلہ کی مشترک نسبت ر کے مساوی ہے۔

...۴۔ اب ہم ایک ایسے سلسلہ پر غور کرتے ہیں جسکی
...ویں رقم ہے

$ع_ن = ا ر^{ن-۱} + ف(ن)$

جہاں ف (ن)، ن میں ق ابعاد کا تفاعل ہے۔ اس سلسلہ سے متواتر فرقوں کے رتبے بناؤ، تب ان مختلف رتبوں کے سلسلوں میں سے کسی ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم دو حصوں کے مجموعہ پر مشتمل ہوتی ہے، ایک حصہ وہ جو ابتدائی سلسلہ کی ا ر^ن-۱ کی شکل کی رقم سے حاصل ہوتا ہے اور دوسرا وہ جو ابتدائی سلسلہ کی ف (ن) کی شکل کی رقم سے حاصل ہوتا ہے، نیز چونکہ ف (ن)، ق ابعاد کا جملہ ہے اس لئے متواتر فرقوں کے رتبوں کی ہر ایک رقم کا وہ حصہ جو ف (ن) سے حاصل ہوتا ہے (ق + ۱) ویں رتبہ سے (اور نیز بعد کے فرقوں کے رتبوں) میں صفر ہوگا۔ اس لئے یہ سلسلے ہندسی سلسلے ہوں گے جن کی مشترک نسبت ر ہوگی (دیکھو دفعہ ۴۰۰)

پس اگر کسی سلسلہ کی چند ابتدائی رقمیں دی ہوئی ہوں اور ان رقموں کے ف ویں فرق کے رتبے سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں جس کی مشترک نسبت ر ہو تو ہم فرض کر سکتے ہیں کہ دئے ہوئے سلسلہ کی عام رقم

ا ر^ن-۱ + ف (ن) ہوگی جہاں ف (ن)، ن میں (ق - ۱) ابعاد کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہے۔

مثال۔ سلسلہ ۱۰، ۲۳، ۶۰، ۱۶۹، ۴۹۴، ....

کی ن ویں رقم معلوم کرو۔

متواتر فرقوں کے رتبے یہ ہیں۔

۱۳، ۳۷، ۱۰۹، ۳۲۵

۲۴، ۷۲، ۲۱۶، .....

پس دوسرے فرق کے رتبے ہندسی سلسلہ میں ہیں جسکی مشترک نسبت ۳ ہے، اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ عام رقم

$$ع_ن = ا \times ۳^{ن-۱} + ب ن + ج \text{ ہے}$$

مستقلات ا، ب، ج کو معلوم کرنے کے لئے ن کو بالترتیب ۱، ۲، ۳... کے مساوی رکھو

تب $ا + ب + ج = ۱۰$، $۳ا + ۲ب + ج = ۲۲$، $۹ا + ۳ب + ج = ۶۰$

اِن مساواتوں سے $ا = ۶$، $ب = ۱$، $ج = ۳$

لہذا $ع_ن = ۶ \times ۳^{ن-۱} + ن + ۳ = ۲ \times ۳^{ن} + ن + ۳$

۴۰۲ — متوالی سلسلوں کی جو مثالیں ہم نے اوپر بیان کی ہیں وہ سب کی سب ایسی ہیں کہ اُن سے متواتر فرقوں کے رتبوں کے سلسلے بنا کر ہم بالآخر ایک ایسے سلسلہ پر پہنچ جاتے ہیں جس کی رقوم کی تعبیر کا قانون محض دیکھنے سے معلوم ہو جاتا ہے، اِس سے ہم ابتدائی سلسلہ کی ن ویں رقم کے لئے عام جملہ معلوم کر سکتے ہیں۔

لیکن اگر متوالی سلسلہ چند ایسے ہندسی سلسلوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو جنکی مشترک نسبتیں بالترتیب ا، ب، ج... ہوں تو ظاہر ہے کہ متوالی سلسلہ کی عام رقم

$$ا_۱ ا^{ن-۱} + ب_۱ ب^{ن-۱} + ج_۱ ج^{ن-۱} + \dots\dots$$

کی شکل کی ہوگی اور اس لئے فرقوں کے متواتر رتبوں میں عام رقم اس شکل کی ہوگی یعنی فرقوں کے سب رتبوں میں سلسلے اسی کلیہ کے تحت بنیں گے جس کے تحت ابتدائی سلسلہ بنا ہے۔ اِس صورت میں سلسلہ کی عام رقم معلوم کرنے کے لئے ہمیں زیادہ عام طریقہ اختیار کرنا پڑے گا جس کی

تشریح چوبیسویں باب میں ہو چکی ہے۔ لیکن جب سر تعدادا بڑے ہوں تو ربط کا پیمانہ بہت سے پر مشقت حسابی عمل کے بعد حاصل ہوتا ہے۔ پس عام طور پر متواتر فرقوں کے رقموں سے چند سکیلے لکھ لینا زیادہ مناسب ہوتا ہے تاکہ یہ معلوم ہو سکے کہ آیا کسی ایسے سلسلہ پر پہنچنا ممکن ہے جس کی رقوم کی تعبیر کا قانون از خود بیّن اور ظاہر ہو۔

۳۰۴۔ متذکرۂ بالا اصولوں کی مزید توضیح کے لئے ہم چند مثالیں ذیل میں درج کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ سلسلۂ ذیل

$$\frac{5}{1\times 2}\times\frac{1}{2}+\frac{7}{2\times 3}\times\frac{1}{2^2}+\frac{9}{3\times 4}\times\frac{1}{2^3}+\frac{11}{4\times 5}\times\frac{1}{2^4}+\cdots$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

یہاں $\text{ع}_{\text{ن}}=\dfrac{2\text{ن}+3}{\text{ن}(\text{ن}+1)}\times\dfrac{1}{2^{\text{ن}}}$

فرض کرو $\dfrac{2\text{ن}+3}{\text{ن}(\text{ن}+1)}=\dfrac{\text{ا}}{\text{ن}}+\dfrac{\text{ب}}{\text{ن}+1}$

پس $\text{ا}=3$، $\text{ب}=-1$

اس لئے $\text{ع}_{\text{ن}}=\left(\dfrac{3}{\text{ن}}-\dfrac{1}{\text{ن}+1}\right)\dfrac{1}{2^{\text{ن}}}=\dfrac{1}{\text{ن}}\times\dfrac{1}{2^{\text{ن}-1}}-\dfrac{1}{\text{ن}+1}\times\dfrac{1}{2^{\text{ن}}}$

لہذا حاصل جمع مطلوبہ $=\text{ج}_{\text{ن}}=1-\dfrac{1}{\text{ن}+1}\times\dfrac{1}{2^{\text{ن}}}$

مثال ۲۔ سلسلۂ ذیل

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{3\times 7}+\frac{5}{3\times 7\times 11}+\frac{7}{3\times 7\times 11\times 15}+\cdots\cdots$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

ن ویں رقم $\dfrac{\text{۲ن} - ۱}{۳ \times ۷ \times ۱۱ \ldots (\text{۴ن} - ۵)(\text{۴ن} - ۱)}$ ہے

فرض کرو کہ

$$\frac{\text{۲ن} - ۱}{۳ \times ۷ \times ۱۱ \ldots \times (\text{۴ن} - ۵)(\text{۴ن} - ۱)}$$

$$= \frac{\text{ا(ن} + ۱) + \text{ب}}{۳ \times ۷ \times \ldots (\text{۴ن} - ۱)} - \frac{\text{ان} + \text{ب}}{۳ \times ۷ \times \ldots (\text{۴ن} - ۵)}$$

$$\therefore \text{۲ن} - ۱ = \text{ان} + (\text{ا} + \text{ب}) - (\text{ان} + \text{ب})(\text{۴ن} - ۱)$$

سروں کو مساوی کرنے سے ہمیں ا اور ب کو معلوم کرنے کے لئے تین مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لہٰذا ہمارا مفروضہ اس صورت میں درست ہوگا جبکہ ا اور ب کی وہ قیمتیں جو دو مساواتوں سے حاصل ہوں تیسری مساوات کو بھی پورا کریں۔

ن^2 کے سروں کو مساوی کرنے سے ا = ۰۔
مطلق رقوم کو مساوی رکھنے سے ۲ب = -۱ یعنی ب = $-\frac{۱}{۲}$
ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ا اور ب کی یہ قیمتیں تیسری مساوات کو بھی پورا کرتی ہیں۔

$$\therefore \text{ع}_{\text{ن}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳ \times ۷ \times \ldots \times (\text{۴ن} - ۵)} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳ \times ۷ \times \ldots (\text{۴ن} - ۵)(\text{۴ن} - ۱)}$$

$$\text{لہٰذا } \text{ج}_{\text{ن}} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳ \times ۷ \times ۱۱ \times \ldots \times (\text{۴ن} - ۱)}$$

مثال ۳۔ سلسلۂ ذیل

$$۶ \times ۹ + ۱۲ \times ۲۱ + ۲۰ \times ۳۷ + ۳۰ \times ۵۷ + ۴۲ \times ۸۱ + \ldots\ldots$$

کو ن رقموں تک جمع کرو۔

دفعہ ۳۹۶ یا ۳۹۷ کے طریقہ کی رُو سے ہم پہلے سلسلہ

۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، ۴۲، ....

کی ن ویں رقم معلوم کرتے ہیں جو $ن^2 + 3ن + 2$ ہے،
نیز سلسلہ

۹، ۲۱، ۳۷، ۵۷، ۸۱، ....

کی ن ویں رقم $2ن^2 + 6ن + 1$ ہے۔

اسلئے $ع_ن = (ن+1)(ن+2)\{2ن(ن+3)+1\}$

$2ن(ن+1)(ن+2)(ن+3) + (ن+1)(ن$

$\therefore ج_ن = \frac{2}{5}ن(ن+1)(ن+2)(ن+3)(ن+4)$

$+ \frac{1}{3}ن(ن+1)(ن+2)(ن+3) - 2$

مثال ۴۔ سلسلۂ ذیل

$2\times2 + 6\times4 + 12\times8 + 20\times16 + 30\times32 + \ldots$

کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

سلسلۂ ۲، ۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، ..... کی ن ویں رقم $ن^2 + ن$

لہذا $ع_ن = (ن^2 + ن)2^ن$

اب فرض کرو کہ $(ن^2+ن)2^ن = (ان^2 + ب ن + ج)2^ن$

$-\{ا(ن-1)^2 + ب(ن-1) + ج\}\times 2^{ن-1}$

$2^{ن-1}$ پر تقسیم کرنے اور ن کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

$2 = ا$، $2 = 2ا + ب$، $0 = ج - ا + ب$ ......

$\therefore ا = 2$، $ب = -2$، $ج = 4$

$\therefore ع_ن = (2ن^2 - 2ن + 4)2^ن - \{2(ن-1)^2 - 2(ن-1) + 4\}2^{ن-1}$

اور $ج_ن = (2ن^2 - 2ن + 4)2^ن - 4 = (ن^2 - ن + 2)2^{ن+1} - 4$

امثلہ نمبری ۲۹ (ب)

ذیل کے سلسلوں کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۔ ۴، ۱۴، ۳۰، ۵۲، ۸۰، ۱۱۴ ....

۲۔ ۸، ۲۶، ۵۴، ۹۲، ۱۴۰، ۱۹۸ ....

۳۔ ۲، ۱۲، ۳۶، ۸۰، ۱۵۰، ۲۵۲ ....

۴۔ ۸، ۱۶، ۰، −۶۴، −۲۰۰، −۴۳۲ ....

۵۔ ۳۰، ۱۴۴، ۴۲۰، ۹۶۰، ۱۸۹۰، ۳۳۶۰ ....

ذیل کے سلسلوں کے تکوینی تفاعل معلوم کرو

۶۔ $۱ + ۳لا + ۷لا^{۲} + ۱۳لا^{۳} + ۲۱لا^{۴} + ۳۱لا^{۵} + \ldots\ldots$

۷۔ $۱ + ۲لا + ۹لا^{۲} + ۲۰لا^{۳} + ۳۵لا^{۴} + ۵۴لا^{۵} + \ldots\ldots$

۸۔ $۲ + ۵لا + ۱۰لا^{۲} + ۱۷لا^{۳} + ۲۶لا^{۴} + ۳۷لا^{۵} + \ldots\ldots$

۹۔ $۱ - ۳لا + ۵لا^{۲} - ۷لا^{۳} + ۹لا^{۴} - ۱۱لا^{۵} + \ldots\ldots$

۱۰۔ $۱^{۳} + ۲^{۳}لا + ۳^{۳}لا^{۲} + ۴^{۳}لا^{۳} + ۵^{۳}لا^{۴} + \ldots\ldots$

ذیل کے لامتناہی سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۱۔ $\frac{۲\times۱}{۳} + \frac{۳\times۲}{۳^{۲}} + \frac{۴\times۳}{۳^{۳}} + \frac{۵\times۴}{۳^{۴}} + \ldots\ldots$

۱۲۔ $۱ - \frac{۲^{۲}}{۵} + \frac{۳^{۲}}{۵^{۲}} - \frac{۴^{۲}}{۵^{۳}} + \frac{۵^{۲}}{۵^{۴}} - \frac{۶^{۲}}{۵^{۵}} + \ldots\ldots$

ذیل کے سلسلوں کی عام رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۳۔ ۹، ۱۶، ۲۹، ۵۴، ۱۰۳، ....

۱۴۔ −۳، ۱، ۱۱، ۲۹، ۸۹، ۱۶۷، ....

۱۵- ۲، ۵، ۱۲، ۳۱، ۸۶، ....

۱۶- ۱، ۰، ۱، ۸، ۲۹، ۸۰، ۱۹۳، ....

۱۷- ۴، ۱۳، ۲۵، ۹۴، ۲۶۲، ۷۵۵، ....

ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۸- $۱ + ۲\text{لا} + ۳\text{لا}^۲ + ۴\text{لا}^۳ + ۵\text{لا}^۴ + \cdots$

۱۹- $۱ + ۳\text{لا} + ۶\text{لا}^۲ + ۱۰\text{لا}^۳ + ۱۵\text{لا}^۴ + \cdots$

۲۰- $\frac{۳}{۱\times۲}\times\frac{۱}{۲} + \frac{۴}{۲\times۳}\times\frac{۱}{۲^۲} + \frac{۵}{۳\times۴}\times\frac{۱}{۲^۳} + \frac{۶}{۴\times۵}\times\frac{۱}{۲^۴} + \cdots$

۲۱- $\frac{۱^۲}{۲\times۳}\times۴ + \frac{۲^۲}{۳\times۴}\times۴^۲ + \frac{۳^۲}{۴\times۵}\times۴^۳ + \frac{۴^۲}{۵\times۶}\times۴^۴ + \cdots$

۲۲- $۳\times۴ + ۸\times۱۱ + ۱۵\times۲۰ + ۲۴\times۳۱ + ۳۵\times۴۴ + \cdots$

۲۳- $۱\times۳ + ۴\times۷ + ۹\times۱۳ + ۱۶\times۲۱ + ۲۵\times۳۱ + \cdots$

۲۴- $۱\times۵ + ۲\times۱۵ + ۳\times۳۱ + ۴\times۵۳ + ۵\times۸۱ + \cdots$

۲۵- $\frac{۱}{۱\times۳} + \frac{۲}{۱\times۳\times۵} + \frac{۳}{۱\times۳\times۵\times۷} + \frac{۴}{۱\times۳\times۵\times۷\times۹} + \cdots$

۲۶- $\frac{۱\times۲}{\underline{|۳}} + \frac{۲\times۲^۲}{\underline{|۴}} + \frac{۳\times۲^۳}{\underline{|۵}} + \frac{۴\times۲^۴}{\underline{|۶}} + \cdots$

۲۷- $۲\times۲ + ۴\times۴ + ۷\times۸ + ۱۱\times۱۶ + ۱۶\times۳۲ + \cdots$

۲۸- $۱\times۳ + ۳\times۳^۲ + ۵\times۳^۳ + ۷\times۳^۴ + ۹\times۳^۵ \times \cdots$

۲۹- $\frac{۱}{۲\times۴} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴\times۶} + \frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶\times۸} + \frac{۱\times۳\times۵\times۷}{۲\times۴\times۶\times۸\times۱۰} + \cdots$

۳۰- $\frac{۲}{۱\times۲} + \frac{۵}{۲\times۳}\times۲ + \frac{۱۰}{۳\times۴}\times۲^۲ + \frac{۱۷}{۴\times۵}\times۲^۳ + \cdots$

۱- $\frac{4}{3\times2\times1}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{4\times3\times2}\times\frac{1}{3^2}+\frac{6}{5\times4\times3}\times\frac{1}{3^3}+\cdots$

۲- $\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\frac{5}{\lfloor\underline{4}}+\frac{11}{\lfloor\underline{5}}+\frac{19}{\lfloor\underline{6}}+\cdots\cdots$

۳- $\frac{19}{3\times2\times1}\times\frac{1}{4}+\frac{28}{4\times3\times2}\times\frac{1}{8}+\frac{39}{5\times4\times3}\times\frac{1}{16}$

$+\frac{52}{6\times5\times4}\times\frac{1}{32}+\cdots\cdots$

۱-۴- بہت سے سلسلے ایسے ہیں جو کسی خاص کلیّہ کے
تحت جمع نہیں کئے جا سکتے۔ بعض اوقات متذکرہ بالا
عددوں میں مناسب تغیر تبدیل کرنا کافی ہوتا ہے
بعض صورتوں میں جمع کا عمل چند معلومہ سلسلوں (مثلاً
مسئلہ ثنائی کا سلسلہ، لوگارتمی سلسلہ، قوت نما سلسلہ)
کے خواص پر مبنی ہوتا ہے۔

مثال ۱- ذیل کے لاتناہی سلسلہ

$$\frac{2}{\lfloor\underline{1}}+\frac{12}{\lfloor\underline{2}}+\frac{28}{\lfloor\underline{3}}+\frac{50}{\lfloor\underline{4}}+\frac{78}{\lfloor\underline{5}}+\cdots\cdots$$

کا حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ ۲، ۱۲، ۲۸، ۵۰، ۷۸، ... کی ن ویں رقم $3\text{ن}^2+\text{ن}-2$ ہے

اس لئے $ع_{\text{ن}}=\frac{3\text{ن}^2+\text{ن}-2}{\lfloor\underline{\text{ن}}}=\frac{3\text{ن}(\text{ن}-1)+4\text{ن}-2}{\lfloor\underline{\text{ن}}}$

$$=\frac{3}{\lfloor\underline{\text{ن}-2}}+\frac{4}{\lfloor\underline{\text{ن}-1}}-\frac{2}{\lfloor\underline{\text{ن}}}$$

ن کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ...... کے برابر فرض کرنے سے

$\text{ع}_{۱} = ۴ - \frac{۲}{\text{لا}}$ ، $\text{ع}_{۲} = ۳ + \frac{۴}{\text{لا}} - \frac{۲}{\text{لا}^{۲}}$ ، $\text{ع}_{۳} = \frac{۳}{\text{لا}} + \frac{۴}{\text{لا}^{۲}} - \frac{۲}{\text{لا}^{۳}}$

اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے $\text{ج}_{\text{ن}} = ۳\text{ن} + ۴\text{ن} - ۲(\text{ن} - ۱) = ۵\text{ن} + ۲$

مثال ۲۔ اگر $(۱ + \text{لا})^{\text{ن}} = \text{ج} + \text{ج}_{۱}\text{لا} + \text{ج}_{۲}\text{لا}^{۲} + \text{ج}_{۳}\text{لا}^{۳} + \dots + \text{ج}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}}$

تو $۱^{۲}\text{ج}_{۱} + ۲^{۲}\text{ج}_{۲} + ۳^{۲}\text{ج}_{۳} + ۴^{۲}\text{ج}_{۴} + \dots + \text{ن}^{۲}\text{ج}_{\text{ن}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

دفعہ ۳۹۸ کی طرح ہم آسانی سے ثابت کرسکتے ہیں کہ

$$۱^{۲} + ۲^{۲}\text{لا} + ۳^{۲}\text{لا}^{۲} + ۴^{۲}\text{لا}^{۳} + \dots + \text{ن}^{۲}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \dots = \frac{۱ + \text{لا}}{(۱ - \text{لا})^{۳}}$$

نیز $\text{ج}_{\text{ن}} + \text{ج}_{\text{ن}-۱}\text{لا} + \dots + \text{ج}_{۲}\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \text{ج}_{۱}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ج}\,\text{لا}^{\text{ن}} = (۱ + \text{لا})^{\text{ن}}$

ان دونوں نتیجوں کو باہم ضرب دو، تب سلسلہ زیر بحث $\frac{(۱ + \text{لا})^{\text{ن}+۱}}{(۱ - \text{لا})^{۳}}$

کی یعنی $\frac{(۲ - \overline{۱ - \text{لا}})^{\text{ن}+۱}}{(۱ - \text{لا})^{۳}}$ کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ کے سر کے مساوی

ہے یعنی اس تفصیل کی وہ رقمیں جن سے $\text{لا}^{\text{ن}-۱}$ حاصل ہوسکتا ہے وہ

$$۲^{\text{ن}+۱}(۱ - \text{لا})^{-۳} - (\text{ن} + ۱)۲^{\text{ن}}(۱ - \text{لا})^{-۲} + \frac{(\text{ن} + ۱)\text{ن}}{\underline{۲}}۲^{\text{ن}-۱}(۱ - \text{لا})^{-۱}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

$\therefore$ دیا ہوا سلسلہ $= \frac{\text{ن}(\text{ن} + ۱)}{\underline{۲}}۲^{\text{ن}+۱} - \text{ن}(\text{ن} + ۱)۲^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن} + ۱)}{\underline{۲}}۲^{\text{ن}-۱}$

$= \text{ن}\,(\text{ن}+1)\,2^{\text{ن}-2}$

مثال ۳۔ اگر ب = ا + ۱ اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{ب}^{\text{ن}} - (\text{ن}-1)\,\text{ا}\,\text{ب}^{\text{ن}-2} + \frac{(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{\lfloor 2}\,\text{ا}^2\,\text{ب}^{\text{ن}-4}$$

$$- \frac{(\text{ن}-3)(\text{ن}-4)(\text{ن}-5)}{\lfloor 3}\,\text{ا}^3\,\text{ب}^{\text{ن}-6} + \cdots\cdots$$

کی قیمت معلوم کرو۔

مسئلہ ثنائی کی رُو سے

$$1،\ \text{ن}-1،\ \frac{(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{\lfloor 2}،\ \frac{(\text{ن}-3)(\text{ن}-4)(\text{ن}-5)}{\lfloor 3} \ldots$$ وغیرہ وغیرہ

$(1-\text{لا})^{-1}،\ (1-\text{لا})^{-2}،\ (1-\text{لا})^{-3}،\ (1-\text{لا})^{-4}\ldots\ldots$ کی تفصیلوں میں بالترتیب $\text{لا}^{\text{ن}}،\ \text{لا}^{\text{ن}-2}،\ \text{لا}^{\text{ن}-4}،\ \text{لا}^{\text{ن}-6}\ldots\ldots$ کے سر ہیں۔ پس حاصل جمع مطلوبہ سلسلۂ ذیل

$$\frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} - \frac{\text{ا}\,\text{لا}^2}{(1-\text{ب}\,\text{لا})^2} + \frac{\text{ا}^2\,\text{لا}^4}{(1-\text{ب}\,\text{لا})^3} - \frac{\text{ا}^3\,\text{لا}^6}{(1-\text{ب}\,\text{لا})^4} + \cdots\cdots$$

کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سر کے مساوی ہے اور اگرچہ دیا ہوا جملہ رقوم کی ایک محدود تعداد پر مشتمل ہے لیکن ہم اس سلسلہ کو لامتناہی بھی خیال کرسکتے ہیں۔

لیکن سلسلہ کا حاصل جمع $= \frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} \div \left(1 + \frac{\text{ا}\,\text{لا}^2}{1-\text{ب}\,\text{لا}}\right) = \frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}+\text{ا}\,\text{لا}^2}$

$= \frac{1}{1-(\text{ا}+1)\,\text{لا}+\text{ا}\,\text{لا}^2}$ کیونکہ ب = ا + ۱

لہٰذا دیا ہوا سلسلہ = $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $\frac{1}{(1-\text{لا})(1-\text{ا}\,\text{لا})}$ کی تفصیل میں

$= \text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $\frac{1}{1-\text{ا}}\left(\frac{\text{ا}}{1-\text{ا}\,\text{لا}} - \frac{1}{1-\text{لا}}\right)$ کی تفصیل میں

$$= \frac{\text{ا}^{\text{ن}+1}-1}{\text{ا}-1}$$

مثال ۴۔ اگر سلسلوں

$$1 + \frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{لا}^6}{\underline{|6}} + \cdots \text{،} \quad \text{لا} + \frac{\text{لا}^4}{\underline{|4}} + \frac{\text{لا}^7}{\underline{|7}} + \cdots$$

$$\frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{لا}^5}{\underline{|5}} + \frac{\text{لا}^8}{\underline{|8}} + \cdots$$

کو بالترتیب ا، ب، ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^3 + \text{ب}^3 + \text{ج}^3 - 3\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج} = 1$$

اگر ایک کا خیالی جذر الکعب سہ ہو تو

$$\text{ا}^3 + \text{ب}^3 + \text{ج}^3 - 3\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج} = (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ}\,\text{ب}+\text{سہ}^2\,\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ}^2\,\text{ب}+\text{سہ}\,\text{ج})$$

اب $\text{ا}+\text{ب}+\text{ج} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{لا}^4}{\underline{|4}} + \frac{\text{لا}^5}{\underline{|5}} + \cdots = \text{قو}^{\text{لا}}$

اور $\text{ا}+\text{سہ}\,\text{ب}+\text{سہ}^2\,\text{ج} = 1 + \text{سہ}\,\text{لا} + \frac{\text{سہ}^2\,\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{سہ}^3\,\text{لا}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{سہ}^4\,\text{لا}^4}{\underline{|4}} + \frac{\text{سہ}^5\,\text{لا}^5}{\underline{|5}} + \cdots$

$$= \text{قو}^{\text{سہ}\,\text{لا}}$$

اسی طرح سے ا + سہ ب + سہ² ج = و^(سہ² لا)

∴ ا³ + ب³ + ج³ − ۳ ا ب ج = و^لا × و^(سہ لا) × و^(سہ² لا) = و^((۱+سہ+سہ²)لا) = ۱

کیونکہ ۱ + سہ + سہ² = ۰

۵۰۴ - پہلے ن طبعی اعداد کی لؔ ویں قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حاصل جمع مطلوبہ ج~ن~ ہے، تب

$$ج_ن = ۱^ل + ۲^ل + ۳^ل + \dots\dots ن^ل$$

یہ تسلیم کرلو کہ

$$ج_ن = ا_۰ ن^{ل+۱} + ا_۱ ن^ل + ا_۲ ن^{ل-۱} + ا_۳ ن^{ل-۲} + \dots\dots + ا_ل ن + ا_{ل+۱}$$

..........(۱)

جہاں ا~۰~، ا~۱~، ا~۲~، ..... ایسی مقداریں ہیں جن کی قیمتیں ابھی معلوم کرنا باقی ہے۔

ن کی بجائے (ن + ۱) لکھنے اور تفریق کرنے سے

$$(ن+۱)^ل = ا_۰\{(ن+۱)^{ل+۱} - ن^{ل+۱}\} + ا_۱\{(ن+۱)^ل - ن^ل\}$$

$$+ ا_۲\{(ن+۱)^{ل-۱} - ن^{ل-۱}\} + ا_۳\{(ن+۱)^{ل-۲} - ن^{ل-۲}\} +$$

$$\dots + ا_ل \dots\dots\dots (۲)$$

(ن + ۱)^(ل+۱)، (ن + ۱)^ل، (ن + ۱)^(ل−۱)، ..... کو پھیلاؤ اور ن کی یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھو، نؔ^ل کے سر

مساوی رکھنے سے

$$۱ = ا_۰ (ر+۱) \quad \text{یعنی} \quad ا_۰ = \frac{۱}{ر+۱}$$

$ن^{ر-۱}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$ر = \frac{ا_۰ (ر+۱) ر}{۲} + ا_۱ ر \text{، جس سے } ا_۱ = \frac{۱}{۲}$$

اسی طرح $ن^{ر-ق}$ کے سروں کو مساوی رکھو $ا_۰$، $ا_۱$ کی بجائے ان کی قیمتیں مندرج کرو اور مساوات کے دونوں جانب

$$\frac{ا_ق}{ر(ر-۱)(ر-۲)\cdots(ر-ق+۱)}$$

سے ضرب دو اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱ = \frac{۱}{ق+۱} + \frac{۱}{۲} + ا_۲ \frac{ق}{ر} + ا_۳ \frac{ق(ق-۱)}{ر(ر-۱)} + ا_۴ \frac{ق(ق-۱)(ق-۲)}{ر(ر-۱)(ر-۲)} + \cdots\cdots (۳)$$

(۱) میں ن کی بجائے (ن - ۱) رکھنے اور تفریق کرنے سے

$$ن^ر = ا_۰\{ن^{ر+۱} - (ن-۱)^{ر+۱}\} + ا_۱\{ن^ر - (ن-۱)^ر\}$$

$$+ ا_۲\{ن^{ر-۱} - (ن-۱)^{ر-۱}\} + \cdots\cdots$$

$ن^{ر-ق}$ کے سروں کو مساوی کرنے سے اور $ا_۰$، $ا_۱$ کی بجائے ان کی قیمتیں مندرج کرنے سے

$$۰ = \frac{۱}{ق+۱} - \frac{۱}{۲} + ا_۲ \frac{ق}{ر} - ا_۳ \frac{ق(ق-۱)}{ر(ر-۱)} + ا_۴ \frac{ق(ق-۱)(ق-۲)}{ر(ر-۱)(ر-۲)} \cdots\cdots (۴)$$

(۳) اور (۴) کو بالترتیب جمع کرنے اور تفریق کرنے سے

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{ق+1}=ا_{2}\frac{ق}{ر}+ا_{4}\frac{ق(ق-1)(ق-2)}{ر(ر-1)(ر-2)}+\cdots\cdots\quad(5)$$

$$\text{اور}\quad 0=ا_{3}\frac{ق(ق-1)}{ر(ر-1)}+ا_{5}\frac{ق(ق-1)(ق-2)(ق-3)}{ر(ر-1)(ر-2)(ر-3)}+\cdots\quad(6)$$

اگر ق کو بالترتیب ۲، ۴، ۶، ..... قیمتیں دی جائیں تو (۶) سے ظاہر ہے کہ سروں $ا_{3}$، $ا_{5}$، $ا_{7}$، ..... میں سے ہر ایک صفر کے مساوی ہے اور (۵) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $ا_{2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{ر}{\underline{|2}}$،

$$ا_{4}=-\frac{1}{30}\cdot\frac{ر(ر-1)(ر-2)}{\underline{|4}}،\quad ا_{6}=\frac{1}{42}\cdot\frac{ر(ر-1)(ر-2)(ر-3)(ر-4)}{\underline{|6}}$$

(۲) میں رقوم مطلق کو مساوی رکھنے سے

$$1=ا_{0}+ا_{1}+ا_{2}+ا_{3}+\cdots\cdots+ا_{ر}$$

اور مساوات (۱) میں ن = ۱ رکھنے سے

$$1=ا_{0}+ا_{1}+ا_{2}+\cdots\cdots+ا_{ر}+ا_{ر+1}\quad\text{پس}\quad ا_{ر+1}=0$$

۶۰۴۔ دفعہ ماقبل کے نتیجہ کو ذیل کے آسان ضابطہ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$ج_{ن}=\frac{ن^{ر+1}}{ر+1}+\frac{1}{2}ن^{ر}+ب_{1}\frac{ر}{\underline{|2}}ن^{ر-1}-ب_{3}\frac{ر(ر-1)(ر-2)}{\underline{|4}}ن^{ر-3}$$

$$+ب_{5}\frac{ر(ر-1)(ر-2)(ر-3)(ر-4)}{\underline{|6}}ن^{ر-5}+\cdots\cdots$$

جہاں $ب_{1}=\frac{1}{6}$، $ب_{3}=\frac{1}{30}$، $ب_{5}=\frac{1}{42}$، $ب_{7}=\frac{1}{30}$، $ب_{9}=\frac{5}{66}$

اِن مقادیر $ب_۱$، $ب_۲$، $ب_۳$..... وغیرہ کو برنولی کے عدد کہتے ہیں، طالب علم چاہے تو دوسرے سلسلوں کے جمع کرنے میں اِن اعداد کے استعمال کے متعلق مزید مثالیں بُول کی مصنفہ کتاب محدود فرق (فائنٹ ڈفرنس) میں ملاحظہ کرسکتا ہے۔

مثال۔ $۱^۵ + ۲^۵ + ۳^۵ + ... + ن^۵$ کی قیمت معلوم کرو

حسب قاعدہ مندرجہ بالا $ج_ن = \frac{ن^۶}{۶} + \frac{ن^۵}{۲} + ب_۱ \frac{۵}{۲!} ن^۴ - ب_۲ \frac{۳\times۴\times۵}{۴!} ن^۲ + ج$

$= \frac{ن^۶}{۶} + \frac{ن^۵}{۲} + \frac{۵ن^۴}{۱۲} - \frac{ن^۲}{۱۲}$ (مستقل صفر ہے)

امثلہ نمبری ۲۹ (ج)

ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱) $\frac{لا^۳}{۳!} + \frac{لا^۵}{۵!} + \frac{لا^۷}{۷!} + ...$

(۲) $\frac{لا}{۱\times۲} + \frac{لا^۲}{۲\times۳} + \frac{لا^۳}{۳\times۴} + ...$

(۳) $لا + \frac{لا^۵}{۵!} + \frac{لا^۹}{۹!} + ...$

(۴) $\frac{۱}{ر!} + \frac{۲!}{(ر+۱)!} + \frac{۳!}{(ر+۲)!} + ...$

(۵) ۱ + ۲لا + (۲^۲ - ۱)/[۲ × لا^۲/۱ + (۳^۲ - ۱)/[۳ × لا^۳/۲ + (۴^۲ - ۱)/[۴ × لا^۴/۳ + ...

(۶) ف^ر/[ر + ف^(ر-۱)/[ر-۱ × ق/۱ + ف^(ر-۲)/[ر-۲ × ق^۲/[۲ + ف^(ر-۳)/[ر-۳ × ق^۳/[۳ + ... (ر+۱) رقموں تک

(۷) ن(۱+لا)/(۱+ن لا) - ن(ن-۱)/[۲ × (۱+۲لا)/(۱+ن لا)^۲ + ن(ن-۱)(ن-۲)/[۳ × (۱+۳لا)/(۱+ن لا)^۳ - ...... ن رقموں تک

(۸) ۱ + ۳ (۲ن+۱)/(۲ن-۱) + ۵ ((۲ن+۱)/(۲ن-۱))^۲ + ... ن رقموں تک

(۹) ۱ - ن^۲/۱^۲ + ن^۲(ن^۲ - ۱^۲)/(۱^۲ × ۲^۲) - ن^۲(ن^۲ - ۱^۲)(ن^۲ - ۲^۲)/(۱^۲ × ۲^۲ × ۳^۲) + ... (ن+۱) رقموں تک

(۱۰) (۱+۲) لوک_و ۲ + (۱+۲^۲)/[۲ (لوک_و ۲)^۲ + (۱+۲^۳)/[۳ (لوک_و ۲)^۳ + ...

(۱۱) ۱/(۱×۲×۳) + ۱/(۳×۴×۵) + ۱/(۵×۶×۷) + ...

(۱۲) ۲/[۱ + ۳/[۲ + ۶/[۳ + ۱۱/[۴ + ۱۸/[۵ + ...

(۱۳) ۱ + ۲لا^۲/[۲ - لا^۳/[۳ + ۷لا^۴/[۴ - ۲۳لا^۵/[۵ + ۱۲۱لا^۶/[۶ ....

(۱۴) ضابطہ متعلقہ کو استعمال کئے بغیر سلاسل ذیل کا حاصل

مجموعہ معلوم کرو۔

(۱) $۱^۶ + ۲^۶ + ۳^۶ + \dots\dots + ن^۶$

(۲) $۱^۷ + ۲^۷ + ۳^۷ + \dots\dots + ن^۷$

(۱۵) سلسلہ ذیل کا حاصل جمع معلوم کرو

$$۱^۳ + ۲^۳ + \frac{۳^۳}{\underline{|۲}} + \frac{۴^۳}{\underline{|۳}} + \frac{۵^۳}{\underline{|۴}} + \dots\dots$$

(۱۶) ثابت کرو کہ $\frac{لا}{(۱-لا)^۲ - ج\,لا}$ کی تفصیل میں $لا^ن$ کا سریہ ہے

$$ن\left\{۱ + \frac{ن^۲-۱}{\underline{|۳}}\,ج + \frac{(ن^۲-۱)(ن^۲-۴)}{\underline{|۵}}\,ج^۲ + \frac{(ن^۲-۱)(ن^۲-۴)(ن^۲-۹)}{\underline{|۷}}\,ج^۳ + \dots\dots\right\}$$

(۱۷) اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلہ

$$۲^ن - (ن-۱)\,۲^{ن-۲} + \frac{(ن-۲)(ن-۳)}{\underline{|۲}}\,۲^{ن-۴} - \frac{(ن-۳)(ن-۴)(ن-۵)}{\underline{|۳}}\,۲^{ن-۶} + \dots$$

کا حاصل جمع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر ن، ۳ کا کوئی ضعف ہو تو

$$۱ - (ن-۱) + \frac{(ن-۲)(ن-۳)}{\underline{|۲}} - \frac{(ن-۳)(ن-۴)(ن-۵)}{\underline{|۳}} + \dots = (-۱)^ن$$

(۱۸) اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو جو ۳ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$ن^۳ + \frac{ن(ن-۱)}{\underline{|۲}}(ن-۲)^۳ + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\underline{|۴}}(ن-۴)^۳ + \dots = ن^۲(ن+۳)\,۲^{ن-۴}$$

(۱۹) ذیل کے دو سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱) $\frac{۱}{۱+۱^۲+۱^۴} + \frac{۲}{۱+۲^۲+۲^۴} + \frac{۳}{۱+۳^۲+۳^۴} + \dots\dots$

(۲) $\frac{5}{1\times2} - \frac{3}{2\times3} + \frac{9}{3\times4} - \frac{7}{4\times5} + \frac{13}{5\times6} - \frac{11}{6\times7} + \frac{17}{7\times8} - \cdots\cdots$

(۲۰) ایک لاانتناہی سلسلہ کی ن ویں رقم $\frac{(-1)^{\text{ن}+1}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}$ ہے سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۲۱) اگر $(1+\text{لا})^{\text{ن}} = \text{ج}_0 + \text{ج}_1\,\text{لا} + \text{ج}_2\,\text{لا}^2 + \text{ج}_3\,\text{لا}^3 + \cdots + \text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$ جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو

$(\text{ن}-1)^2\,\text{ج}_1 + (\text{ن}-3)^2\,\text{ج}_3 + (\text{ن}-5)^2\,\text{ج}_5 + \cdots\cdots$

کی قیمت معلوم کرو۔

(۲۲) ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو

(۱) $\frac{2}{1\times5} - \frac{4}{5\times7} + \frac{8}{7\times17} - \frac{16}{17\times31} + \frac{32}{31\times65} - \cdots\cdots$

(۲) $\frac{7}{1\times2\times3}\quad \frac{17}{2\times3\times4} + \frac{31}{3\times4\times5} - \frac{49}{4\times5\times6} + \frac{71}{5\times6\times7} - \cdots$

(۲۳) ثابت کرو کہ و < 1 تو $(1+\text{و}\,\text{لا})(1+\text{و}^2\,\text{لا})(1+\text{و}^3\,\text{لا})\cdots$

$= 1 + \frac{\text{و}\,\text{لا}}{1-\text{و}} + \frac{\text{و}^3\,\text{لا}^2}{(1-\text{و})(1-\text{و}^2)} + \frac{\text{و}^6\,\text{لا}^3}{(1-\text{و})(1-\text{و}^2)(1-\text{و}^3)} + \cdots\cdots$

(۲۴) اگر $(1+\text{لا})^2\left(1+\frac{\text{لا}}{2}\right)^2\left(1+\frac{\text{لا}}{2^2}\right)^2\left(1+\frac{\text{لا}}{2^3}\right)^2\cdots\cdots$ کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $\text{ل}_{\text{ر}}$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ا_ر = \frac{۲}{۲ر-۱}\left(ا_{ر-۱} + ا_{ر-۲}\right) \text{ اور } ا_۴ = \frac{۱۰۷۲}{۳۱۵}$$

(۲۵) اگر ن، ۶ کا کوئی ضعف ہو تو ثابت کرو کہ ذیل کے دو سلاسل میں سے ہر ایک صفر کے مساوی ہے۔

$$ن - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{|\underline{۳}} \times ۳ + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)(ن-۴)}{|\underline{۵}} \times ۳^۲ \ldots\ldots\ldots$$

$$ن - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{|\underline{۳}} \times \frac{۱}{۳} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)(ن-۴)}{|\underline{۵}} \times \frac{۱}{۹} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(۲۶) اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ف+ق)^ن - (ن-۱)ف ق (ف+ق)^{ن-۲} + \frac{(ن-۲)(ن-۳)}{|\underline{۲}} ف^۲ ق^۲ (ف+ق)^{ن-۴} - \ldots\ldots = \frac{ف^{ن+۱} - ق^{ن+۱}}{ف - ق}$$

(۲۷) اگر $ف_ر = (ن-ر)(ن-ر+۱)(ن-ر+۲)\ldots(ن-ر+ف-۱)$

$$ق_ر = ر(ر+۱)(ر+۲)\ldots\ldots(ر+ق-۱)$$

تو ثابت کرو کہ

$$ف_۱ ق_۱ + ف_۲ ق_۲ + ف_۳ ق_۳ + \ldots\ldots + ف_{ن-۱} ق_{ن-۱} = \frac{|\underline{ف}\ |\underline{ق}\ |\underline{ن-۱+ف+ق}}{|\underline{ف+ق+۱}\ |\underline{ن-۲}}$$

(۲۸) اگر ن، ۳ کا کوئی ضعف ہو تو ثابت کرو کہ

$$۱ - \frac{ن-۳}{|\underline{۲}} + \frac{(ن-۴)(ن-۵)}{|\underline{۳}} - \frac{(ن-۵)(ن-۶)(ن-۷)}{|\underline{۴}} + \ldots$$

$$+ (-۱)^ر \frac{(ن-ر-۱)(ن-ر-۲)\ldots\ldots(ن-۲ر+۱)}{|\underline{ر}} + \ldots$$

مساوی ہے $\frac{3}{ن}$ کے اگر ن طاق ہو اور مساوی ہے $\frac{1}{ن}$ کے اگر ن جفت ہو۔

(۲۹) اگر لا کوئی کسر واجب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{لا}{1-لا^2} - \frac{لا^3}{1-لا^6} + \frac{لا^5}{1-لا^{10}} - \cdots\cdots$$

$$= \frac{لا}{1+لا^2} + \frac{لا^3}{1+لا^6} + \frac{لا^5}{1+لا^{10}} + \cdots\cdots$$

تیسواں باب

عددوں کا نظریہ

۴۰۷۔ اس باب میں ہم لفظ عدد کو مثبت صحیح عدد کے معنوں میں استعمال کرینگے۔

وہ عدد جو سوائے اپنے آپ کے اور ایک کے کسی دوسرے عدد پر پورا تقسیم نہ ہو سکے عددِ مفرد یا محض مفرد کہلاتا ہے۔ بر عکس اسکے جو عدد اپنے اور ایک کے سوائے کسی دوسرے عدد پر بھی پورا تقسیم ہو سکے مرکب عدد کہلاتا ہے مثلاً ۵۳ عدد مفرد ہے اور ۳۵ عدد مرکب۔ دو عدد جن میں سوائے ایک کے کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہو بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد عدد کہلاتے ہیں مثلاً ۲۴ اور ۷۷ بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہیں۔

۴۰۸۔ ہم ذیل کے چند ابتدائی مسائل کو کثرت سے استعمال میں لائینگے ان میں سے بعض تو عدد مفرد کی تعریف ہی سے اسقدر واضح ہیں کہ ان کو علومِ متعارفہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

(۱) اگر عدد ا ایک حاصل ضرب ب ج کو پورا تقسیم کرے اور حاصل ضرب کے ایک جزوِ ضربی ب کے لحاظ سے مفرد ہو تو یہ دوسرے جزو ضربی ج کو پورا تقسیم کرے گا۔

چونکہ ا، (ب ج) کو پورا تقسیم کرتا ہے اس لئے ا کا ہر جزو ضربی ب ج میں شامل ہے، نیز چونکہ ا، بلحاظ ب کے

مفرد ہے اس لئے د کا کوئی جزو ضربی ب میں شامل نہیں ہے پس ا کے تمام اجزائے ضربی ج میں موجود ہیں یعنی ا ج کو پورا تقسیم کرتا ہے۔

(۲) اگر ایک عدد مفرد ا حاصل ضرب ب ج د ..... کو پورا تقسیم کرے تو یہ حاصل ضرب مذکور کے ایک جزو ضربی کو پورا تقسیم کرے گا، بنابریں اگر ایک عدد مفرد ا، $ب^ن$ کو پورا تقسیم کرے جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو یہ ب کو پورا تقسیم کریگا۔

(۳) اگر ا بلحاظ ب اور ج دونوں کے مفرد ہو تو یہ حاصل ضرب ب ج کے لحاظ سے بھی مفرد ہوگا، ظاہر ہے کہ ا کا کوئی جزو ضربی ب کو یا ج کو پورا تقسیم نہیں کرسکتا اس لئے حاصل ضرب ب ج، ا کے کسی جزو ضربی پر تقسیم نہیں ہوسکتا یعنی ا بلحاظ ب ج کے مفرد ہے، برعکس اس کے اگر ا بلحاظ ب ج کے مفرد ہو تو یہ بلحاظ ب اور ج دونوں کے مفرد ہوگا۔

نیز اگر ا بلحاظ ب، ج، د.... میں سے ہر ایک کے مفرد ہو تو یہ بلحاظ حاصل ضرب ب ج د..... کے مفرد ہوگا اور برعکس اس کے اگر ا کسی عدد کے لحاظ سے مفرد ہو تو یہ اس عدد کے ہر جزو ضربی کے لحاظ سے مفرد ہوگا۔

(۴) اگر ا اور ب بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو ا کی ہر مثبت صحیح قوت اور ب کی ہر مثبت صحیح قوت بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہونگی، یہ امر از روئے (۳) فوراً واضح ہوجاتا ہے۔

(۵) اگر ا بلحاظ ب کے مفرد ہو تو کسور $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ا^ن}{ب^م}$ ادنیٰ ترین رقوم میں ہونگی یعنی ان کا مزید اختصار نہیں ہو سکیگا، نیز اگر $\frac{ا}{ب}$ اور $\frac{ج}{د}$ کوئی دو مساوی کسریں ہوں اور

$\frac{ا}{ب}$ ادنیٰ ترین رقوم میں ہو تو ج اور د بالترتیب ا اور
ب کے مساوی الضعف ہونگے۔

۹۔۴۔ مفرد عددوں کی تعداد لامتناہی ہے۔
اگر ایسا نہیں ہے تو فرض کروکہ سب سے بڑا مفرد عدد
ف ہے، تب حاصل ضرب ۲×۳×۵×۷×۱۱×....ف
جسکا ہر جزوِ ضربی عدد مفرد ہے اجزائے ضربی ۲، ۳، ۵،...ف
میں سے ہر ایک پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے، اس لئے حاصل
ضرب مذکور میں ایک جمع کردینے سے جو عدد حاصل ہوگا
وہ اجزائے ضربی ۲، ۳، ۵،.... ف میں سے کسی پر بھی
پورا تقسیم نہیں ہو سکیگا لہذا یا تو یہ حاصل ضرب خود مفرد
ہے یا ف سے کسی بڑے عدد مفرد پر تقسیم ہوتا ہے ظاہر
ہے کہ دونوں صورتوں میں ف سب سے بڑا مفرد عدد
نہیں ہو سکتا، پس اعدادِ مفرد کی تعداد غیر محدود ہے۔

۱۰۔۴۔ کوئی ناطق جبریہ ضابطہ ایسا نہیں ہے جو محض
مفرد عددوں کو تعبیر کرے۔
اگر ممکن ہو تو فرض کروکہ ضابطہ

$$ا + ب لا + ج لا^۲ + د لا^۳ + ...$$

محض مفرد اعداد کو تعبیر کرتا ہے۔
اگر لا = م تو فرض کروکہ اس جملہ کی قیمت ف کے
مساوی ہے، یعنی

$$ف = ا + ب م + ج م^۲ + د م^۳ + ...$$

جب، لا = م + ن ف، تو جملہ مذکور ہوجاتا ہے

ا + ب (م + ن ف) + ج (م + ن ف)^۲ + د (م + ن ف)^۳ + ...

یعنی = ا + ب م + ج م^۲ + د م^۳ + ... + ف کا کوئی ضعف
یعنی = ف + ف کا کوئی ضعف

پس جملہ مذکورہ ف پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے اور اسلئے عدد مفرد نہیں ہے۔

۴۱۱۔ کوئی عدد اپنے مفرد اجزائے ضربی میں صرف ایک طریقہ سے تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

عدد مذکور کو ع سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ع = ا × ب × ج × د .... جہاں ا، ب، ج، د .... اعداد مفرد ہیں،

نیز فرض کرو کہ ع = عہ × بہ × جہ × لہ × ....

جہاں عہ، بہ، جہ، لہ .... کوئی اور اعداد مفرد ہیں۔

تب ا × ب × ج × د × .... = عہ × بہ × جہ × لہ × ...

اس لئے عہ حاصل ضرب ا ب ج د ..... کو پورا تقسیم کرتا ہے لیکن چونکہ اس حاصل ضرب کا ہر جزو ضربی مفرد ہے، اس لئے عہ ان اجزائے ضربی میں سے صرف ایک کو (فرض کرو کہ ا کو) پورا تقسیم کرتا ہے لیکن عہ اور ا دونوں مفرد ہیں اس لئے عہ لازماً ا کے مساوی ہو گا۔

پس ب ج د = بہ ج لہ، اور حسب سابق بہ، حاصل ضرب ب ج د ..... کے اجزائے ضربی میں سے ایک جزو ضربی (فرض کرو) ب کے مساوی ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس، لہذا عہ بہ جہ لہ کے اجزائے ضربی ا ب ج د ..... کے اجزائے ضربی کے مساوی ہیں۔ پس ع کے مفرد اجزائے ضربی کا صرف ایک ہی حیثٹ ہے۔

۴۱۲۔ کسی عددِ مرکب کے جو مختلف مقسوم علیہ ہو سکتے

ہیں اُن کی تعداد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عدد زیر بحث ع ہے اور $ع = ا^{ف} ب^{ق} ج^{ر} \ldots$

جہاں ا، ب، ج ..... مختلف اعدادِ مفرد ہیں اور ف، ق، ر ..... مثبت صحیح اعداد ہیں، تب ظاہر ہے کہ حاصل ضرب

$$(۱ + ا + ا^{۲} + \ldots + ا^{ف})(۱ + ب + ب^{۲} + \ldots + ب^{ق})(۱ + ج + ج^{۲} + \ldots + ج^{ر})$$

....

کی ہر ایک رقم عددِ مذکور کو تقسیم کرتی ہے اِن کے علاوہ اور کوئی عدد مقسوم علیہ نہیں ہے، پس مقسوم علیہوں کی تعداد حاصل ضرب مذکورہ کی کُل رقموں کی تعداد کے مساوی ہے یعنی

$$(ف+۱)(ق+۱)(ر+۱) \ldots\ldots$$

ہے، اس تعداد میں خود عدد اور مقسوم علیہ ایک بھی شامل ہیں۔

۱۴۳ — کوئی عدد مرکب جن مختلف طریقوں سے دو اجزائے ضربی میں تحلیل ہوسکتا ہے۔ اُن کی تعداد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عدد ع ہے اور $ع = ا^{ف} ب^{ق} ج^{ر} \ldots$ جہاں ا، ب، ج ..... مختلف اعداد مفرد ہیں اور ف، ق، ر مثبت صحیح عدد ہیں۔

تب حاصل ضرب

$$(۱ + ا + ا^{۲} + \ldots + ا^{ف})(۱ + ب + ب^{۲} + \ldots + ب^{ق})(۱ + ج + ج^{۲} + \ldots + ج^{ر})$$

....

کی ہر ایک رقم ع کا ایک مقسوم علیہ ہے، لیکن ع کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے ہر ایک طریقہ کے جواب میں دو مقسوم علیہ ہیں۔ لہذا

تعداد مطلوبہ $\frac{1}{2}$ (ف + ۱)(ق + ۱)(ر + ۱)..... ہے۔

اس میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ع پورا مربع نہیں ہے گویا اعداد ف، ق، ر، .... میں سے کم از کم ایک عدد طاق ہے۔ اگر ع پورا مربع ہو تو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کا ایک طریقہ $\sqrt{ع} \times \sqrt{ع}$ ہے اور اس طریقہ کے جواب میں صرف ایک مقسوم علیہ $\sqrt{ع}$ ہے اگر ہم اس کو نکال دیں تو تحلیل کے طریقوں کی تعداد

$$\frac{1}{2}\{(ف+۱)(ق+۱)(ر+۱)..... - ۱\}$$

رہ جاتی ہے، اس میں ہمیں $\sqrt{ع} \times \sqrt{ع}$ کا ایک طریقہ جمع کرنا چاہئے اسی طرح سے ہمیں مطلوبہ تعداد

$$\frac{1}{2}\{(ف+۱)(ق+۱)(ر+۱)...... + ۱\}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۴۱۴۔ ایک عدد مرکب کتنے طریقوں سے دو ایسے اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے جو بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں۔

حسب سابق فرض کرو کہ عدد ع = $ا^{ف} ب^{ق} ج^{ر}$......

مذکورہ دو اجزائے ضربی میں سے ایک میں لازماً $ا^ن$ واقع ہوگا کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو ا کی کوئی قوت ایک جزو ضربی میں شامل ہوگی اور کوئی اور قوت دوسرے میں اور اس طرح سے یہ دو اجزائے ضربی بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد نہیں ہونگے۔

اسی طرح $ب^ق$ بھی صرف ایک جزو ضربی میں شامل ہوگا اور علیٰ ہٰذالقیاس۔

پس مطلوبہ تعداد اُن طریقوں کی تعداد کے مساوی ہے جنمیں حاصل ضرب ا × ب × ج × د ...... کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، یعنی طریقوں کی تعداد

$\frac{1}{2}(1+1)(1+1)(1+1)\ldots$ یعنی $2^{ن-1}$ کے مساوی ہے

جہاں ن، ع کے مختلف مفرد اجزائے ضربی کی تعداد کے مساوی ہے۔

۱۴۱۵ - ایک عدد کے مقسوم علیہوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عددِ مذکور حسب سابق $ا^ف ب^ق ج^ر \ldots$ ہے

تب حاصل ضرب

$$(1+ا+ا^2+\ldots+ا^ف)(1+ب+ب^2+\ldots+ب^ق)(1+ج+ج^2+\ldots+ج^ر)$$

کی ہر ایک رقم ایک مقسوم علیہ ہے، اس لئے مقسوم علیہوں کا حاصل جمع اس حاصل ضرب کے مساوی ہے، یعنی حاصل جمع مطلوبہ

$$= \frac{ا^{ف+1}-1}{ا-1} \times \frac{ب^{ق+1}-1}{ب-1} \times \frac{ج^{ر+1}-1}{ج-1}$$

مثال ۱۔ عدد ۲۱۶۰۰ پر غور کرو۔

چونکہ $۲۱۶۰۰ = ۶^۳ \times ۱۰^۲ = ۲^۳ \times ۳^۳ \times ۲^۲ \times ۵^۲ = ۲^۵ \times ۳^۳ \times ۵^۲$

مقسوم علیہوں کی تعداد $= (۵+۱)(۳+۱)(۲+۱) = ۷۲$

مقسوم علیہوں کا حاصل جمع $= \frac{۲^۶-۱}{۲-۱} \times \frac{۳^۴-۱}{۳-۱} \times \frac{۵^۳-۱}{۵-۱}$

$= ۶۳ \times ۴۰ \times ۳۱ = ۷۸۱۲۰$

نیز ۲۱۶۰۰ دو ایسے اجزائے ضربی میں جو بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں $۲^{۳-۱}$ یعنی ۴ طریقوں سے تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ ن $(ن^۲-۱)$، ۲۴ پر تقسیم ہوسکتا ہے
ظاہر ہے کہ ن $(ن^۲-۱) =$ ن $(ن-۱)(ن+۱)$
چونکہ ن طاق ہے اس لئے $(ن-۱)$ اور $(ن+۱)$ دو متصل جفت عدد ہیں، اس لئے اُن میں سے ایک عدد ۲ پر اور دوسرا ۴ پر پورا تقسیم ہوسکتا ہے۔
نیز $(ن-۱)$، ن، $(ن+۱)$ تین متصل عدد ہیں، اس لئے اُن میں سے ایک ۳ پر تقسیم ہوسکتا ہے، لہٰذا جملۂ بالا ۲، ۳ اور ۴ کے حاصل ضرب یعنی ۲۴ پر پورا تقسیم ہوجاتا ہے۔

مثال ۳۔ ۳ کی بڑی سے بڑی قوت معلوم کرو جو $|\underline{۱۰۰}$ میں شامل ہے۔
پہلے ۱۰۰ عددوں میں سے اتنے عدد ۳ پر تقسیم ہوسکتے ہیں جتنی بار کہ ۳، ۱۰۰ میں آسکتا ہے، یعنی ۳۳ عدد ۳ پر تقسیم ہوسکتے ہیں۔ یہ اعداد ۳، ۶، ۹، ۱۲ ..... ۹۹ ہیں، ان عددوں میں سے بعض میں جزو ضربی ۳ دو دفعہ آتا ہے مثلاً ۹، ۱۸، ۲۷، ...
ہیں، ایسے عددوں کی تعداد اس خارج قسمت کے مساوی ہے جو ۱۰۰ کو ۹ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے، بعض ایسے ہیں جن میں جزو ضربی ۳ تین بار شامل ہے مثلاً ۲۷، ۵۴، ۸۱،

اِن کی تعداد ۱۰۰ ÷ ۲۷ کے خارج قسمت کے برابر ہے وہ عدد جس میں جزو ضربی ۳ چار بار آتا ہے وہ صرف ایک عدد ۸۱ ہے
پس مطلوبہ بڑی سے بڑی قوت = ۳۳ + ۱۱ + ۳ + ۱ = ۴۸
یہ مشق دفعہ مابعد کے مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔

۴۱۶ — مفرد عدد ا کی بڑی سے بڑی قوت جو $\lfloor\text{ن}$ میں شامل ہے اسے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ بڑے سے بڑے صحیح عدد جو $\frac{\text{ن}}{\text{ا}}$، $\frac{\text{ن}}{\text{ا}^2}$، $\frac{\text{ن}}{\text{ا}^3}$، ... میں شامل ہیں بالترتیب $\text{ص}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}}\right)$، $\text{ص}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}^2}\right)$، $\text{ص}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}^3}\right)$ سے تعبیر ہوتے ہیں، تب اعداد ۱، ۲، ۳، ..... ن میں $\text{ص}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}}\right)$ عدد ایسے ہیں جن میں ا کم از کم ایک بار شامل ہوتا ہے، یہ اعداد ا، ۲ا، ۳ا، ..... ہیں، اسی طرح سے $\text{ص}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}^2}\right)$ عدد ایسے ہیں جن میں ا^2 کم از کم ایک بار شامل ہوتا ہے، اور $\text{ص}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}^3}\right)$ ایسے ہیں جن میں ا^3 کم از کم ایک بار آتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس، پس ا کی بڑی سے بڑی قوت جو $\lfloor\text{ن}$ میں شامل ہے یہ ہے

$$\text{ص}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}}\right)+\text{ص}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}^2}\right)+\text{ص}\left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}^3}\right)+\cdots\cdots$$

۴۱۷ — اس باب کے باقی حصہ میں سہولت کی خاطر ن کے کسی ضِعف کو ضِعف (ن) سے تعبیر کیا جائے گا۔

۴۱۸ — ثابت کرو کہ متصل ر صحیح اعداد کا حاصل ضرب $\lfloor\text{ر}$ پر

پورا تقسیم ہوتا ہے

فرض کرو کہ ر متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب $\text{ض}_{\text{ن}}$ ہے جہاں ن ان اعداد میں سب سے چھوٹا ہے

تب $\text{ض}_{\text{ن}} = \text{ن}\,(\text{ن}+۱)\,(\text{ن}+۲)\cdots(\text{ن}+\text{ر}-۱)$

اور $\text{ض}_{\text{ن}+۱} = (\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۳)\cdots(\text{ن}+\text{ر})$

$$\therefore\ \text{ن}\,\text{ض}_{\text{ن}+۱} = (\text{ن}+\text{ر})\,\text{ض}_{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{ض}_{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ض}_{\text{ن}}$$

$$\therefore\ \text{ض}_{\text{ن}+۱} - \text{ض}_{\text{ن}} = \frac{\text{ض}_{\text{ن}}}{\text{ن}} \times \text{ر}$$

= (ر−۱) متصل صحیح اعداد کے حاصل ضرب کا ر گنا۔

پس اگر (ر−۱) متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب |ر−۱ پر تقسیم ہو جائے تو

$\text{ض}_{\text{ن}+۱} - \text{ض}_{\text{ن}}$ = ر ضعف (|ر−۱)

= ضعف (|ر)

اب $\text{ض}_۱$ = |ر، اس لئے $\text{ض}_۱$، |ر کا ضعف ہے، بنابریں $\text{ض}_۲$، $\text{ض}_۳$، .... بھی |ر کے ضعف ہیں۔ اس طرح ہم نے یہ ثابت کر دیا ہے کہ اگر ر−۱ متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب |ر−۱ پر پورا تقسیم ہو جائے تو متصل ر صحیح اعداد کا حاصل ضرب |ر پر پورا تقسیم ہو جائیگا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ ہر دو متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب |۲ پر تقسیم ہو جاتا ہے، اس لئے ہر تین متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب |۳ پر تقسیم ہو سکتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس مسئلہ کو اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

دفعہ ۴۱۶ کے مطابق ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر ایک مفرد

جزوِ ضربی $\underline{ن+ر}$ میں کم از کم اتنی بار شامل ہوتا ہے جتنی بار کہ یہ $\underline{ن}$ $\underline{ر}$ میں شامل ہوتا ہے اسے ہم طالب علم کے لئے بطور مشق کے چھوڑتے ہیں۔

۱۴۹- اگر ف کوئی مفردِ صحیح عدد ہو تو $(ا+ب)^{ف}$ کی تفصیل میں پہلی اور آخری رقم کے سوائے باقی سب رقوم کے سر ف پر تقسیم ہو سکتے ہیں۔

پہلی اور آخری رقم کے سوائے ہر ایک رقم کا سر

$$\frac{ف(ف-۱)(ف-۲)\ldots\ldots(ف-ر+۱)}{\underline{ر}}$$

کی شکل کا ہے جہاں ر کوئی ایسا صحیح عدد ہو سکتا ہے جو ف - ۱ سے بڑا نہ ہو۔ اب یہ جملہ ایک صحیح عدد ہے نیز چونکہ ف عددِ مفرد ہے اس لئے $\underline{ر}$ کا کوئی جزوِ ضربی اسکا مقسوم علیہ نہیں ہو سکتا۔ اور چونکہ ف بڑا ہے ر سے اسلئے یہ $\underline{ر}$ کے کسی جزوِ ضربی کو تقسیم نہیں کر سکتا یعنی $(ف-۱)(ف-۲)(ف-۳)\ldots\ldots(ف-ر+۱)$ لازماً $\underline{ر}$ پر تقسیم ہو سکتا ہے، لہٰذا ابتدائی اور آخری رقم کے سوائے ہر رقم کا سر ف پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۱۵۰- اگر ف کوئی عددِ مفرد ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ا+ب+ج+د+\ldots)^{ف} = ا^{ف} + ب^{ف} + ج^{ف} + د^{ف} + \ldots + ضعف(ف)$$

ب + ج + د + ... کی بجائے بہ رکھو

تب حسب دفعہ ماقبل $(ا+بہ)^{ف} = ا^{ف} + بہ^{ف} + ضعف(ف)$

نیز $بہ^{ف} = (ب+ج+د+\ldots)^{ف}$ فرض کرو $(ب+جہ)^{ف}$

$= ب^{ف} + جہ^{ف} + ضعف(ف)$

اسی طرح مسلسل عمل کرنے سے ہم مطلوبہ نتیجہ پر پہنچ جاتے ہیں

۴۲۱ - (فرما کا مسئلہ)۔ اگر ف کوئی عدد مفرد ہو اور عدد ع مفرد ہو بلحاظ ف کے، تو ع^ف-۱^ - ۱ = ف کا کوئی ضعف ہوگا

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

(ا + ب + ج + د + ...)^ف^ = ا^ف^ + ب^ف^ + ج^ف^ + د^ف^ + ... + ضعف (ف)

فرض کرو کہ مقادیر ا، ب، ج، د، .. وغیرہ میں سے ہر ایک مقدار ا کے مساوی ہے اور اِن کی تعداد ع ہے، تب

ع^ف^ = ع + ضعف (ف)

یعنی ع (ع^ف-۱^ - ۱) = ضعف (ف)

لیکن ع بلحاظ ف کے مفرد ہے اسلئے ع^ف-۱^ - ۱، ف کا ضعف ہے۔

نتیجہ صریح - چونکہ ف مفرد ہے اسلئے ف - ۱ کوئی جفت عدد ہوگا سوائے اُس صورت کے جبکہ ف = ۲

اس لئے (ع^(ف-۱)/۲^ + ۱)(ع^(ف-۱)/۲^ - ۱) = ضعف (ف)

لہذا ع^(ف-۱)/۲^ + ۱ یا ع^(ف-۱)/۲^ - ۱ ضعف ہے ف کا

یعنی ع^(ف-۱)/۲^ = ک ف ± ۱ جہاں ک کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۴۴- یاد رہے کہ دفعہ ۲۴۱ میں یہ بتایا جاچکا ہے کہ
$ع^{ف} - ع$ = ضعف (ف) خواہ ع بلحاظ ف کے مفرد ہو
یا نہ ہو۔ یہ نتیجہ اکثر اوقات فرما کے مسئلہ کی نسبت زیادہ
مفید ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۱- ثابت کرو کہ $ن^{۷} - ن$ ، ۴۲ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
چونکہ ۷ عدد مفرد ہے اس لئے $ن^{۷} - ن$ = ضعف (۷)
نیز $ن^{۷} - ن = ن (ن^{۶} - ۱) = ن (ن + ۱)(ن - ۱)(ن^{۴} + ن^{۲} + ۱)$
اب (ن - ۱) ن (ن + ۱) ، $\underline{۳}$ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے، اسلئے
$ن^{۷} - ن$ ، پورا تقسیم ہو سکتا ہے ۷ × ۶ یعنی ۴۲ پر۔

مثال ۲- اگر ف عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ کسی دو اعداد
کی ف ویں قوتوں کا فرق اُن اعداد کے فرق سے بقدر ف
کے کسی ضعف کے زیادہ ہوگا۔
فرض کرو کہ لا اور ما دو عدد ہیں، تب

$لا^{ف} - لا$ = ضعف (ف) اور $ما^{ف} - ما$ = ضعف (ف)،

یعنی $لا^{ف} - ما^{ف} - (لا - ما)$ = ضعف (ف) اور یہی ثابت کرنا تھا۔

مثال ۳- ثابت کرو کہ ہر مربع عدد ۵ن یا ۵ن ± ۱ کی
شکل کا ہوتا ہے۔
اگر ع بلحاظ ۵ کے مفرد نہ ہو تو $ع^{۲}$ = ۵ن جہاں ن کوئی مثبت
صحیح عدد ہے اگر ع بلحاظ ۵ کے مفرد ہو تو
$ع^{۴} - ۱$ فرما کے مسئلہ کی رو سے ۵ کا ضعف ہے،
پس یا $ع^{۲} - ۱$ یا $ع^{۲} + ۱$، ۵ کا ضعف ہوگا یعنی $ع^{۲}$ = ۵ن ± ۱

امثلہ نمبری ۳۰ (ل)

۱- بتاؤ کہ ان اعداد

۳۶۷۵، ۴۳۷۴، ۱۸۳۷۵، ۷۴۰۸۸

کو جداگانہ کن چھوٹے سے چھوٹے اعداد کے ساتھ ضرب دیا جائے کہ حاصل ضرب پورے مربعے بن جائیں۔

۲۔ بتاؤ کہ ان اعداد

۷۶۲۳، ۱۰۹۳۵۰، ۵۳۹۵۳۹

کو جداگانہ کن چھوٹے سے چھوٹے اعداد کے ساتھ ضرب دیا جائے کہ حاصل ضرب پورے مکعب بن جائیں۔

۳۔ اگر لا اور ما مثبت صحیح عدد ہوں اور لا ۔ ما جفت ہو تو ثابت کرو کہ لا^2 ۔ ما^2، ۴ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ کسی عدد اور اسکے مربع کا فرق جفت ہوتا ہے۔

۵۔ اگر ۴ لا ۔ ما، ۳ کا ضعف ہو تو ثابت کرو کہ ۴لا^2 + ۷لا ما ۔ ۲ما^2، ۹ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۶۔ ۸۰۶۴ کے مقسوم علیہوں کی تعداد معلوم کرو۔

۷۔ عدد ۷۰۵۶ کتنے مختلف طریقوں سے دو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ ۲^{۴ن} ۔ ۱، ۱۵ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ ن (ن + ۱) (ن + ۵)، ۶ کا ضعف ہے

۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر کسی عدد اور اس عدد کے مکعب دونوں کو ۶ پر تقسیم کیا جائے تو دونوں صورتوں میں وہی باقی حاصل ہوتی ہے۔

۱۱۔ اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ ن (ن^2 + ۲۰)، ۴۸ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ ن (ن^2 ۔ ۱) (۳ ن + ۲)، ۲۴ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

۱۳- اگر ن، ۲ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $ن^{۵}$ - ۵ $ن^{۳}$ + ۴ ن، ۱۲۰ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۱۴- ثابت کرو $۳^{۲ن}$ + ۷، ۸ کا ضعف ہے۔

۱۵- اگر ن کوئی عددِ مفرد ہو جو ۳ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $ن^{۲}$ - ۱، ۲۴ کا کوئی ضعف ہے۔

۱۶- ثابت کرو کہ، ن کی تمام قیمتوں کے لئے $ن^{۵}$ - ن، ۳۰ پر تقسیم ہو سکتا ہے اور اگر ن طاق ہو تو ۲۴۰ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۱۷- ثابت کرو کہ اگر دو عددِ مفرد ۶ سے بڑے ہوں تو اُن کے مربعوں کا فرق ۲۴ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۱۸- ثابت کرو کہ کوئی مربع عدد ۳ ن - ۱ کی شکل کا نہیں ہو سکتا۔

۱۹- ثابت کرو کہ ہر مکعب عدد ۹ ن یا ۹ ن ± ۱ کی شکل کا ہوتا ہے۔

۲۰- ثابت کرو کہ اگر کسی مکعب عدد کو ۷ پر تقسیم کیا جائے تو باقی ۰، ۱ یا ۶ بچیگی۔

۲۱- اگر ایک عدد مربع بھی ہو اور مکعب بھی تو ثابت کرو کہ یہ ۷ ن یا ۷ ن + ۱ کی شکل کا ہوگا۔

۲۲- ثابت کرو کہ کوئی مثلث عدد ۳ ن .. نہیں ہو سکتا۔

۲۳- اگر ۲ ن + ۱ کوئی عدد مفرد ہو تو $۱^{۲}$، $۲^{۲}$، $۳^{۲}$ ... $ن^{۲}$ کو ۲ ن + ۱ پر تقسیم ... باقیاں بچتی ہیں۔

۲۴- ثابت کرو کہ [illegible] ہیں خواہ ا اور لا کی کچھ ہی قیمتیں [illegible]

۲۵- ثابت کرو کہ ہر طاق عدد کی جفت قوت ۸ ل + ۱ کی شکل کی ہوتی ہے۔

۲۶- ثابت کرو کہ کسی عدد کی ۱۲ ویں قوت ۱۳ ن، ۱۳ ن + ۱ کی شکل کی ہوتی ہے۔

۲۷- ثابت کرو کہ کسی عدد کی ۸ ویں قوت ۱۷ ن یا ۱۷ ن ± ۱ کی شکل کی ہوتی ہے۔

۲۸- اگر ن کوئی عدد مفرد ہو جو ۵ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ن^{۴} - ۱، ۲۴۰ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۲۹- اگر ن کوئی مفرد عدد ہو جو ۳ سے بڑا ہو بشرطیکہ ۷ نہ ہو تو ثابت کرو کہ ن^{۶} - ۱، ۱۶۸ پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

۳۰- اگر ن بلحاظ ۲، ۳، ۱۹ اور ۳۷ کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ ن^{۳۶} - ۱، ۳۳۷۴۴ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

۳۱- اگر (ف + ۱) اور ۲ ف + ۱ دونوں مفرد عدد ہوں تو ثابت کرو کہ لا^{۲ف} - ۱ پورا تقسیم ہو سکتا ہے ۸ (ف + ۱)(۲ ف + ۱) پر بشرطیکہ لا بلحاظ ۲، ف + ۱، ۲ ف + ۱ کے مفرد ہو۔

۳۲- اگر ف عددِ مفرد ہو اور لا بلحاظ ف کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ لا$^{فر - فر-۱}$ - ۱ پورا تقسیم ہو جاتا ہے فر پر۔

۳۳- اگر م ایک عددِ مفرد ہو اور ا اور ب دو ایسے عدد ہوں جو م سے کم ہوں تو ثابت کرو۔

$$ا^{م-۲} + ا^{م-۳} ب + ا^{م-۴} ب^{۲} + \ldots\ldots + ب^{م-۲}$$

م کا ضعف ہوگا۔

۳۴- اگر ا کوئی عدد ہو تو کوئی [illegible] عدد [illegible] اس شکل [illegible] = ا ق + ب میں لکھا جا سکتا ہے جہاں [illegible] ق اور ب [illegible]

بالترتیب خارج قسمت اور باقی ہیں جو ع کو ا پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ عدد ا کو جس کے ساتھ کوئی اور عدد اس طرح منسوب کیا جاتا ہے مقیاس کہتے ہیں۔ بلحاظ کسی خاص مقیاس کے عدد ع کی ا مختلف شکلیں ہیں جن میں سے ہر ایک شکل باقی ب کی مختلف قیمتوں کے جواب میں پیدا ہوتی ہے مثلاً مقیاس ۳ کے جواب میں ۳ ق، ۳ ق + ۱، ۳ ق + ۲ کی شکل کے عدد ہیں۔ ان کو اختصاراً ۳ ق، ۳ ق ± ۱ لکھ سکتے ہیں کیونکہ
۳ ق + ۲ = ۳ (ق + ۱) − ۱، اسی طرح سے مقیاس ۵ کے جواب میں عدد ع ذیل کی پانچ شکلوں ۵ ق، ۵ ق ± ۱، ۵ ق ± ۲ میں سے کسی ایک شکل کا ہوگا۔

۴۲۴۔ اگر ب اور ج دو ایسے صحیح عدد ہوں کہ اگر ان کو ا پر تقسیم کیا جائے تو وہی باقی بچے تو ان عددوں کو بلحاظ مقیاس ا کے مستطابق کہتے ہیں۔ اس صورت میں ب - ج ا کا ضعف ہوگا۔ گاس کی ترقیم کے موافق ہم اس کو بعض اوقات یوں تحریر کرینگے۔

ب ≡ ج (مق ا) یا ب - ج ≡ ۰ (مق ا)

ان ضابطوں میں سے ہر ایک ضابطہ استطابق کہلاتا ہے۔

۴۲۵۔ اگر بلحاظ مقیاس ا کے ب اور ج مستطابق ہوں تو ف ب اور ف ج مستطابق ہونگے جہاں ف کوئی صحیح عدد ہے۔

حسب مفروض ب - ج = ن ا جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے اسلئے ف ب - ف ج = ف ن ا، پس مسئلہ ثابت ہوا

۴۲۶۔ اگر ا بلحاظ ب کے مفرد ہو تو مقادیر

ا، ۲ ا، ۳ ا، ..... (ب - ۱) ا

کو ب پر تقسیم کرنے سے جو باقیاں حاصل ہوں گی وہ سب مختلف ہوں گی۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ جب دو مقادیر م ا اور مَ ا کو ب پر تقسیم کیا جائے تو ایک ہی باقی ر حاصل ہوتی ہے، تب م ا = ق ب + ر اور مَ ا = قَ ب + ر

یعنی (م - مَ) ا = (ق - قَ) ب

اس لئے ب، (م - مَ) ا کو پورا تقسیم کرتا ہے اور چونکہ ب بلحاظ ا کے مفرد ہے اس لئے ب، (م - مَ) کو تقسیم کرتا ہے، لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ م اور مَ دونوں ب سے کم ہیں۔

پس باقیاں سب مختلف ہیں اور چونکہ ان مقداروں میں سے کوئی مقدار ب پر تقسیم نہیں ہو سکتی اس لئے باقیاں سلسلہ ۱، ۲، ۳، ..... ب - ۱ کی رقمیں ہونگی لیکن ضروری نہیں کہ باقیاں اسی ترتیب میں ہوں۔

نتیجۂ صریح۔ اگر ا بلحاظ ب کے مفرد ہو اور ج کوئی عدد ہو تو ذیل کے سلسلۂ حسابیہ

ج، (ج + ا)، (ج + ۲ ا)، (ج + ۳ ا)، ..... ج + (ب - ۱) ا

کی ب رقموں کو ب پر تقسیم کرنے سے وہی باقیاں نکلتی ہیں جو سلسلہ

ج، ج + ۱، ج + ۲، ...... ج + (ب - ۱)

سے نکلتی ہیں اگرچہ ضروری نہیں کہ اسی ترتیب میں ہوں۔ پس باقیاں ۰، ۱، ۲، ..... ب - ۱ ہوں گی۔

۲۷۴۔ اگر ب$_1$، ب$_2$، ب$_3$ ..... بلحاظ مقیاس ا کے مقادیر

$ج_1$، $ج_2$، $ج_3$، ...... کے مستطابق ہوں تو حاصل ضرب $ب_1 ب_2 ب_3$ ..... اور $ج_1 ج_2 ج_3$ ..... بھی مستطابق ہونگے۔

حسب مفروض

$ب_1 - ج_1 = ن_1 ل$، $ب_2 - ج_2 = ن_2 ل$، $ب_3 - ج_3 = ن_3 ل$، ......

جہاں $ن_1$، $ن_2$، $ن_3$، ...... صحیح عدد ہیں۔

$$ب_1 ب_2 ب_3 ..... = (ج_1 + ن_1 ل)(ج_2 + ن_2 ل)(ج_3 + ن_3 ل)....$$

$$= ج_1 ج_2 ج_3 .... + ضعف\ (ل)$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۲۸۔ اب ہم فرما کے مسئلہ کا متبادل ثبوت درج کرتے ہیں

اگر ف ایک مفرد عدد ہو اور ع بلحاظ ف کے مفرد ہو تو $ع^{ف-۱} - ۱$، ف کا ضعف ہوگا۔

چونکہ ع اور ف بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہیں، اسلئے جب اعداد

ع، ۲ع، ۳ع، ..... (ف-۱) ع ...... (۱)

کو ف پر تقسیم کیا جائے تو باقیاں بالترتیب

۱، ۲، ۳، ..... (ف-۱) نکلتی ہیں اگرچہ یہ ضروری نہیں کہ اسی ترتیب میں ہوں۔ اسلئے (۱) کی تمام رقموں کا حاصل ضرب باقیوں کی تمام رقوم کے حاصل ضرب کے مستطابق ہے جبکہ ف مقیاس ہو

یعنی $\lfloor\underline{ف-۱}\ ع^{ف-۱}$ اور $\lfloor\underline{ف-۱}$ کو ف پر تقسیم کرنے سے

ایک ہی باقی نکلتی ہے، لہذا

$$\underline{ف-۱}\ (ع^{ف-۱} - ۱) = ضعف\ (ف)$$

لیکن ف-۱ بلحاظ ف کے مفرد ہے، اس لئے

$$ع^{ف-۱} - ۱ = ضعف\ (ف)$$

۴۲۹- ہم اُن صحیح اعداد کی تعداد کو جو کسی عدد ا سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں فہ (ا) سے تعبیر کریںگے، مثلاً فہ (۲) = ۱ فہ (۱۳) = ۱۲، فہ (۱۸) = ۶ کیونکہ وہ اعداد جو ۱۸ سے کم ہیں اور بلحاظ ۱۸ کے مفرد ہیں ذیل کے چھ اعداد ۱، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ہیں، یہ امر قابل غور ہے کہ ہم یہاں ا کو سب اعداد کے لحاظ سے مفرد خیال کرتے ہیں

۴۳۰- ثابت کرو کہ اگر اعداد ا، ب، ج، د، ...... بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو فہ (ا ب ج د ....)

= فہ (ا) × فہ (ب) × فہ (ج) × فہ (د) ......

حاصل ضرب ا ب پر غور کرو، تب پہلے ا ب عدد، ب سطروں میں اس طرح لکھے جا سکتے ہیں

۱، ۲، ...... ک، ...... ا

ا+۱، ا+۲ ...... ا+ک، ...... ا+ا

۲ا+۱، ۲ا+۲، ...... ۲ا+ک، ...... ۲ا+ا

....

(ب-۱) ا+۱، (ب-۱) ا+۲، ...... (ب-۱) ا+ک، ...... (ب-۱) ا+ا

اس انتصابی ستون پر غور کرو جو ک سے شروع ہوتا ہے اگر ک بلحاظ ا کے مفرد ہو تو اس ستون کی سب رقمیں

بلحاظ ا کے مفرد ہونگے، لیکن اگر ک اور ا میں کوئی مشترک جزوِ ضربی ہو تو اس ستون کا کوئی عدد بلحاظ ا کے مفرد نہیں ہوگا۔ اب پہلی قطار میں فہ (ا) عدد ہیں جو بلحاظ ا کے مفرد ہیں۔ پس فہ (ا) انتصابی ستون ایسے ہیں جن کی سب رقمیں بلحاظ ا کے مفرد ہیں۔ فرض کرو کہ وہ ستون جو ک سے شروع ہوتا ہے اسی قسم کا ستون ہے۔ اس ستون کی رقمیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور اگر اس کی رقموں کو ب پر تقسیم کیا جائے تو بالترتیب باقیاں ۰، ۱، ۲، ۳، ..... (ب - ۱) حاصل ہوتی ہیں (دیکھو نتیجہ صریح دفعہ ۴۲۶)، پس اس ستون میں فہ (ب) عدد بلحاظ ب کے مفرد ہیں۔

اب فہ (ا) ستون ایسے ہیں جنکی ہر رقم بلحاظ ا کے مفرد ہے۔ اور ایسے ہر ستون میں فہ (ب) عدد ہیں جو بلحاظ ب کے مفرد ہیں۔ پس جدول بالا میں کل فہ (ا) × فہ (ب) عدد ایسے ہیں جو بلحاظ ا اور ب دونوں کے مفرد ہیں۔ یعنی بلحاظ ا ب کے مفرد ہیں۔ لہذا

فہ (ا ب) = فہ (ا) × فہ (ب)

∴ فہ (ا ب ج د ....) = فہ (ا) × فہ (ب ج ....)

= فہ (ا) × فہ (ب) × فہ (ج د ....)

= فہ (ا) × فہ (ب) × فہ (ج) × فہ (د)

۴۳۱۔ اُن مثبت صحیح اعداد کی تعداد معلوم کرو جو ایک معلومہ عدد سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں

فرض کرو کہ تعدادِ مذکور ع ہے اور ع = $ا^{ق}$ $ب^{ق}$ $ج^{ل}$ .... جہاں

ا، ب، ج، .... مختلف اعداد مفرد ہیں اور ف، ق، ر مثبت صحیح عدد ہیں۔

جزوِ ضربی $\text{ا}^{\text{ف}}$ پر غور کرو، طبعی اعداد ۱، ۲، ۳، ... $\text{ا}^{\text{ف}} - ۱$، $\text{ا}^{\text{ف}}$ میں وہ اعداد جو بلحاظ ا کے مفرد نہیں ہیں یہ ہیں۔

$$\text{ا}،\ ۲\text{ا}،\ ۳\text{ا}،\ \ldots\ldots (\text{ا}^{\text{ف}-۱} - ۱)\,\text{ا}،\ (\text{ا}^{\text{ف}-۱})\,\text{ا}$$

اور اِن کی تعداد $\text{ا}^{\text{ف}-۱}$ ہے، اس لئے

$$\text{فہ}(\text{ا}^{\text{ف}}) = \text{ا}^{\text{ف}} - \text{ا}^{\text{ف}-۱} = \text{ا}^{\text{ف}}\left(۱ - \frac{۱}{\text{ا}}\right)$$

اب سب اجزائے ضربی $\text{ا}^{\text{ف}}$، $\text{ب}^{\text{ق}}$، $\text{ج}^{\text{ر}}$ ...... بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہیں۔

$$\therefore \text{فہ}(\text{ا}^{\text{ف}}\,\text{ب}^{\text{ق}}\,\text{ج}^{\text{ر}}\ldots) = \text{فہ}(\text{ا}^{\text{ف}}) \times \text{فہ}(\text{ب}^{\text{ق}}) \times \text{فہ}(\text{ج}^{\text{ر}})\ldots$$

$$= \text{ا}^{\text{ف}}\left(۱ - \frac{۱}{\text{ا}}\right) \times \text{ب}^{\text{ق}}\left(۱ - \frac{۱}{\text{ب}}\right) \times \text{ج}^{\text{ر}}\left(۱ - \frac{۱}{\text{ج}}\right)\ldots$$

$$= \text{ا}^{\text{ف}}\,\text{ب}^{\text{ق}}\,\text{ج}^{\text{ر}}\ldots\left(۱ - \frac{۱}{\text{ا}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{\text{ب}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{\text{ج}}\right)\ldots$$

یعنی $\text{فہ}(\text{ع}) = \text{ع}\left(۱ - \frac{۱}{\text{ا}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{\text{ب}}\right)\left(۱ - \frac{۱}{\text{ج}}\right)\ldots$

مثال ۔ ثابت کرو کہ اُن سب صحیح اعداد کا حاصل جمع جو ع سے کم ہوں اور بلحاظ اسکے مفرد ہوں $\frac{۱}{۲}\,\text{ع} \times \text{فہ}(\text{ع})$ ہے

اگر لا کوئی صحیح عدد ہو جو ع سے کم ہو اور بلحاظ اس کے مفرد ہو تو ع - لا بھی ایک صحیح عدد ہوگا جو ع سے کم اور بلحاظ اس کے مفرد ہوگا۔

صحیح عددوں کو ا، ف، ق، ر، ...... سے اور ان کے حاصل جمع کو ج سے تعبیر کرو۔ تب

ج = ا + ف + ق + ر + ... (ع - ر) + (ع - ق) + (ع - ف) + (ع - ا)

اس سلسلہ میں فہ (ن) رقمیں ہیں۔

اس سلسلہ کو الٹا لکھنے سے

ج = (ع - ا) + (ع - ف) + (ع - ق) + (ع - ر) + ... + ر + ق + ف + ا

∴ جمع کرنے سے ۲ ج = ع + ع + ع + ... فہ (ع) رقموں تک

$$∴ ج = \frac{۱}{۲} ع × فہ (ع)$$

۳۲۴۔ دفعۂ گذشتہ سے ظاہر ہے کہ جو عدد ع سے کم ہیں اور بلحاظ اس کے مفرد نہیں ہیں ان کی تعداد

$$= ع - ع \left(۱ - \frac{۱}{ا}\right)\left(۱ - \frac{۱}{ب}\right)\left(۱ - \frac{۱}{ج}\right)\left(۱ - \frac{۱}{د}\right)....$$

$$\text{یعنی} = \frac{ع}{ا} + \frac{ع}{ب} + \frac{ع}{ج} + ... - \frac{ع}{اب} - \frac{ع}{اج} - \frac{ع}{بج} - ....$$

$$+ \frac{ع}{ابج} + ...$$

یہاں $\frac{ع}{ا}$ ذیل کے عددوں

$$ا، ۲ا، ۳ا، ...... \frac{ع}{ا} × ا$$

کی اس تعداد کو تعبیر کرتا ہے جن میں جزو ضربی ا شامل ہے۔

اور رقم $\frac{ع}{اب}$ عددوں اب، ۲اب، ۳اب، .... $\frac{ع}{اب}$ × اب کی اس تعداد کو تعبیر کرتی ہے جنمیں جزو ضربی اب شامل ہے اور علیٰ ہذالقیاس مزید براں ہر ایک عدد ایک اور

صرف ایک بار شمار میں آتا ہے۔ مثلاً ا ب کا ہر ایک ضعف ایک مرتبہ ا کے اضعاف میں، ایک مرتبہ ب کے اضعاف میں اور ضمنی طور پر ایک مرتبہ ا ب کے اضعاف میں شامل ہوگا۔ پس کل ایک مرتبہ شمار میں آئے گا اسی طرح ا ب ج کا ہر ضعف (ا، ب، ج) اضعاف میں جن میں بالترتیب

$\frac{\text{ع}}{\text{ا}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{ج}}$ رقمیں ہیں ایک ایک بار آئیگا

اور ا ب، ا ج، ب ج کے اضعاف جن میں بالترتیب

$\frac{\text{ع}}{\text{اب}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{اج}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{بج}}$ رقمیں ہیں ایک ایک بار آئیگا

اور ا ب ج کے $\frac{\text{ع}}{\text{ابج}}$ اضعاف میں ایک مرتبہ آئیگا۔

اس لئے ا ب ج کا ہر ایک ضعف ۳ - ۳ + ۱ یعنی کُل ایک اور صرف ایک دفعہ آئیگا۔ اسی طرح اور صورتوں پر بحث کی جاسکتی ہے۔

۴۳۳ - [ولسن، کا مسئلہ]۔ اگر ف ایک عددِ مفرد ہو تو $1 + \lfloor \text{ف} - 1$ ، ف پر تقسیم ہوسکتا ہے۔

دفعہ ۳۱۴ مشق ۲ کی رُو سے

$$\lfloor \text{ف}-1 = (\text{ف}-1)^{\text{ف}-1} - (\text{ف}-1)(\text{ف}-2)^{\text{ف}-1} + \frac{(\text{ف}-1)(\text{ف}-2)}{2\times 1}\times(\text{ف}-3)^{\text{ف}-1}$$

$$- \frac{(\text{ف}-1)(\text{ف}-2)(\text{ف}-3)}{\lfloor 3}(\text{ف}-4)^{\text{ف}-1} + \dots (\text{ف}-1) \text{ رقموں تک}$$

اور فرما کے مسئلہ کی رو سے جملوں $(\text{ف}-1)^{\text{ف}-1}$ ، $(\text{ف}-2)^{\text{ف}-1}$ ، $(\text{ف}-3)^{\text{ف}-1}$ ، ...

میں سے ہر ایک جملہ ا + ضعف (ف) کی شکل کا ہے پس

$$\underline{|ف-۱} = ضعف(ف) + \left\{ ۱-(ف-۱) + \frac{(ف-۱)(ف-۲)}{۱\times۲} - \ldots (ف-۱) \text{ تک حملوں} \right\}$$

$$= ضعف (ف) + \left\{ (۱-۱)^{ف-۱} - (-۱)^{ف-۱} \right\}$$

= ضعف (ف) - ۱ کیونکہ ف - ۱ جفت ہے

اسلئے ۱ + $\underline{|ف-۱}$ = ضعف (ف)

یہ مسئلہ صرف اسی صورت میں درست ہے جب ف مفرد ہو، فرض کرو کہ ف کا کوئی جزوِ ضربی ق ہے، تب ق، ف سے کم ہے اور $\underline{|ف-۱}$ کو پورا تقسیم کرتا ہے، لہٰذا ۱ + $\underline{|ف-۱}$، ق کا ضعف نہیں ہے اور بنابریں ف کا ضعف نہیں ہے۔

ولسن کا مسئلہ دفعہ ۴۱۳ کے نتیجہ کو استعمال کئے بغیر بھی ثابت ہوسکتا ہے، دیکھو دفعہ ذیل۔

۴۳۴۔ (ولسن کا مسئلہ) اگر ف کوئی عددِ مفرد ہو تو ۱ + $\underline{|ف-۱}$، ف پر تقسیم ہوسکتا ہے۔

فرض کرو کہ اعداد

۱، ۲، ۳، ۴، ...... ف - ۱ .... (۱)

میں سے کوئی عدد ا ہے۔ تب ا بلحاظ ف کے مفرد ہے اور اگر حاصل ضرب ۱ × ا، ۲ × ا، ۳ × ا، ۴ × ا، .... (ف - ۱) ا کو ف پر تقسیم کیا جائے تو ان میں سے ایک اور صرف ایک ہی عدد کی صورت میں باقی ۱ نکلتی ہے (دیکھو دفعہ ۴۲۶)

فرض کرو کہ یہ حاصل ضرب م ا ہے، اب ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ اعداد م اور ا مختلف ہیں سوائے اس صورت کے

جبکہ ا = ف - ۱ یا ۱، کیونکہ اگر ا۲ کو ف پر تقسیم کرنے سے باقی ۱ نکلے تو

ا۲ - ۱ ≡ ۰ (مق ف)

اور چونکہ ف مفرد ہے اِس لئے یہ صرف اسی صورت میں ہوسکتا ہے جبکہ ا + ۱ = ف یا ا - ۱ = ۰ یعنی جبکہ ا = ف - ۱ یا ۱ لہذا حاصل ضربوں ۲ ا، ۳ ا، .... (ف - ۲) ا میں سے صرف ایک حاصل ضرب ایسا ہے جس کو ف پر تقسیم کرنے سے باقی ۱ حاصل ہوتی ہے یعنی سلسلہ (۱) میں جو عدد ہیں اُن میں سے ہر ایک کی صورت میں بالاستثنائے پہلے اور آخری عدد کے ہم ایک اور صرف ایک عدد ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ اِن دونوں کا حاصل ضرب ضعف (ف) + ۱ کی شکل کا ہو۔ اِس لئے صحیح عددوں ۲، ۳، ۴، .... (ف - ۲) میں سے جنکی تعداد جفت ہے دو دو عددوں کو لیکر ایسے زوج بنائے جاسکتے ہیں کہ ہر زوج کا حاصل ضرب ضعف (ف) + ۱ کی شکل کا ہو۔ اِس لئے اِن سب زوجوں کو باہم ضرب دینے سے

۲ × ۳ × ۴ × ...... (ف - ۲) ≡ ضعف (ف) + ۱

یعنی ۱ × ۲ × ۳ × ۴ ..... × (ف - ۲) × (ف - ۱) = (ف - ۱) {ضعف (ف) + ۱}

اس سے |ف - ۱ = ضعف (ف) + ف - ۱

یعنی ۱ + |ف - ۱، ف کا ضعف ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر ۲ف + ۱ عدد مفرد ہو تو (|ف)۲ + (-۱)ف تقسیم ہوسکتا ہے ۲ف + ۱ پر۔

ولسن کے مسئلہ کی رُو سے ۱ + |۲ف تقسیم ہوسکتا ہے ۲ف + ۱ پر،

ن = ۲ف + ۱ رکھو یعنی ف + ۱ = ن - ف، تب

|۲ف = ۱×۲×۳×۴×....×ف(ف+۱)(ف+۲)....(ن − ۱)

= ۱(ن − ۱)۲(ن − ۲)۳(ن − ۳)....ف(ن − ف)

= ن کا ضعف + (−۱)^{ف} (|ف)^{۲}

اس لئے ۱ + (−۱)^{ف} (|ف)^{۲} تقسیم ہو سکتا ہے ن پر یا ۲ف + ۱ پر

لہذا (|ف)^{۲} + (−۱)^{ف} تقسیم ہو سکتا ہے ۲ف + ۱ پر

۴۳۵۔ اعداد کے خواص کے متعلق بہت سے مسئلے استقراء حسابیہ سے ثابت ہو سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ اگر ف عدد مفرد ہو تو لا^{ف} − لا، ف پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

لا^{ف} − لا کو فا (لا) سے تعبیر کرو، تب

فا(لا+۱) − فا(لا) = (لا+۱)^{ف} − (لا+۱) − (لا^{ف} − لا)

= ف لا$^{ف-۱}$ + $\frac{ف(ف-۱)}{۱\times۲}$ × لا$^{ف-۲}$ + ... + ف لا

= ف کا ضعف، اگر ف مفرد ہو (دفعہ ۴۱۹)

∴ فا(لا+۱) = فا(لا) + ف کا ضعف

اس لئے اگر فا (لا)، ف پر تقسیم ہو سکے تو فا (لا+۱) بھی ف پر تقسیم ہو سکیگا

لیکن فا (۲) = ۲^{ف} − ۲ = (۱+۱)^{ف} − ۲

اور یہ ف کا ضعف ہے جب ف مفرد ہو (دفعہ ۴۱۹)

اس لئے فا (۳)، ف پر تقسیم ہو سکتا ہے، بنابریں فا (۴)، ف پر تقسیم ہو سکتا ہے۔ علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے یہ مسئلہ ہر صورت میں درست ہے۔

اس سے فرما کے مسئلہ کا ایک نیا ثبوت حاصل ہوتا ہے کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر لا بلحاظ ف کے مفرد ہو تو $لا^{ف-۱} - ۱$ ف کا ضعف ہوگا۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $۵^{۲ن+۲} - ۲۴ن - ۲۵$ پورا تقسیم ہو سکتا ہے ۵۷۶ پر۔

$۵^{۲ن+۲} - ۲۴ن - ۲۵$ کو فا (ن) سے تعبیر کرو

تب $فا(ن+۱) = ۵^{۲ن+۴} - ۲۴(ن+۱) - ۲۵$

$= ۵^۲ \times ۵^{۲ن+۲} - ۲۴ن - ۴۹$

$\therefore فا(ن+۱) - ۲۵ فا(ن) = ۲۵(۲۴ن+۲۵) - ۲۴ن - ۴۹$

$= ۵۷۶(ن+۱)$

اس لئے اگر فا(ن)، ۵۷۶ پر تقسیم ہو جائے تو فا(ن+۱) بھی تقسیم ہو جائیگا، لیکن ہم جانچ کرنے سے دیکھتے ہیں کہ یہ مسئلہ درست ہے جبکہ ن = ۱ اس لئے یہ درست ہوگا جبکہ ن = ۲ اس لئے یہ درست ہوگا جبکہ ن = ۳ اور علیٰ ہذا القیاس، پس یہ ہر صورت میں درست ہے۔

مندرجہ بالا نتیجہ ذیل کے طریقہ سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

$۵^{۲ن+۲} - ۲۴ن - ۲۵ = ۲۵^{ن+۱} - ۲۴ن - ۲۵$

$= ۲۵(۱+۲۴)^ن - ۲۴ن - ۲۵$

$= ۲۵ + ۲۵ \times ن \times ۲۴ + ضعف(۲۴^۲)$

$- ۲۴ن - ۲۵$

$= ۵۷۶ن + ضعف(۵۷۶)$

$= ضعف(۵۷۶)$

امثلہ نمبری ۳۰ (ب)

۱- ثابت کرو کہ $۱۰^{ن} + ۳ \times ۴^{ن+۲} + ۵$ تقسیم ہو سکتا ہے ۹ پر۔

۲- ثابت کرو کہ $۲ \times ۷^{ن} + ۳ \times ۵^{ن} - ۵$ ضعف ہے ۲۴ کا۔

۳- ثابت کرو کہ $۴ \times ۶^{ن} + ۵^{ن+۱}$ کو جب ۲۰ پر تقسیم کیا جائے تو باقی ۹ حاصل ہوتی ہے۔

۴- ثابت کرو کہ $۸ \times ۷^{ن} + ۴^{ن+۲}$، $۲۴ (۲۴ر - ۱)$ کی شکل کا ہے۔

۵- اگر ف مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $۲ \underline{|ف-۳} + ۱$، ف کا ضعف ہے۔

۶- ثابت کرو کہ $ر^{۴ب+۱} - ر$ تقسیم ہو سکتا ہے ۳۰ پر۔

۷- ثابت کرو کہ $\underline{|۲^{ر}}$ میں ۲ کی بڑی سے بڑی قوت $۲^{۲^{ر}-۱}$ ہے۔

۸- ثابت کرو کہ $۳^{۴ن+۲} + ۵^{۲ن+۱}$ ضعف ہے ۱۴ کا۔

۹- ثابت کرو کہ $۳^{۲ن+۵} + ۱۶۰ ن^{۲} - ۵۶ ن - ۲۴۳$ تقسیم ہو سکتا ہے ۵۱۲ پر۔

۱۰- ثابت کرو کہ $(۱ + لا + لا^{۲} + لا^{۳} + لا^{۴})^{ن-۱}$ کی تفصیل میں لا کی طاق قوتوں کے سروں کا حاصل جمع ن پر تقسیم ہو سکتا ہے جبکہ ن کوئی عدد مفرد ہو بالاستثنائے ۵ کے۔

۱۱- اگر ن، ۷ سے بڑا کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $ن^{۶} - ۱$ تقسیم ہو سکتا ہے ۵۰۴ پر۔

۱۲- اگر ن کوئی طاق عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$ن^{۶} + ۳ ن^{۴} + ۷ ن^{۲} - ۱۱$ ضعف ہے ۱۲۸ کا۔

۱۳- اگر ف کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $(۱ + لا)^{ف-۱}$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سر ف کے کسی ضعف کی نسبت بقدر ۱ کے متبادلاً بڑے چھوٹے ہیں۔

۱۴- ف ایک عدد مفرد ہے، اور ف عددوں کا ایک ایسا

سلسلۂ حسابیہ ہے جس کا فرق مشترک ف پر تقسیم نہیں ہو سکتا۔ ثابت کرو کہ اِن عددوں کی (ف-۱) ویں قوتوں کا حاصل جمع ف کے ایک ضعف سے بقدر ایک کے کم ہے۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ $ا^{۱۲} - ب^{۱۲}$، ۹۱ پر تقسیم ہو سکتا ہے اگر ا اور ب دونوں بلحاظ ۹۱ کے مفرد ہوں۔

۱۶۔ اگر ف مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $|\underline{ف-۲ر}\ |\underline{۲ر-۱} - ۱$ تقسیم ہو سکتا ہے ف پر۔

۱۷۔ اگر (ن-۱) اور (ن+۱) دونوں مفرد عدد ہوں اور ۵ سے بڑے ہوں تو ثابت کرو کہ $ن(ن^۲-۴)$ تقسیم ہو سکتا ہے ۱۲۰ پر اور $ن^۲(ن^۲+۱۶)$ تقسیم ہو سکتا ہے ۷۲۰ پر۔ نیز دکھاؤ کہ ن کی شکل ۳۰ ت یا ۳۰ ت ± ۱۲ ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ ن کی بڑی سے بڑی قوت جو $|\underline{ن^ر-۱}$ میں شامل ہے

$$\frac{ن^ر - ن ر + ر - ۱}{ن-۱} \text{ ہے۔}$$

۱۹۔ اگر ف عدد مفرد ہو اور ا بلحاظ ف کے مفرد ہو اور نیز ایک مربع عدد $ج^۲$ ایسا معلوم ہو سکتا ہو کہ $ج^۲ - ا$ تقسیم ہو سکے ف پر تو ثابت کرو کہ $ا^{\frac{۱}{۲}(ف-۱)} - ۱$ تقسیم ہو سکتا ہے ف پر۔

۲۰۔ استطابق

$$۹۸ لا - ۱ \equiv ۰ \ (مق\ ۱۳۹)$$

کا عام حل دریافت کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ ایسے تمام اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع جو ایک خاص عدد ع سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں

$$\frac{ع^۳}{۳}\left(۱-\frac{۱}{ا}\right)\left(۱-\frac{۱}{ب}\right)\left(۱-\frac{۱}{ج}\right)\cdots + \frac{ع}{۶}(۱-ا)(۱-ب)(۱-ج)\cdots\cdots$$

ہے اور مکعبوں کا حاصل جمع

$$\frac{ع^4}{4}\left(1-\frac{1}{ا}\right)\left(1-\frac{1}{ب}\right)\left(1-\frac{1}{ج}\right)\cdots+\frac{ع^2}{4}(1-ا)(1-ب)(1-ج)\cdots$$

ہے جہاں ا، ب، ج ..... وغیرہ ع کے مختلف مفرد اجزائے ضربی ہیں۔

۲۲۔ اگر ف اور ق دو مثبت صحیح عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$(فق)!$ تقسیم ہو سکتا ہے $(ف!)^{ق} \cdot ق!$ پر $(ق!)^{ف} \cdot ف!$ پر

۲۳۔ ثابت کرو کہ ایسے مربع عدد جو ثلاث عدد بھی ہوں $\frac{1}{1-6لا+لا^2}$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے مربعوں کے مساوی ہیں، اور دکھاؤ کہ ایسے مربع اعداد جو مخمس بھی ہوں $\frac{1}{1-10لا+لا^2}$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ایسے تمام عددوں کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع جو عدد ع سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں

$$\frac{ع^5}{5}\left(1-\frac{1}{ا}\right)\left(1-\frac{1}{ب}\right)\left(1-\frac{1}{ج}\right)\cdots+\frac{ع^3}{3}(1-ا)(1-ب)(1-ج)\cdots$$

$$-\frac{ع}{30}(1-ا^3)(1-ب^3)(1-ج^3)\cdots\cdots$$

ہے جہاں ا، ب، ج، ع کے مختلف مفرد اجزائے ضربی ہیں۔

۲۵۔ اگر ان صحیح اعداد کی تعداد کو جو عدد ع سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں فہ(ع) سے تعبیر کیا جائے اور اگر لا بلحاظ ع کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ

$$لا^{فہ(ع)}-1\equiv 0\ (\text{مق } ع)$$

۲۶۔ اگر کسی عدد ع کے مقسوم علیہ س، س۱، س۲، ..... ہوں

تو دکھاؤ کہ فہ (س۱) + فہ (س۲) + فہ (س۳) + ... = ع

نیز ثابت کرو کہ

فہ(۱) لا/(۱+لا^۲) - فہ(۳) لا^۳/(۱+لا^۶) + فہ(۵) لا^۵/(۱+لا^۱۰) - ...... تا لا متناہی

= لا(۱-لا^۲)/(۱+لا^۲)^۲

اکتیسواں باب

مسلسل کسور کا عام نظریہ

۴۳۶ ـ پچیسویں باب میں ہم نے جن مسلسل کسروں پر بحث کی ہے وہ اس شکل کی تھیں: $ا_1 + \frac{1}{ا_2 +} \frac{1}{ا_3 +} \dots$ جہاں $ا_2$، $ا_3$ ... مثبت صحیح عدد ہیں اور $ا_1$ یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے یا صفر کے مساوی ہے ـ اب ہم زیادہ عام شکل کی مسلسل کسروں پر بحث کرتے ہیں ـ

۴۳۷ ـ مسلسل کسر کی عام سے عام شکل $\frac{ب_1}{ا_1 \pm} \frac{ب_2}{ا_2 \pm} \frac{ب_3}{ا_3 \pm} \dots$ ہے جہاں $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ ... $ب_1$، $ب_2$، $ب_3$ ...... کوئی مقداریں ہیں ـ کسور $\frac{ب_1}{ا_1}$، $\frac{ب_2}{ا_2}$، $\frac{ب_3}{ا_3}$ ..... کو مسلسل کسر کے اجزائے ترکیبی کہتے ہیں ـ ہم اپنی توجہ صرف دو صورتوں تک محدود رکھینگے (۱) وہ صورت جس میں ہر جزوِ ترکیبی کی علامت مثبت ہے (۲) وہ صورت جس میں ہر جزوِ ترکیبی کی علامت منفی ہے ـ

۴۳۸ ـ مسلسل کسر

$$\frac{ب_1}{ا_1 +} \quad \frac{ب_2}{ا_2 +} \quad \frac{ب_3}{ا_3 +} \ldots\ldots$$

کے متواتر مستدقوں کے بنانے کا کلیہ دریافت کرو۔
پہلے تین مستدق یہ ہیں۔

$$\frac{ب_1}{ا_1}،\quad \frac{ا_2 ب_1}{ا_1 ا_2 + ب_2}،\quad \frac{ا_3 ا_2 ب_1 + ب_3 ب_1}{ا_3 (ا_1 ا_2 + ب_2) + ب_3 ا_1}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مستدق کا شمار کنندہ دوسرے مستدق کے شمار کنندہ کو $ا_3$ سے اور پہلے مستدق کے شمار کنندہ کو $ب_3$ سے ضرب دیکر دونوں حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے نیز تیسرے مستدق کا نسب نما بھی اسی طرح حاصل ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ متواتر مستدق اسی طرح سے بنائے گئے ہیں۔ ان کے شمار کنندوں کو $ق_1$، $ق_2$، $ق_3$، .... سے اور نسب نماؤں کو $ل_1$، $ل_2$، $ل_3$ .... سے تعبیر کرو۔
یہ تسلیم کرو کہ کلیہ بالا ن ویں مستدق کے لئے صحیح ہے، یعنی

فرض کرو کہ $ق_ن = ا_ن ق_{ن-1} + ب_ن ق_{ن-2}$ اور $ل_ن = ا_ن ل_{ن-1} + ب_ن ل_{ن-2}$

(ن + ۱) واں مستدق ن ویں مستدق سے صرف اس لحاظ سے مختلف ہے کہ اول الذکر میں $ا_ن$ کی بجائے $ا_ن + \frac{ب_{ن+1}}{ا_{ن+1}}$ ہے، اسلئے

(ن + ۱) واں مستدق

$$= \frac{\left(ا_ن + \frac{ب_{ن+1}}{ا_{ن+1}}\right) ق_{ن-1} + ب_ن ق_{ن-2}}{\left(ا_ن + \frac{ب_{ن+1}}{ا_{ن+1}}\right) ل_{ن-1} + ب_ن ل_{ن-2}} = \frac{ق_ن + \frac{ب_{ن+1}}{ا_{ن+1}} ق_{ن-1}}{ل_ن + \frac{ب_{ن+1}}{ا_{ن+1}} ل_{ن-1}}$$

$$= \frac{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ق}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ق}_{\text{ن}-1}}{\text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}}$$

لہٰذا اگر ہم $\text{ق}_{\text{ن}+1} = \text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ق}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ق}_{\text{ن}-1}$

اور $\text{ل}_{\text{ن}+1} = \text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+1}\,\text{ل}_{\text{ن}-1}$

رکھیں تو ظاہر ہے کہ (ن + ۱) ویں مستدق کا شمار کنندہ اور نسب نما اسی کلیہ کے ماتحت بنتے ہیں جو ن ویں مستدق کی صورت میں تسلیم کیا گیا تھا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ کلیہ تیسرے مستدق کے لئے درست ہے لہٰذا یہ چوتھے مستدق کے لئے درست ہے اور علیٰ ہذالقیاس۔ پس یہ عام طور پر درست ہے۔

۴۳۹۔ مسلسل کسر

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1 -}\;\frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2 -}\;\frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3 -}\;\cdots\cdots$$

کی صورت میں ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ق}_{\text{ن}-1} - \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ق}_{\text{ن}-2}$$

اور $\text{ل}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-1} - \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-2}$

یہ نتیجہ دفعہ ماقبل کے نتیجہ سے محض $\text{ب}_{\text{ن}}$ کی علامت بدلنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۴۴۰۔ مسلسل کسر $\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1 +}\;\frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2 +}\;\frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3 +}\;\cdots\cdots$

میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$\text{ق}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ق}_{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ق}_{\text{ن}-۲} \quad \text{اور} \quad \text{ل}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱} + \text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}-۲}$$

$$\therefore \frac{\text{ق}_{\text{ن}+۱}}{\text{ل}_{\text{ن}+۱}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} = \frac{(\text{ا}_{\text{ن}+۱}\,\text{ق}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+۱}\,\text{ق}_{\text{ن}-۱})\,\text{ل}_{\text{ن}} - (\text{ا}_{\text{ن}+۱}\,\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+۱}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱})\,\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}\,\text{ل}_{\text{ن}+۱}}$$

$$= -\frac{\text{ب}_{\text{ن}+۱}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱}}{\text{ل}_{\text{ن}+۱}} \left(\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}-۱}}{\text{ل}_{\text{ن}-۱}} \right)$$

لیکن $\frac{\text{ب}_{\text{ن}+۱}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱}}{\text{ل}_{\text{ن}+۱}} = \frac{\text{ب}_{\text{ن}+۱}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱}}{\text{ا}_{\text{ن}+۱}\,\text{ل}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}+۱}\,\text{ل}_{\text{ن}-۱}}$ جو ایک کسر واجب ہے، لہذا

$\frac{\text{ق}_{\text{ن}+۱}}{\text{ل}_{\text{ن}+۱}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}}$ تعداداً کم ہے $\frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{ن}}} - \frac{\text{ق}_{\text{ن}-۱}}{\text{ل}_{\text{ن}-۱}}$ سے

اور بلحاظ علامت اس سے مختلف ہے۔

اسی قسم کے استدلال سے جو دفعہ ۳۳۵ میں کیا گیا ہے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ طاق رتبہ کا ہر مستدق مسلسل کسر سے بڑا ہوتا ہے اور جفت رتبہ کا ہر مستدق مسلسل کسر سے چھوٹا ہوتا ہے پس طاق ویں رتبہ کا ہر ایک مستدق جفت ویں رتبہ کے ہر ایک مستدق سے بڑا ہوتا ہے۔

مثلاً $\frac{\text{ق}_{۲\text{ن}+۱}}{\text{ل}_{۲\text{ن}+۱}} - \frac{\text{ق}_{۲\text{ن}}}{\text{ل}_{۲\text{ن}}}$ مثبت ہے اور $\frac{\text{ق}_{۲\text{ن}-۱}}{\text{ل}_{۲\text{ن}-۱}} - \frac{\text{ق}_{۲\text{ن}}}{\text{ل}_{۲\text{ن}}}$ سے

کم ہے، لہذا $\frac{ق_{۲ن+۱}}{ل_{۲ن+۱}} < \frac{ق_{۲ن-۱}}{ل_{۲ن-۱}}$

نیز $\frac{ق_{۲ن-۱}}{ل_{۲ن-۱}} - \frac{ق_{۲ن}}{ل_{۲ن}}$ مثبت ہے اور $\frac{ق_{۲ن-۱}}{ل_{۲ن-۱}} - \frac{ق_{۲ن-۲}}{ل_{۲ن-۲}}$ سے

کم ہے، لہذا $\frac{ق_{۲ن}}{ل_{۲ن}} > \frac{ق_{۲ن-۲}}{ل_{۲ن-۲}}$

پس طاق ویں رتبہ کے سب مستدق مسلسل کسر سے بڑے ہوتے ہیں اور ان کی قیمت بتدریج کم ہوتی جاتی ہے۔ لیکن جفت ویں رتبہ کے سب مستدق مسلسل کسر سے چھوٹے ہوتے ہیں اور ان کی قیمت بتدریج بڑھتی جاتی ہے۔

اب فرض کرو کہ اجزائے ترکیبی کی تعداد لاانتہا ہے، تب طاق ویں رتبہ کے مستدقوں کی کوئی محدود انتہا ہوگی اور جفت ویں رتبہ کے مستدقوں کی بھی کوئی محدود انتہا ہوگی۔ اگر یہ انتہائیں مساوی ہوں تو کسر مسلسل کی ایک معین انتہا ہوگی۔ اگر یہ انتہائیں مساوی نہ ہوں یعنی طاق ویں مستدقوں کی انتہا اور ہو اور جفت ویں مستدقوں کی کچھ اور تو مسلسل کسر کو اہتزازی کسر کہا جاسکتا ہے، اس صورت میں کسر مذکور دو ایسی مقادیر کو علامتوں کے ذریعہ تعبیر کرتی ہے جن میں سے ایک جفت مستدقوں کی انتہا ہے اور دوسری طاق مستدقوں کی

۱۴۴ - ثابت کرو کہ مسلسل کسر $\frac{ب_۱}{ا_۱+}\ \frac{ب_۲}{ا_۲+}\ \frac{ب_۳}{ا_۳+}$ کی ایک معیّن انتہا ہوگی اگر $\frac{ا_ن ا_{ن+۱}}{ب_{ن+۱}}$ کی انتہا جبکہ ن لاانتہا

بڑا ہو صفر سے بڑی ہو۔

مسلسل کسر کی قیمت ایک خاص معین مقدار ہوگی اگر $\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}}$ اور $\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}}$ کی انتہاؤں کا فرق جبکہ ن لاانتہا بڑا ہو جائے صفر ہو۔

اب $$\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}} - \frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} = -\frac{ب_{ن+1}\, ل_{ن-1}}{ل_{ن+1}}\left(\frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} - \frac{ق_{ن-1}}{ل_{ن-1}}\right)$$

اسی طرح $$\frac{ق_{ن+1}}{ل_{ن+1}} - \frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} = (-1)^{ن-1}\, \frac{ب_{ن+1}\, ل_{ن-1}}{ل_{ن+1}} \times \frac{ب_{ن}\, ل_{ن-2}}{ل_{ن}} \times \dots \times \frac{ب_{4}\, ل_{2}}{ل_{4}} \times \frac{ب_{3}\, ل_{1}}{ل_{3}}\left(\frac{ق_{2}}{ل_{2}} - \frac{ق_{1}}{ل_{1}}\right)$$

لیکن $$\frac{ب_{ن+1}\, ل_{ن-1}}{ل_{ن+1}} = \frac{ب_{ن+1}\, ل_{ن-1}}{ا_{ن+1}\, ل_{ن} + ب_{ن+1}\, ل_{ن-1}} = \frac{1}{1 + \frac{ا_{ن+1}\, ل_{ن}}{ب_{ن+1}\, ل_{ن-1}}}$$

اور $$\frac{ا_{ن+1}\, ل_{ن}}{ب_{ن+1}\, ل_{ن-1}} = \frac{ا_{ن+1}\left(ا_{ن}\, ل_{ن-1} + ب_{ن}\, ل_{ن-2}\right)}{ب_{ن+1}\, ل_{ن-1}}$$

$$= \frac{ا_{ن}\, ا_{ن+1}}{ب_{ن+1}} + \frac{ا_{ن+1}\, ب_{ن}\, ل_{ن-2}}{ب_{ن+1}\, ل_{ن+1}}$$

نیز اِن رقموں میں سے کوئی رقم منفی نہیں ہو سکتی کہ اسلئے

اگر $\frac{ل_ن ل_{ن+۱}}{ب_{ن+۱}}$ کی انتہا صفر سے بڑی ہو تو $\frac{ل_ن ل_{ن+۱}}{ب_{ن+۱} ل_{ن-۱}}$ کی انتہا بھی صفر سے بڑی ہوگی، اِس صورت میں $\frac{ب_{ن+۱} ل_{ن-۱}}{ل_{ن+۱}}$ کی انتہا ایک سے کم ہوگی۔ لہذا $\frac{ق_{ن+۱}}{ل_{ن+۱}} - \frac{ق_ن}{ل_ن}$ کی قیمت لا انتہا کسور واجب کے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت کے مساوی ہوگی گویا صفر ہوگی۔ یعنی $\frac{ق_{ن+۱}}{ل_{ن+۱}}$ اور $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ کی انتہائیں ایک ہی ہوں گی۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔ مثلاً کسر مسلسل

$$\frac{۱^۲}{۳+}\ \frac{۲^۲}{۵+}\ \frac{۳^۲}{۷+} \cdots \frac{ن^۲}{۲ن+۱+} \cdots$$

میں نہا $\frac{ل_ن ل_{ن+۱}}{ب_{ن+۱}} =$ نہا $\frac{(۲ن+۱)(۲ن+۳)}{(ن+۱)^۲} = ۴$

لہذا کسر مذکور کی ایک معیّن انتہا ہے۔

۴۴۲۔ اگر مسلسل کسر $\frac{ب_۱}{د_۱-}\ \frac{ب_۲}{د_۲-}\ \frac{ب_۳}{د_۳-}$ میں ہر ایک جزو ترکیبی کا نسب نما شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہو تو مستدق مثبت کسریں ہوں گی جو بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہوں گی۔

حسب مفروض $\frac{ب_۱}{ا_۱}$ ، $\frac{ب_۲}{ا_۲}$ ، $\frac{ب_۳}{ا_۳}$ ..... سب واجب کسریں ہیں جن میں سے ہر ایک کا نسب نما شمار کنندہ سے کم ازکم بقدر ایک کے بڑا ہے۔ دوسرا مستدق $\frac{ب_۱}{ا_۱ - \frac{ب_۲}{ا_۲}}$ ہے

اور چونکہ $ا_۲$، $ب_۲$ سے کم ازکم بقدر ۱ کے بڑا ہے اور $\frac{ب_۲}{ا_۲}$ کسر واجب ہے اسلئے $ا_۱ - \frac{ب_۲}{ا_۲}$ بڑا ہے $ب_۱$ سے، یعنی دوسرا مستدق مثبت کسر واجب ہے اسی طرح سے دکھایا جاسکتا ہے کہ $\frac{ب_۲}{ا_۲ - \frac{ب_۳}{ا_۳}}$ کسر واجب ہے، اس کو $ک_۱$ سے

تعبیر کرو، تب تیسرا مستدق $\frac{ب_۱}{ا_۱ - ک_۱}$ ہے، اس لئے یہ بھی مثبت کسر واجب ہے اسی طرح سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$\frac{ب_۲}{ا_۲ -}\;\frac{ب_۳}{ا_۳ -}\;\frac{ب_۴}{ا_۴}$ مثبت کسر واجب ہے اسلئے چوتھا مستدق

$\frac{ب_۱}{ا_۱ -}\;\frac{ب_۲}{ا_۲ -}\;\frac{ب_۳}{ا_۳ -}\;\frac{ب_۴}{ا_۴}$ بھی مثبت کسر واجب ہے اور علیٰ ہذالقیاس۔

نیز $ق_ن = ا_ن ق_{ن-۱} - ب_ن ق_{ن-۲}$ ، $ل_ن = ا_ن ل_{ن-۱} - ب_ن ل_{ن-۲}$

$$\therefore \frac{ق_{ن+۱}}{ل_{ن+۱}} - \frac{ق_ن}{ل_ن} = \frac{ب_{ن+۱} ل_{ن-۱}}{ل_{ن+۱}} \left(\frac{ق_ن}{ل_ن} - \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}} \right)$$

لہذا $\frac{ق_{ن+۱}}{ل_{ن+۱}} - \frac{ق_ن}{ل_ن}$ اور $\frac{ق_ن}{ل_ن} - \frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ کی علامت ایک ہے

لیکن $\frac{ق_۲}{ل_۲} - \frac{ق_۱}{ل_۱} = \frac{ب_۱ ا_۲}{ا_۱ ا_۲ - ب_۲} - \frac{ب_۱}{ا_۱} = \frac{ب_۱ ب_۲}{ل_۱ ل_۲}$ اسلئے

یہ مثبت ہے، لہذا $\frac{ق_۲}{ل_۲} > \frac{ق_۱}{ل_۱}$ ، $\frac{ق_۲}{ل_۲} > \frac{ق_۳}{ل_۳}$ ، $\frac{ق_۴}{ل_۴} > \frac{ق}{ل}$

اور علیٰ ہذاالقیاس۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

نتیجہ صریح۔ اگر اجزائے ترکیبی کی تعداد لامتناہی ہو تو مستدق کسور واجب کا ایک لامتناہی سلسلہ بناتے ہیں جو بلحاظ مقدار صعودی ترتیب میں ہوتا ہے اور اس صورت میں کسر مسلسل کی انتہا ایک معین مقدار ہوتی ہے جو ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

۳۴۴۔ ضابطہ

$$ق_ن = ا_ن ق_{ن-۱} + ب_ن ق_{ن-۲} \quad \text{اور} \quad ل_ن = ا_ن ل_{ن-۱} + ب_ن ل_{ن-۲}$$

سے ہم بالتواتر جتنے مستدق چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔ تاہم بعض صورتوں میں ن ویں مستدق کے لئے ایک عام جملہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال۔ $\frac{۶}{۵-}\ \frac{۶}{۵-}\ \frac{۶}{۵-}$ ..... کا ن واں مستدق معلوم کر

ہیں معلوم ہے کہ $ق_ن = ۵ ق_{ن-۱} - ۶ ق_{ن-۲}$ ، پس شمار کنند

ایک متوالی سلسلہ بناتے ہیں جنکی ہر تین متصل رقمیں اس رشتہ

$$ق_{ن} - ۵ق_{ن-۱} + ۶ق_{ن-۲} = ۰$$

کے ذریعہ باہم مربوط ہیں۔

فرض کرو کہ $ج = ق_{۱} + ق_{۲}لا + ق_{۳}لا^{۲} + \dots ق_{ن}لا^{ن-۱} + \dots$

تب حسب دفعہ ۳۲۵ $ج = \frac{ق_{۱} + (ق_{۲} - ۵ق_{۱})لا}{۱ - ۵لا + ۶لا^{۲}}$

لیکن پہلے دو مستدق $\frac{۶}{۵}$ اور $\frac{۳۰}{۱۹}$ ہیں۔

$$\therefore ج = \frac{۶}{۱ - ۵لا + ۶لا^{۲}} = \frac{۱۸}{۱ - ۳لا} - \frac{۱۲}{۱ - ۲لا}$$

جس سے $ق_{ن} = ۱۸ \times ۳^{ن-۱} - ۱۲ \times ۲^{ن-۱} = ۶(۳^{ن} - ۲^{ن})$

اسی طرح سے اگر $ج' = ل_{۱} + ل_{۲}لا + ل_{۳}لا^{۲} + \dots + ل_{ن}لا^{ن-۱} + \dots$

تو ہم معلوم کرسکتے ہیں کہ $ج' = \frac{۵ - ۶لا}{۱ - ۵لا + ۶لا^{۲}} = \frac{۹}{۱ - ۳لا} - \frac{۴}{۱ - ۲لا}$

جس سے $ل_{ن} = ۹ \times ۳^{ن-۱} - ۴ \times ۲^{ن-۱} = ۳^{ن+۱} - ۲^{ن+۱}$

$$\therefore \frac{ق_{ن}}{ل_{ن}} = \frac{۶(۳^{ن} - ۲^{ن})}{۳^{ن+۱} - ۲^{ن+۱}}$$

یہ طریقہ صرف اسی صورت میں کارآمد ہوسکتا ہے جبکہ $ا_{ن}$ اور $ب_{ن}$، ن کی تمام قیمتوں کے لئے مستقل ہوں، مثلاً ہم دکھا سکتے ہیں کہ کسر مسلسل $\frac{ب}{ا+}\frac{ب}{ا+}\frac{ب}{ا+}\dots$ کی صورت میں متواتر مستدقوں کے شمار کنندے $\frac{ب}{۱ - الا - ب لا^{۲}}$

کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے مساوی ہیں اور نسب نما $\frac{۱ + ب لا}{۱ - ا لا - ب لا^۲}$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے مساوی ہیں۔

۴۴۴۔ $ق_ن$ اور $ل_ن$ کی عام قیمتوں کی تحقیق کے متعلق طالب علم کو چاہیئے کہ محدود فرقوں (فائی نائٹ ڈفرنسز) پر کتب ریاضی کا مطالعہ کرے۔ انجبار کے ذریعہ یہ قیمتیں صرف خاص خاص صورتوں میں معلوم ہوسکتی ہیں۔ ذیل کا طریقہ بعض اوقات مفید ثابت ہوگا۔

مثال۔ $\frac{۱}{۱+}$ $\frac{۲}{۲+}$ $\frac{۳}{۳+}$ ....

$ق_ن$ اور $ل_ن$ دونوں کے بتانے کا ایک ہی قاعدہ ہے۔ فرض کرو کہ اِن دونوں میں سے کسی کو $ع_ن$ سے تعبیر کیا جاتا ہے،

$$\text{تب}\quad ع_ن = ن\, ع_{ن-۱} + ن\, ع_{ن-۲}$$

$$\text{یا}\quad ع_ن - (ن+۱)\, ع_{ن-۱} = -(ع_{ن-۱} - ن\, ع_{ن-۲})$$

$$\text{اسی طرح}\quad ع_{ن-۱} - ن\, ع_{ن-۲} = -(ع_{ن-۲} - \overline{ن-۱}\, ع_{ن-۳})$$

....

$$ع_۲ - ۴\, ع_۲ = -(ع_۲ - ۳\, ع_۱)$$

ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$ع_ن - (ن+۱)\, ع_{ن-۱} = (-۱)^{ن-۲}\, (ع_۲ - ۳\, ع_۱)$$

پہلے دو مستدق $\frac{۱}{۱}$ اور $\frac{۲}{۴}$ ہیں، اس لئے

$$ق_ن - (ن+1)\,ق_{ن-1} = (-1)^{ن-1}\ ،\ \ ل_ن - (ن+1)\,ل_{ن-1} = (-1)^{ن-2}$$

پس

$$\frac{ق_ن}{(ن+1)!} - \frac{ق_{ن-1}}{ن!} = \frac{(-1)^{ن-1}}{(ن+1)!}\ ،\ \ \frac{ل_ن}{(ن+1)!} - \frac{ل_{ن-1}}{ن!} = \frac{(-1)^{ن-2}}{(ن+1)!}$$

$$\frac{ق_{ن-1}}{ن!} - \frac{ق_{ن-2}}{(ن-1)!} = \frac{(-1)^{ن-2}}{ن!}\ ،\ \ \frac{ل_{ن-1}}{ن!} - \frac{ل_{ن-2}}{(ن-1)!} = \frac{(-1)^{ن-3}}{ن!}$$

- -

$$\frac{ق_2}{3!} - \frac{ق_1}{2!} = -\frac{1}{3!}\ ،\ \ \frac{ل_2}{3!} - \frac{ل_1}{2!} = \frac{1}{3!}$$

$$\frac{ق_1}{2!} = \frac{1}{2!}\ ،\ \ \frac{ل_1}{2!} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2!}$$

جمع کرنے سے

$$\frac{ق_ن}{(ن+1)!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{ن-1}}{(ن+1)!}$$

$$\frac{ل_ن}{(ن+1)!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{ن-2}}{(ن+1)!}$$

ن کو لاانتہا بڑا بنانے سے

$$\text{نہا}\ \frac{ق_ن}{ل_ن} = \frac{1}{و} \div \left(1 - \frac{1}{و}\right) = \frac{1}{و-1}$$

جو جملہ زیر بحث کی قیمت ہے۔

۴۴۵۔ اگر مسلسل کسر $\frac{ب_1}{ا_1+}\ \frac{ب_2}{ا_2+}\ \frac{ب_3}{ا_3+}\ \cdots\cdots$ کا ہر ایک جزو ترکیبی ایک ایسی کسر واجب ہو جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صحیح عدد ہوں تو یہ کسر مسلسل متبائن ہوگی۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ کسر مذکور متوافق ہے اور $\frac{ب}{ا}$ کے مساوی ہے جہاں ا اور ب مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب

$\frac{ب}{ا} = \frac{ب_1}{ا_1 + ک_1}$ جہاں $ک_1$ سے لامتناہی کسر مسلسل

$\frac{ب_2}{ا_2 +}\frac{ب_3}{ا_3 +}\dots\dots$ مراد ہے، پس $ک_1 = \frac{ا ب_1 - ب ا_1}{ب}$

$= \frac{ج}{ب}$ (فرض کرو)

اب ا، ب، $ا_1$، $ب_1$ صحیح عدد ہیں اور ک مثبت ہے، اسلئے ج ایک مثبت صحیح عدد ہے، اسی طرح $\frac{ج}{ب} = \frac{ب_2}{ا_2 + ک_2}$ جہاں $ک_2$ سے لامتناہی کسر مسلسل $\frac{ب_3}{ا_3 +}\frac{ب_4}{ا_4 +}\dots\dots$ مراد ہے،

لہذا $ک_2 = \frac{ب ب_2 - ج ا_2}{ج} = \frac{د}{ج}$ (فرض کرو) اور حسب سابق یہ نتیجہ نکل سکتا ہے کہ د مثبت صحیح عدد ہے اور علیٰ ہذا القیاس نیز $\frac{ب}{ا}$، $\frac{ج}{ب}$، $\frac{د}{ج}$ ..... سب واجب کسریں ہیں۔

کیونکہ $\frac{ب}{ا}$ کم ہے $\frac{ب_1}{ا_1}$ سے جو کسر واجب ہے، $\frac{ج}{ب}$ کم ہے $\frac{ب_2}{ا_2}$ سے، $\frac{د}{ج}$ کم ہے $\frac{ب_3}{ا_3}$ سے، وغیرہ وغیرہ

پس ا، ب، ج، د ..... مثبت صحیح اعداد کا ایک لامتناہی سلسلہ بناتے ہیں اور بلحاظ مقدار نزولی ترتیب میں ہیں، اور

ایسا ہونا ناممکن ہے، پس مفروضہ کسر مسلسل متوافق نہیں ہو سکتی
مندرجہ بالا نتیجہ اس صورت میں بھی برقرار رہتا ہے اگر بعض
جزو ترکیبی واجب کسریں نہ ہوں بشرطیکہ ایک خاص جزو ترکیبی سے
شروع ہو کر اس کے بعد کے سب اجزائے ترکیبی واجب کسریں
ہوں۔ اسے ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو $\frac{ب_ن}{ا_ن}$ اور بعد کے سب اجزائے ترکیبی واجب
کسریں ہیں، پس جیسا کہ ابھی ہم نے ثابت کیا ہے کہ وہ کسر مسلسل جو $\frac{ب_ن}{ا_ن}$
سے شروع ہوتی ہے متبائن ہے، اس کو ک سے تعبیر کرو،
تب $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ کے جواب میں جو مکمل خارج قسمت ہے وہ $\frac{ک}{۱}$ ہے
اور اس لئے کسر مسلسل کی قیمت $\frac{ق_{ن-۱} + ک\, ق_{ن-۲}}{ل_{ن-۱} + ک\, ل_{ن-۲}}$ ہے۔

یہ متوافق نہیں ہو سکتی تاوقتیکہ $\frac{ق_{ن-۱}}{ل_{ن-۱}}$ برابر نہ ہو $\frac{ق_{ن-۲}}{ل_{ن-۲}}$ کے،
اور یہ ہو نہیں سکتا تاوقتیکہ $\frac{ق_{ن-۲}}{ل_{ن-۲}}$ برابر نہ ہو $\frac{ق_{ن-۳}}{ل_{ن-۳}}$ کے
$\frac{ق_{ن-۳}}{ل_{ن-۳}}$ برابر نہ ہو $\frac{ق_{ن-۴}}{ل_{ن-۴}}$ کے، ..... اور بالآخر $\frac{ق_۲}{ل_۲}$ برابر نہ ہو $\frac{ق_۱}{ل_۱}$
کے یعنی $ب_۱\, ب_۲$ برابر نہ ہو صفر کے جو ناممکن ہے لہذا مفروضہ
کسر لازماً متبائن ہے۔

۴۴۶ - اگر کسر مسلسل $\frac{ب_۱}{ا_۱} \frac{ب_۲}{ا_۲} \frac{ب_۳}{ا_۳} \ldots\ldots$
کا ہر ایک جزو ترکیبی کسر واجب ہو جس کا شمار کنندہ اور نسب نما

صحیح عدد ہوں اور اگر کسی خاص جزو ترکیبی سے شروع ہو کر اس لامتناہی کسر کی قیمت ایک سے کم ہو تو کسر متباین ہوگی۔
ثبوت کی سلک استدلال دفعۂ ماقبل کی مانند ہے۔

امثلہ نمبری ۳۱ (ا)

۱۔ ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{ب_1}{ا_1 -}\;\frac{ب_2}{ا_2 -}\;\frac{ب_3}{ا_3 -}\;\dots\dots$$

میں $ق_ن = ا_ن ق_{ن-1} - ب_ن ق_{ن-2}$ اور $ل_ن = ا_ن ل_{ن-1} - ب_ن ل_{ن-1}$،

۲۔ $\left(\frac{لا^2+1}{لا^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ کو ایک ایسی مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ جسمیں سب شمار کنندگان ایک کے مساوی ہوں۔

۳۔ ثابت کرو کہ

$$(1)\quad \sqrt{ا^2+ب} = ا + \frac{ب}{2ا +}\;\frac{ب}{2ا +}\;\dots\dots$$

$$(2)\quad \sqrt{ا^2-ب} = ا - \frac{ب}{2ا -}\;\frac{ب}{2ا -}\;\dots\dots$$

۴۔ کسر مسلسل $\frac{ب_1}{ا_1 -}\;\frac{ب_2}{ا_2 -}\;\frac{ب_3}{ا_3 -}\;\dots$ میں اگر ہر ایک جزو ترکیبی کا نسب نما شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $ق_ن$ اور $ل_ن$ کی قیمت ن کے ساتھ بڑھتی ہے۔

۵۔ اگر $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ ... $ا_ن$ سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ا_ن}{ا_{ن-1}} = 2 - \frac{1}{2 -}\;\frac{1}{2 -}\;\dots\dots\;\frac{1}{2 -}\;\frac{ا_2}{ا_1}$$

۶- ثابت کرو کہ

$$\left(\text{ا}+\frac{۱}{\text{۲ا}+}\,\frac{۱}{\text{۲ا}+}\cdots\right)^{۲}+\left(\text{ا}-\frac{۱}{\text{۲ا}-}\,\frac{۱}{\text{۲ا}-}\cdots\right)^{۲}=\text{۲ا}^{۲}$$

اور

$$\left(\text{ا}+\frac{۱}{\text{۲ا}+}\,\frac{۱}{\text{۲ا}+}\cdots\right)\left(\text{ا}-\frac{۱}{\text{۲ا}-}\,\frac{۱}{\text{۲ا}-}\cdots\right)=\text{ا}^{۲}-\frac{۱}{\text{۲ا}-}\,\frac{۱}{\text{۲ا}-}\cdots$$

۷- کسر مسلسل

$$\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\cdots\cdots$$

میں ثابت کرو کہ

$$\text{ق}_{\text{ن}+۱}=\text{ب ل}_{\text{ن}} \quad \text{اور} \quad \text{ب ل}_{\text{ن}+۱}-\text{ا ق}_{\text{ن}+۱}=\text{ب}^{۲}\text{ل}_{\text{ن}-۱}$$

۸- ثابت کرو کہ $\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}+}\cdots=\text{ب}\times\frac{\text{عہ}^{\text{لا}}-\text{بہ}^{\text{لا}}}{\text{عہ}^{\text{لا}+۱}-\text{بہ}^{\text{لا}+۱}}$ جہاں لا، اجزائے ترکیبی کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور عہ اور بہ مساوات

$$\text{ک}^{۲}-\text{ا ک}-\text{ب}=۰$$

کی اصلیں ہیں۔

۹- ثابت کرو کہ مسلسل کسروں

$$\text{ا}+\frac{۱}{\text{ب}+}\,\frac{۱}{\text{ج}+}\,\frac{۱}{\text{د}+}\,\frac{۱}{\text{ا}+}\cdots \quad \text{اور} \quad -\text{د}+\frac{۱}{-\text{ج}+}\,\frac{۱}{-\text{ب}+}\,\frac{۱}{-\text{ا}+}\,\frac{۱}{-\text{د}+}\cdots$$

کا حاصل ضرب -۱ ہے۔

۱۰- ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱-}\,\frac{۴}{۵-}\,\frac{۹}{۱۳-}\,\frac{۱۶}{۲۵-}\cdots\frac{(\text{ن}-۱)^{۲}}{\text{ن}^{۲}+(\text{ن}+۱)^{۲}}=\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)(\text{۲ن}+۳)}{۶}$$

۱۱- $$\frac{۲}{۱-}\,\frac{۳}{۵-}\,\frac{۸}{۷-}\cdots\frac{\text{ن}^{۲}-۱}{\text{۲ن}+۱}=\frac{\text{ن}(\text{ن}+۳)}{۲}$$

۱۲- $$\frac{۲}{۲-}\,\frac{۳}{۳-}\,\frac{۴}{۴-}\cdots\frac{\text{ن}+۱}{\text{ن}+۱-}\,\frac{\text{ن}+۲}{\text{ن}+۲}=۱+۱+\lfloor ۲+\lfloor ۳+\cdots+\lfloor \text{ن}$$

۱۳- $\frac{۱}{۱-}\;\frac{۱}{۳-}\;\frac{۲}{۴-}\;\frac{۳}{۵-}\;\cdots\;\frac{ن-۱}{ن+۱-}\;\cdots = و-۱$

۱۴- $\frac{۴}{۱+}\;\frac{۶}{۲+}\;\frac{۸}{۳+}\;\cdots\;\frac{۲ن+۲}{ن+}\;\cdots = \frac{۲(و^{۲}-۱)}{و^{۲}+۱}$

۱۵- $\frac{۳\times۳}{۱+}\;\frac{۳\times۴}{۲+}\;\frac{۳\times۵}{۳+}\;\cdots\;\frac{۳(ن+۲)}{ن+}\;\cdots = \frac{۱۲(۲و^{۳}+۱)}{۵و^{۳}-۲}$

۱۶- اگر $ع_{۱} = \frac{ا}{ب}$ ، $ع_{۲} = \frac{ب}{ا+ب}$ ، $ع_{۳} = \frac{ا+ب}{ا+۲ب}$ ..... (جہاں متواتر کسریں اس کلیہ کے مطابق بنتی ہیں: کسی ایک کسر کا شمار کنندہ کسر ماقبل کے نسب نما کے مساوی ہے اور نسب نما کسر ماقبل کے شمار کنندہ اور نسب نما کے حاصل جمع کے مساوی ہے) تو ثابت کرو کہ $ع_{\infty} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۱۷- ثابت کرو کہ مسلسل کسر

$\frac{ا}{ا+۱-}\;\frac{ا}{ا+۱-}\;\frac{ا}{ا+۱-}\;\cdots$ کا ن واں مستدق

$\frac{ا^{ن+۱}-ا}{ا^{ن+۱}-۱}$ ہے۔

۱۸- $\frac{ا_{۱}}{ا_{۱}+۱-}\;\frac{ا_{۲}}{ا_{۲}+۱-}\;\frac{ا_{۳}}{ا_{۳}+۱-}\;\cdots$ کی قیمت دریافت کرو جہاں $ا_{۱}$، $ا_{۲}$، $ا_{۳}$ ..... مثبت ہے اور ایک سے بڑا ہے۔

۱۹- ثابت کرو کہ

$۱-\frac{۱}{۴-}\;\frac{۱}{۴-}\;\cdots$

کا ن واں مستدق، کسر مسلسل $\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۲+}\;\frac{۱}{۱+}\;\frac{۱}{۲+}\;\cdots$ کے (۲ن - ۱) ویں مستدق کے مساوی ہے۔

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{-5}\ \frac{1}{-2}\ \frac{1}{-1}\ \frac{1}{-5}\ \frac{1}{-2}\ \frac{1}{-1}\ \frac{1}{-5}\cdots\cdots$$

کا ۳ ن واں مستدق $\frac{ن}{۳ن+۱}$ ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{+2}\ \frac{2}{+2}\ \frac{3}{+2}\cdots\cdots = \frac{3-و}{و-2}$

اور اس سے حاصل کرو کہ و کی قیمت $2\frac{2}{3}$ اور $2\frac{8}{11}$ کے درمیان واقع ہے۔

سلسلوں کی تحویل مسلسل کسروں میں

۴۴۰۔ یہاں سلسلہ کو ذیل کی شکل

$$\frac{1}{ع_1}+\frac{1}{ع_2}+\frac{1}{ع_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{ع_ن}$$

میں لکھنا سہولت بخش ہے۔

رکھو $\frac{1}{ع_ر}+\frac{1}{ع_{ر+1}}=\frac{1}{ع_ر+لا_ر}$

تب $(ع_ر+لا_ر)(ع_{ر+1}+ع_ر)=ع_ر\,ع_{ر+1}$

$$\therefore\ لا_ر=-\frac{ع_ر^2}{ع_ر+ع_{ر+1}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{ع_1}+\frac{1}{ع_2}=\cfrac{1}{ع_1-\cfrac{ع_1^2}{ع_1+ع_2}}=\frac{1}{ع_1-}\ \frac{ع_1^2}{ع_1+ع_2}$$

اسی طرح سے

$$\frac{1}{\text{ع}_1}+\frac{1}{\text{ع}_2}+\frac{1}{\text{ع}_3}=\frac{1}{\text{ع}_1}+\frac{1}{\text{ع}_2+\text{لا}}=\frac{1}{\text{ع}_1-}\;\frac{\text{ع}_1^2}{\text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{لا}}$$

$$=\frac{1}{\text{ع}_1-}\;\frac{\text{ع}_1^2}{\text{ع}_1+\text{ع}_2-}\;\frac{\text{ع}_2^2}{\text{ع}_2+\text{ع}_3}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، اس لئے عام طور پر

$$\frac{1}{\text{ع}_1}+\frac{1}{\text{ع}_2}+\frac{1}{\text{ع}_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{\text{ع}_\text{ن}}$$

$$=\frac{1}{\text{ع}_1-}\;\frac{\text{ع}_1^2}{\text{ع}_1+\text{ع}_2-}\;\frac{\text{ع}_2^2}{\text{ع}_2+\text{ع}_3-}\cdots\frac{\text{ع}_{\text{ن}-1}^2}{\text{ع}_{\text{ن}-1}+\text{ع}_\text{ن}}$$

مثال ۱۔ سلسلۂ ذیل

$$\frac{1}{\text{ب}_0}-\frac{\text{لا}}{\text{ب}_0\text{ب}_1}+\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}_0\text{ب}_1\text{ب}_2}-\cdots\cdots+(-1)^\text{ن}\frac{\text{لا}^\text{ن}}{\text{ب}_0\text{ب}_1\text{ب}_2\cdots\text{ب}_\text{ن}}$$

کو کسر مسلسل کی شکل میں لاؤ۔

رکھو
$$\frac{1}{\text{ب}_\text{ن}}-\frac{\text{لا}}{\text{ب}_\text{ن}\text{ب}_{\text{ن}+1}}=\frac{1}{\text{ب}_\text{ن}+\text{ما}_\text{ن}}$$

تب $(\text{ب}_\text{ن}+\text{ما}_\text{ن})(\text{ب}_{\text{ن}+1}-\text{لا})=\text{ب}_\text{ن}\text{ب}_{\text{ن}+1}$

$$\therefore\ \text{ما}_\text{ن}=\frac{\text{ب}_\text{ن}\text{لا}}{\text{ب}_{\text{ن}+1}-\text{لا}}$$

اس لئے
$$\frac{1}{\text{ب}_0}-\frac{\text{لا}}{\text{ب}_0\text{ب}_1}=\frac{1}{\text{ب}_0+\text{ما}_0}=\frac{1}{\text{ب}_0+}\;\frac{\text{ب}_0\text{لا}}{\text{ب}_1-\text{لا}}$$

نیز
$$\frac{1}{\text{ب}_0}-\frac{\text{لا}}{\text{ب}_0\text{ب}_1}+\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}_0\text{ب}_1\text{ب}_2}=\frac{1}{\text{ب}_0}-\frac{\text{لا}}{\text{ب}_0}\left(\frac{1}{\text{ب}_1}-\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1\text{ب}_2}\right)$$

$$= \frac{1}{ا_1} - \frac{لا}{ا_1(ا_1 + م_1)} = \frac{1}{ا_1 +} \frac{ا_1 لا}{ا_2 + م_1 - لا}$$

$$= \frac{1}{ا_1 +} \frac{ا_1 لا}{ا_2 - لا +} \frac{ا_2 لا}{ا_3 - لا}$$

اور عام طور پر $\frac{1}{ا_1} - \frac{لا}{ا_1 ا_2} + \frac{لا^2}{ا_1 ا_2 ا_3} - \cdots + (-1)^{ن} \frac{لا^{ن}}{ا_1 ا_2 ا_3 \cdots ا_{ن}}$

$$= \frac{1}{ا_1 +} \frac{ا_1 لا}{ا_2 - لا +} \frac{ا_2 لا}{ا_3 - لا +} \cdots \frac{ا_{ن-1} لا}{ا_{ن} - لا}$$

مثال ۲۔ لوک (۱ + لا) کو مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کرو۔

ہم جانتے ہیں کہ لوک $(1 + لا) = لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{3} - \frac{لا^4}{4} + \cdots$

سلسلۂ ذیل

$$\frac{لا}{ا_1} - \frac{لا^2}{ا_2} + \frac{لا^3}{ا_3} - \frac{لا^4}{ا_4} + \cdots\cdots$$

کے مساوی جو کسر مسلسل ہے اس سے مطلوبہ کسرِ مسلسل بآسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

$$\frac{1}{ا_{ن}} - \frac{لا}{ا_{ن+1}} = \frac{1}{ا_{ن} + م_{ن}}$$ رکھو

جس سے $م_{ن} = \frac{ا_{ن}^2 لا}{ا_{ن+1} - ا_{ن} لا}$

پس $\frac{لا}{ا_1} - \frac{لا^2}{ا_2} + \frac{لا^3}{ا_3} - \frac{لا^4}{ا_4} + \cdots\cdots$

$$= \frac{لا}{ا_1 +} \frac{ا_1^2 لا}{ا_2 - ا_1 لا +} \frac{ا_2^2 لا}{ا_3 - ا_2 لا +} \frac{ا_3^2 لا}{ا_4 - ا_3 لا +} \cdots$$

$$\therefore \text{لوک}(1+\text{لا}) = \frac{\text{لا}}{1+}\;\frac{1^2\,\text{لا}}{2-\text{لا}+}\;\frac{2^2\,\text{لا}}{3-2\,\text{لا}+}\;\frac{3^2\,\text{لا}}{4-3\,\text{لا}+}\cdots\cdots$$

۴۴۸ — بعض صورتوں میں ہم مسلسل کسر کے اجزائے ترکیبی کو ذیل کے مسئلہ کی مدد سے مختصر کر سکتے ہیں

کسر مسلسل

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1+}\;\frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2+}\;\frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3+}\;\frac{\text{ب}_4}{\text{ا}_4+}\cdots\cdots$$

ذیل کی کسر مسلسل

$$\frac{\text{ج}_1\text{ب}_1}{\text{ج}_1\text{ا}_1+}\;\frac{\text{ج}_1\text{ج}_2\text{ب}_2}{\text{ج}_2\text{ا}_2+}\;\frac{\text{ج}_2\text{ج}_3\text{ب}_3}{\text{ج}_3\text{ا}_3+}\;\frac{\text{ج}_3\text{ج}_4\text{ب}_4}{\text{ج}_4\text{ا}_4+}$$

کے مساوی ہے جہاں ج_1، ج_2، ج_3، ج_4..... کی قیمتیں کچھ ہی ہو سکتی ہیں

$\frac{\text{ب}_2}{\text{ا}_2+}\;\frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3+}$..... کو ک_1 سے تعبیر کرو، تب کسر مسلسل

$$=\frac{\text{ب}_1}{\text{ا}_1+\text{ک}_1}=\frac{\text{ج}_1\text{ب}_1}{\text{ج}_1\text{ا}_1+\text{ج}_1\text{ک}_1}$$

$\frac{\text{ب}_3}{\text{ا}_3+}\;\frac{\text{ب}_4}{\text{ا}_4+}$..... کو ک_2 سے تعبیر کرو، تب

$$\text{ج}_1\text{ک}_1=\frac{\text{ج}_1\text{ب}_2}{\text{ا}_2+\text{ک}_2}=\frac{\text{ج}_1\text{ج}_2\text{ب}_2}{\text{ج}_2\text{ا}_2+\text{ج}_2\text{ک}_2}$$

اسی طرح $\text{ج}_2\text{ک}_2=\frac{\text{ج}_2\text{ج}_3\text{ب}_3}{\text{ج}_3\text{ا}_3+\text{ج}_3\text{ک}_3}$، اور علیٰ ہذا القیاس،

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

امثلہ نمبری ۳۱ (ب)

ثابت کرو کہ

۱- $\frac{1}{ع}-\frac{1}{ع_1}+\frac{1}{ع_2}-\frac{1}{ع_3}+\cdots+(-1)^{ن}\frac{1}{ع_ن}$

$=\frac{1}{ع+}\ \frac{ع^2}{ع_1-ع+}\ \frac{ع_1^2}{ع_2-ع_1+}\cdots\frac{ع_{ن-1}^2}{ع_ن-ع_{ن-1}}$

۲- $\frac{1}{ا}+\frac{لا}{ا\,ا_1}+\frac{لا^2}{ا\,ا_1\,ا_2}+\cdots+\frac{لا^{ن}}{ا\,ا_1\,ا_2\cdots ا_ن}$

$=\frac{1}{ا-}\ \frac{ا\,لا}{ا_1+لا-}\ \frac{ا_1\,لا}{ا_2+لا-}\cdots\frac{ا_{ن-1}\,لا}{ا_ن+لا}$

۳- $\frac{ا-1}{ا-2}=\frac{ا}{ا-}\ \frac{ا+1}{ا+1-}\ \frac{ا+2}{ا+2-}\cdots\cdots$

۴- $\frac{ن^2}{ن+1}=\frac{1}{1-}\ \frac{1}{4-}\ \frac{1}{1-}\ \frac{1}{4-}\cdots$ ن خارج قسمتوں تک

۵- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{ن+1}=\frac{1}{1-}\ \frac{1}{3-}\ \frac{4}{5-}\ \frac{9}{7-}\cdots\frac{ن^2}{(2ن+1)}$

۶- $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(ن+1)^2}=\frac{1}{1-}\ \frac{1^4}{1^2+2^2-}\cdots\frac{ن^4}{ن^2+(ن+1)^2}$

۷- $و^{لا}=1+\frac{لا}{1-}\ \frac{لا}{2+لا-}\ \frac{2\,لا}{3+لا-}\ \frac{3\,لا}{4+لا-}\cdots\cdots$

۸- $\frac{1}{ا}-\frac{1}{اب}+\frac{1}{ابج}-\frac{1}{ابجد}+\cdots=\frac{1}{ا+1}\ \frac{ا}{ب-1+}\ \frac{ب}{ج-1+}\ \frac{ج}{د-1+}\cdots\cdots$

۹- $\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ر}} + \frac{\text{۱}}{\text{ر}^{\text{۳}}} + \frac{\text{۱}}{\text{ر}^{\text{۶}}} + \frac{\text{۱}}{\text{ر}^{\text{۱۰}}} + \dots = \text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ر} -}\;\frac{\text{ر}}{\text{ر}^{\text{۲}} + \text{۱} -}\;\frac{\text{ر}^{\text{۳}}}{\text{ر}^{\text{۳}} + \text{۱} -}\;\frac{\text{ر}^{\text{۵}}}{\text{ر}^{\text{۴}} + \text{۱} -}$

۱۰- $\frac{\text{ا}_{\text{۱}}}{\text{ا}_{\text{۱}} +}\;\frac{\text{ا}_{\text{۲}}}{\text{ا}_{\text{۲}} +}\;\frac{\text{ا}_{\text{۳}}}{\text{ا}_{\text{۳}} +} \dots \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{\text{ن}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۱} +}\;\frac{\text{۱}}{\text{ا}_{\text{۱}} +}\;\frac{\text{ا}_{\text{۱}}}{\text{ا}_{\text{۲}} +}\;\frac{\text{ا}_{\text{۲}}}{\text{ا}_{\text{۳}} +} \dots \frac{\text{ا}_{\text{ن-۲}}}{\text{ا}_{\text{ن-۱}}}$

۱۱- اگر $\text{ف} = \frac{\text{ا}}{\text{ا} +}\;\frac{\text{ب}}{\text{ب} +}\;\frac{\text{ج}}{\text{ج} +} \dots$ اور $\text{ق} = \frac{\text{ا}}{\text{ب} +}\;\frac{\text{ب}}{\text{ج} +}\;\frac{\text{ج}}{\text{د} +}$
تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف} \left(\text{ا} + \text{۱} + \text{ق} \right) = \text{ا} + \text{ق}$$

۱۲- ثابت کرو کہ $\frac{\text{۱}}{\text{ل}_{\text{۱}}} - \frac{\text{لا}}{\text{ل}_{\text{۱}}\text{ل}_{\text{۲}}} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{ل}_{\text{۲}}\text{ل}_{\text{۳}}} - \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{ل}_{\text{۳}}\text{ل}_{\text{۴}}} + \dots \dots$
مسلسل کسر $\frac{\text{۱}}{\text{ا}_{\text{۱}} +}\;\frac{\text{لا}}{\text{ا}_{\text{۲}} +}\;\frac{\text{لا}}{\text{ا}_{\text{۳}} +}\;\frac{\text{لا}}{\text{ا}_{\text{۴}} +} \dots$ کے مساوی ہے جہاں
$\text{ل}_{\text{۱}}$، $\text{ل}_{\text{۲}}$، $\text{ل}_{\text{۳}}$ .... مسلسل متقون کے نسب نما ہیں۔

بتیسواں باب

احتمال

۴۴۹۔ اگر کوئی واقعہ ا طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ (وقوع اور عدم وقوع دونوں کے) ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ اس واقعہ کے وقوع کا احتمال یا اتفاق $\frac{ا}{ا+ب}$ ہے اور عدم وقوع کا $\frac{ب}{ا+ب}$ ۔

مثلاً ایک قرعہ میں ۷ انعام ہیں اور باقی ۲۵ خالی ہیں، اگر ایک شخص کے پاس ایک ٹکٹ ہو تو اس کے ایک انعام حاصل کرنے کا اتفاق $\frac{۷}{۳۲}$ ہے اور اس کے محروم رہنے کا اتفاق $\frac{۲۵}{۳۲}$ ہے۔

۴۵۰۔ ریاضی میں احتمال کی مندرجہ بالا تعریف کے وجوہ ذیل کے امور پر غور کرنے سے بخوبی واضح ہو جائینگے۔

اگر ایک واقعہ ا طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کے وقوع کے اتفاق کی نسبت اس کے عدم وقوع کے اتفاق کے ساتھ ا:ب ہے، پس اگر واقع ہونے کے اتفاق کو م ا سے تعبیر کیا جائے تو واقع نہ ہونے کے اتفاق کو م ب سے تعبیر کیا جائیگا جہاں م کوئی نا معلوم مستقل عدد ہے۔

۱۱- اگر
تو ثابت ک

۱۲- ثابت ک
مسلسل کسر $\frac{1}{+}$
ل، ل، ل ..

اس میں صرف دو مفروضے ہو
سچ ہے یا (۲) جھوٹ ۔

یہاں ق۱ = ۱/۲ ، ق

ق = ۳/۴ × ۷/۱۰ ، ق

ق کی قیمت

اگر واقع ہونے کے اتفاق کو م و سے
ہونے کے اتفاق کو م ب سے تعبیر
م کوئی نامعلوم مستقل عدد ہے ۔

۹- $1 + \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}^{3}} + \frac{1}{\text{ر}^{6}} + \frac{1}{\text{ر}^{10}} + \cdots = 1 + \frac{1}{\text{ر} -}\;\frac{\text{ر}}{\text{ر}^{2}+1-}\;\frac{\text{ر}^{2}}{\text{ر}^{3}+1-}\;\frac{\text{ر}^{3}}{\text{ر}^{4}+1-}\cdots$

۱۰- $\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_1+}\;\frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_2+}\;\frac{\text{ا}_3}{\text{ا}_3+}\cdots\frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{\text{ن}}} = \frac{1}{1+}\;\frac{1}{\text{ا}_1+}\;\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_2+}\;\frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_3+}\cdots\frac{\text{ا}_{\text{ن}-2}}{\text{ا}_{\text{ن}-1}}$

۱۱- اگر $\text{ف} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}+}\;\frac{\text{ب}}{\text{ب}+}\;\frac{\text{ج}}{\text{ج}+}\cdots$ اور $\text{ق} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}+}\;\frac{\text{ب}}{\text{ج}+}\;\frac{\text{ج}}{\text{د}+}\cdots$
تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف}(\text{ا} + 1 + \text{ق}) = \text{ا} + \text{ق}$$

۱۲- ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{ل}_1} - \frac{\text{لا}}{\text{ل}_1\text{ل}_2} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ل}_2\text{ل}_3} - \frac{\text{لا}^3}{\text{ل}_3\text{ل}_4} + \cdots\cdots$
مسلسل کسر $\frac{1}{\text{ا}_1+}\;\frac{\text{لا}}{\text{ا}_2+}\;\frac{\text{لا}}{\text{ا}_3+}\;\frac{\text{لا}}{\text{ا}_4+}\cdots$ کے مساوی ہے جہاں ل_1، ل_2، ل_3 .... مسلسل مستدقوں کے نسب نما ہیں۔

بتیسواں باب

احتمال

۴۴۹۔ اگر کوئی واقعہ ا طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ (وقوع اور عدم وقوع دونوں کے) ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ اس واقعہ کے وقوع کا احتمال یا اتفاق $\frac{ا}{ا+ب}$ ہے اور عدم وقوع کا $\frac{ب}{ا+ب}$۔

مثلاً ایک قرعہ میں ۷ انعام ہیں اور باقی ۲۵ خالی ہیں، اگر ایک شخص کے پاس ایک ٹکٹ ہو تو اس کے ایک انعام حاصل کرنے کا اتفاق $\frac{۷}{۳۲}$ ہے اور اس کے محروم رہنے کا اتفاق $\frac{۲۵}{۳۲}$ ہے۔

۴۵۰۔ ریاضی میں احتمال کی مندرجہ بالا تعریف کے وجوہ ذیل کے امور پر غور کرنے سے بخوبی واضح ہو جائینگے۔

اگر ایک واقعہ ا طریقوں سے واقع ہو سکے اور ب طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کے وقوع کے اتفاق کی نسبت اس کے عدم وقوع کے اتفاق کے ساتھ ا:ب ہے، پس اگر واقع ہونے کے اتفاق کو م ا سے تعبیر کیا جائے تو واقع نہ ہونے کے اتفاق کو م ب سے تعبیر کیا جائیگا جہاں م کوئی نامعلوم مستقل عدد ہے۔

∴ وقوع کا اتفاق + عدم وقوع کا اتفاق = م (ا + ب) لیکن ان دو میں سے ایک نہ ایک بات کا ہونا لازمی ہے کیا واقعہ واقع ہوگا یا نہ ہوگا۔ لہذا صور ہے کہ واقع ہونے کے اتفاق اور واقع نہ ہونے کے اتفاق کا حاصل جمع ایک مقدار یقینی کو تعبیر کرے، پس اگر ہم اس مقدار کو اکائی فرض کریں تو

$$۱ = م\ (ا + ب)\ \text{یعنی}\ م = \frac{۱}{ا + ب}$$

$$\therefore\ \text{واقعہ کے واقع ہونے کا اتفاق} = \frac{ا}{ا + ب}$$

$$\text{اور واقع نہ ہونے کا اتفاق} = \frac{ب}{ا + ب}$$

نتیجہ صریح۔ اگر کسی واقعہ کے وقوع کا احتمال ق ہو تو اسکے عدم وقوع کا احتمال ۱ ـ ق ہوگا۔

۴۵۱ ـ یہ کہنے کی بجائے کہ کسی واقعہ کے وقوع کا اتفاق $\frac{ا}{ا + ب}$ ہے اس کو بعض اوقات یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ واقعہ کے موافق امکان ا : ب ہے اور خلاف ب : ا ہے۔

احتمال کی تعریف مندرجہ دفعہ ۴۴۹ قدرے مختلف شکل میں بھی دیکھا سکتی ہے جو بعض اوقات مفید ثابت ہوتی ہے اگر امکان کی کل صورتوں کی مجموعی تعداد ج ہو اور ہر صورت کا امکان مساوی ہو تو وقوع کا احتمال $\frac{ا}{ج}$ سے اور عدم وقوع کا احتمال $۱ - \frac{ا}{ج}$ سے تعبیر ہوتا ہے۔

مثال ۱ ـ ایک معمولی مہرہ کے چھ رخوں پر ایک سے چھ تک کے عدد

مندرج ہیں۔ اگر اس کو پھینکا جائے تو بتاؤ کہ ۴ سے بڑا عدد نکلنے کا احتمال کیا ہے۔

مہرہ کے گرنے کے کل مختلف طریقے ۶ ہیں اور ان میں سے ۲ موافق ہیں۔

∴ مطلوبہ احتمال $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ۴ سفید گیند ہیں اور ۵ سیاہ، ایک شخص بن دیکھے ان میں سے ۳ گیند نکالتا ہے۔ بتاؤ کہ ان گیندوں کے سب سیاہ ہونے کے خلاف کیا امکان ہیں۔

تین گیند نکالنے کے کل طریقے $^{9}\text{ج}_{3}$ ہیں، اور تین سیاہ گیند نکالنے کے کل طریقے $^{5}\text{ج}_{3}$ ہیں۔ اس لئے تین سیاہ گیند نکالنے کا احتمال

$$= \frac{^{5}\text{ج}_{3}}{^{9}\text{ج}_{3}} = \frac{3 \times 4 \times 5}{7 \times 8 \times 9} = \frac{5}{42}$$

پس واقعہ کے خلاف امکان ۳۷ : ۵ ہے۔

مثال ۳۔ دو مہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں، بتاؤ کہ کم از کم ایک یکّہ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

کل ممکن صورتوں کی تعداد $6 \times 6 = 36$ ہے۔

ایک مہرہ پر کا یکّہ دوسرے مہرہ پر کے چھ عددوں میں سے کسی ایک کے ساتھ اکٹھا نکل سکتا ہے اور پہلے مہرہ پر کے باقی ۵ عددوں میں سے ہر ایک عدد باقی دوسرے مہرہ کے یکّہ کے ساتھ نکل سکتا ہے۔ پس موافق صورتیں صرف ۱۱ ہیں۔

اس لئے مطلوبہ احتمال $\frac{11}{36}$ ہے

ہم یوں بھی استدلال کر سکتے ہیں:-

ہر ایک مہرہ کو اس طرح پھینکنے کے لئے کہ یکّہ نہ نکلے پانچ طریقے ہیں۔ پس مہروں کے ۲۵ "افتاد" ایسے ہیں جس میں یکّہ نہیں نکلیگا

یعنی کم از کم ایک یکہ کی افتاد کا احتمال $1 - \frac{25}{36}$ یا $\frac{11}{36}$ ہے۔

مثال ۴۔ تین مہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں، بتاؤ کہ ۱۵ سے زیادہ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

جس افتاد میں ۱۸ نکل سکتے ہیں وہ ۶، ۶، ۶ سے بنی ہوتی ہے، اور یہ صرف ایک ہی طریقہ سے ہو سکتا ہے۔ ۱۷ چونکہ ۶، ۶، ۵ سے بنتا ہے، اس لئے یہ صرف ۳ طریقوں سے ہو سکتا ہے۔ اسی طرح ۱۶ اعداد ۶، ۶، ۴ اور ۶، ۵، ۵ سے بن سکتا ہے اور ہر ایک جُٹ ۳ طرح سے واقع ہو سکتا ہے۔

پس موافق صورتوں کی کل تعداد $1 + 3 + 6 = 10$ ہے اور کل صورتیں $6 \times 6 \times 6$ یعنی ۲۱۶ ہے۔

$$\text{لہٰذا مطلوبہ احتمال} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

مثال ۵۔ ایک ایسے قرعہ میں جس میں ۳ انعام ہیں اور ۶ خالی ہیں ا کے تین حصے ہیں، ایک دوسرے قرعہ میں جس میں ایک انعام ہے اور ۲ خالی ہیں ب کا ایک حصہ ہے، ثابت کرو کہ ا کی کامیابی کے احتمال کو ب کی کامیابی کے احتمال کے ساتھ نسبت ۱۶ : ۷ ہے۔

ا کے تین انعام حاصل کرنے کا طریقہ ایک ہے۔

ا کے دو انعام اور ایک خالی حاصل کرنیکے طریقے $\frac{3 \times 2}{2 \times 1} \times 6$ ہیں۔

ا کے ایک انعام اور دو خالی حاصل کرنیکے طریقے $3 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1}$ ہیں۔

اِن کل طریقوں کا حاصل جمع ۶۴ ہے جو ا کے کم از کم ایک انعام حاصل کرنے کے کل طریقوں کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز ا تین

ٹکٹ $\frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3}$ یعنی ۸۴ طریقوں سے حاصل کرسکتا ہے

پس ا کی کامیابی کا احتمال $\frac{64}{84} = \frac{16}{21}$ ہے۔

نیز ب کی کامیابی کا احتمال صریحاً $\frac{1}{3}$ ہے،

پس ا کی کامیابی کا احتمال: ب کی کامیابی کا احتمال $= \frac{16}{21} = \frac{1}{3} = 16 : 7$

ہم اس طرح بھی استدلال کرسکتے تھے:۔

ا کے تمام خالی $\frac{4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3}$ یعنی ۲۰ طریقوں سے نکلینگے۔ اسلئے

ا کے محروم رہنے کا احتمال $\frac{20}{84}$ یعنی $\frac{5}{21}$ ہے۔

پس ا کی کامیابی کا احتمال $= 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$

۴۵۳۔ فرض کرو کہ ا، ب، ج..... ایسے واقعات ہیں کہ ان میں سے ایک اور صرف ایک کا واقع ہونا لازمی ہے، نیز فرض کرو کہ یہ واقعات بالترتیب $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$..... طریقوں سے واقع ہو سکتے ہیں اور ان طریقوں میں سے ہر ایک کا امکان مساوی ہے، ہر ایک واقعہ کے وقوع کا احتمال دریافت کرو۔

مساوی امکان کے سب طریقوں کا مجموعہ $ا_1 + ب_1 + ج_1 + ...$ ہے ان میں سے وہ طریقے جو ا کے موافق ہیں $ا_1$ ہیں۔ پس

ا کے وقوع کا احتمال $\frac{ا_1}{ا_1 + ب_1 + ج_1 + ...}$ ہے اسی طرح سے

ب کے وقوع کا احتمال $\frac{ب_1}{ا_1 + ب_1 + ج_1 + ...}$ ہے، وغیرہ وغیرہ

۴۵۴۔ جو مثالیں ہم نے اوپر درج کی ہیں ان سے ظاہر ہے کہ احتمال کے آسان سوالات کے حل کرنے میں صرف احتمال کی تعریف اور ترتیب و اجتماع کے اصولوں کے جاننے کی ضرورت ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (ل)

۱۔ بتاؤ کہ دو مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے (۱) پانچ (۲) چھہ نکلنے کا کیا احتمال ہے

۲۔ تاش کے ۵۲ پتوں سے کوئی دو پتے نکالے گئے ہیں، بتاؤ کہ ایک کے غلام اور دوسرے کے "بیگم" ہونیکا کیا احتمال ہے

۳۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید، ۷ سیاہ اور ۴ سرخ گیند ہیں۔ اگر ۳ گیند علی الحساب نکالے جائیں تو ان تینوں کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ چار سکوں کو اوپر اچھالا گیا ہے بتاؤ کہ دو مورتوں اور دو زنجیروں کے نکلنے کا کیا احتمال ہے؟

۵۔ دو واقعات ایسے ہیں کہ ان میں ایک ضرور واقع ہوگا۔ اگر یہ معلوم ہو کہ ایک کا احتمال دوسرے کے احتمال کا دو تہائی ہے تو بتاؤ کہ دوسرے واقعہ کے موافق کیا امکان ہے؟

۶۔ ایک تاش میں سے ۴ پتے لئے گئے ہیں، بتاؤ کہ ان کے ایک ہی "رنگ" کے چار افسر ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۷۔ ۱۳ آدمی ایک گول میز کے گرد بیٹھے ہیں، بتاؤ کہ دو خاص آدمیوں کے پاس پاس بیٹھنے کے خلاف امکان ۵:۱ ہے

۸۔ تین واقعات ا، ب، ج ایسے ہیں کہ ان میں سے ایک اور صرف ایک ضرور واقع ہوگا۔ اگر ا کے خلاف امکان ۸:۳ ہو اور ب کے خلاف امکان ۵:۲ ہو تو بتاؤ ج کے خلاف کیا امکان ہوگا؟

۹۔ ایک مہرہ کو پھینکنے سے ۴ نکلنے کا جو احتمال ہے دو مہروں کو پھینکنے سے ۸ نکلنے کا جو احتمال ہے، ۳ مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ۱۲ نکلنے کا جو احتمال ہے ان سب کا

باہم مقابلہ کرو۔

۱۰۔ ایک تاش کے ملانے میں ۴ پتے اتفاق سے گر گئے ہیں، بتاؤ ان کے جداگانہ ایک ایک رنگ کے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ ایک قرعہ میں ۳ انعام ہیں اور ۹ خالی ہیں، اس کے لئے ا کے پاس ۳ حصے ہیں، اسی طرح ایک اور قرعہ میں ۲ انعام اور ۶ خالی ہیں اور اس کے لئے ب کے پاس ۲ حصے ہیں ان کی کامیابی کے احتمال کا مقابلہ کرو۔

۱۲۔ دکھاؤ کہ ۴، ۳ اور ۲ مہروں کو پھینک کر ۶ نکالنے کے احتمال بالترتیب نسبت ۱ : ۶ : ۱۸ میں ہیں۔

۱۳۔ تین کتابیں ہیں جن میں ایک کی تین جلدیں ہیں دوسری کی چار اور تیسری کی ایک۔ ان کو علی الحساب ایک الماری میں رکھا گیا ہے، بتاؤ کہ ہر ایک کتاب کی جلدوں کے اکٹھا ہونے کا احتمال $\frac{3}{140}$ ہے۔

۱۴۔ ا اور ب میں سے ہر ایک دو مہرے پھینکتا ہے، اگر ا، ۹ پھینکے تو بتاؤ کہ ب کے اس سے زیادہ پھینکنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۵۔ لفظ "مصاحبوں" کے حروف کو جدا جدا کر کے میز پر رکھا گیا ہے، بتاؤ کہ حروف علت (ا اور و) کے پاس پاس آنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۶۔ تاش کی ایک "ترپ" کی بازی میں جس کے پتے ایک ایک کر کے تقسیم کئے گئے ہیں بتاؤ کہ ایک خاص شخص کے پاس چار "بادشاہ" ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۷۔ ۴ شلنگ اور ۳ نصف کراؤن ایک قطار میں علی الحساب رکھے گئے ہیں، بتاؤ کہ سروں پر کے دونوں سکوں کے نصف کراؤن ہونے کا احتمال $\frac{1}{7}$ ہے، اس نتیجہ کی م شلنگ اور ن نصف

گراؤں کی صورت میں تقسیم کرو۔

۴۵۵۔ اب تک ہم نے صرف اُنہی واقعات پر غور کیا ہے جنکو احتمال کی زبان میں **مفرد واقعات** سے موسوم کرتے ہیں، اگر ان میں سے دو یا زیادہ واقعات ایسے ہوں کہ اِن کے وقوع باہم متعلق ہوں تو اس مشترک وقوع کو **مرکب واقعہ** کہتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک تھیلی میں پانچ سفید اور آٹھ سیاہ گیند ہیں اس میں سے دو دفعہ تین تین گیند نکالے گئے ہیں، اگر ہم پہلے تین سفید گیندوں کے اور پھر تین سیاہ گیندوں کے نکالنے کا احتمال معلوم کرنا چاہیں تو ہماری بحث مرکب واقعہ سے متعلق ہوگی۔

ایسی صورت میں ممکن ہے کہ پہلی دفعہ کے نکالنے کا نتیجہ دوسری دفعہ کے نکالنے کے نتیجہ پر اثر انداز نہ ہو۔ ظاہر ہے کہ اگر اُن گیندوں کو جو پہلی دفعہ نکالے گئے ہیں واپس رکھ دیا جائے تو دوسری مرتبہ کے نکالنے پر پہلی دفعہ کے نکالنے کا نتیجہ کوئی اثر نہ ڈالے گا۔ لیکن اگر گیندوں کو واپس نہ رکھا جائے تو ظاہر ہے کہ اگر پہلی دفعہ تینوں گیند سفید نکلیں تو باقی ماندہ سیاہ گیندوں کو سفید گیندوں کے ساتھ جو نسبت ہوگی وہ اس نسبت سے زیادہ ہوگی جبکہ پہلی دفعہ کے تینوں گیند سفید نہ ہوں۔ اس صورت میں دوسری مرتبہ سیاہ گیند نکالنے کا احتمال پہلی دفعہ کے نتیجہ سے اثر پذیر ہوگا۔

اس کی باقاعدہ تعریف ہم ذیل میں درج کرتے ہیں۔

اگر ایک واقعہ کا وقوع دوسرے واقعہ پر اثر انداز ہوا ہو تو ان واقعات کو واقعات تابع کہتے ہیں، لیکن اگر ایک واقعہ دوسرے واقعہ پر اثر انداز نہ ہو تو ایسے واقعات کو "غیر تابع" کہتے ہیں۔

تابع واقعات کو بعض اوقات **مشروط واقعات** بھی کہتے ہیں

۴۵۶۔ اگر دو غیر تابع واقعات میں سے بالترتیب ہر ایک کا احتمال معلوم ہو تو دونوں کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کرو۔

فرض کرو کہ پہلا واقعہ ا طریقوں سے واقع ہو سکتا ہے اور ب طریقوں سے واقع نہیں ہو سکتا۔ نیز فرض کرو کہ دوسرا واقعہ اَ طریقوں سے واقع ہو سکتا ہے اور بَ طریقوں سے واقع نہیں ہو سکتا۔ اور ان سب طریقوں کا امکان مساوی ہے۔

پہلی (ا + ب) صورتوں میں سے ہر ایک کو دوسری (اَ + بَ) صورتوں میں سے ہر ایک کے ساتھ منسلک کیا جا سکتا ہے اس طرح ہمیں کل (ا + ب) (اَ + بَ) مرکب صورتیں حاصل ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک کا امکان مساوی ہے۔

ان صورتوں میں سے ا اَ میں دونوں واقعات وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ ب بَ صورتوں میں ان میں سے کوئی واقعہ وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ ا بَ میں پہلا واقعہ واقع ہوتا ہے اور دوسرا نہیں ہوتا، اَ ب صورتوں میں پہلا واقعہ واقع نہیں ہوتا اور دوسرا واقع ہوتا ہے۔ پس

دونوں واقعات کے وقوع پذیر ہونیکا احتمال $\frac{\text{ا اَ}}{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اَ}+\text{ب})}$ ہے

دونوں واقعات میں سے کسی کے وقوع پذیر نہ ہونیکا احتمال $\frac{\text{ب بَ}}{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اَ}+\text{بَ})}$ ہے

پہلے کے واقع ہونے اور دوسرے کے واقع نہ ہونیکا احتمال $\frac{\text{ا بَ}}{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اَ}+\text{بَ})}$ ہے

پہلے کے واقع نہ ہونے اور دوسرے کے واقع ہونیکا احتمال $\frac{\text{اَ ب}}{(\text{اَ}+\text{ب})(\text{اَ}+\text{بَ})}$ ہے

پس اگر دو غیر تابع واقعات وقوع پذیر ہونے کے احتمال بالترتیب

ق اور قَ ہوں تو دونوں کے واقع ہونے کا احتمال ق قَ ہوتا
ہے۔ اسی قسم کا استدلال غیر تابع واقعات کی کسی تعداد پر عا
ہوگا۔ اس طرح آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ اگر غیر تابع
واقعات کی کسی تعداد کے جداگانہ وقوع پذیر ہونے کے احتمال
بالترتیب $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$ ...... ہوں تو ان سب کے وقوع پذ
ہونے کا احتمال $ق_۱ \times ق_۲ \times ق_۳$ ...... ہوگا، پہلے دو کے وقوع پذ
ہونے اور باقی کے وقوع پذیر نہ ہونے کا احتمال $ق_۱ ق_۲ (۱ - ق_۳)$
$\times (۱ - ق_۴)$ ...... ہوگا، اسی طرح باقی کسی ایک خاص صورت
کے لئے۔

۷۵۴۔ اگر ایک امتحان میں ایک واقعہ کے وقوع پذیر ہو
کا احتمال ق ہو تو کسی متواتر ر امتحانوں میں اس کے واقع ہونے
احتمال $ق^ر$ ہوگا۔ یہ نتیجہ دفعۂ ماقبل میں

$$ق_۱ = ق_۲ = ق_۳ = \ldots = ق$$

فرض کرنے سے فوراً واضح ہو جاتا ہے۔

یہ معلوم کرنے کے لئے کہ واقعات کی کسی تعداد میں سے کم
کم کسی ایک کے واقع ہونے کا کیا احتمال ہے ہم اس طرح غ
کرتے ہیں۔ سب واقعات کے عدم وقوع کا احتمال
$(۱ - ق_۱)(۱ - ق_۲)(۱ - ق_۳)$ ...... ہے، سوائے اس صورت کے
باقی ہر صورت میں کوئی نہ کوئی واقعہ ضرور وقوع پذیر ہوگا
پس مطلوبہ احتمال

$$۱ - (۱ - ق_۱)(۱ - ق_۲)(۱ - ق_۳) \ldots\ldots$$ ہے

مثال ۱۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۵ سیاہ گیند ہیں، تھیلی م
سے تین گیند نکالے گئے ہیں، پھر ان گیندوں کو واپس رکھ کر دو
تین گیند نکالے گئے ہیں پہلی مرتبہ تینوں گیندوں کے سفید نکلنے

اور دوسری مرتبہ تینوں کے سیاہ نکلنے کا کیا احتمال ہے؟

جن مختلف طریقوں سے تین گیند نکالے جا سکتے ہیں اُن کی کل تعداد ${}^{13}\text{ج}_{3}$ ہے۔

جن مختلف طریقوں سے تین سفید گیند نکالے جا سکتے ہیں اُنکی تعداد ${}^{5}\text{ج}_{3}$ ہے۔

جن مختلف طریقوں سے تین سیاہ گیند نکالے جا سکتے ہیں اُن کی تعداد ${}^{8}\text{ج}_{3}$ ہے۔

پس پہلے امتحان میں تین سفید گیند نکلنے کا احتمال

$$= {}^{5}\text{ج}_{3} \div {}^{13}\text{ج}_{3} = \frac{3\times4\times5}{3\times2\times1} \div \frac{11\times12\times13}{3\times2\times1} = \frac{5}{143}$$

اور دوسرے امتحان میں تین سیاہ گیند نکلنے کا احتمال

$$= {}^{8}\text{ج}_{3} \div {}^{13}\text{ج}_{3} = \frac{6\times7\times8}{11\times12\times13} = \frac{28}{143}$$

لہٰذا مرکب واقعہ کا احتمال $= \frac{5}{143} \times \frac{28}{143} = \frac{140}{20449}$

مثال ۲۔ اگر ایک سکہ کو اچھالا جائے تو بتاؤ کہ تین متواتر اچھالوں میں تصویر اور زنجیر کے متبادلاً نکلنے کا کیا احتمال ہے؟

پہلے اچھال میں تصویر نکلیگی یا زنجیر۔ دوسرے اچھال میں اس کے برعکس نکلنے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے اور تیسرے اچھال میں پہلے اچھال کے موافق نکلنے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے۔

پس مرکب واقعہ کا احتمال $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ہے۔

مثال ۳۔ ایک شخص ا کی عمر اِس وقت ۳۵ سال کی ہے، اِس کے ۶۵ سال کی عمر تک زندہ رہنے کے خلاف امکان ۷ : ۹ ہے، ایک اور شخص ب کی عمر اِس وقت ۴۵ سال

کی ہے، اس کے ۷۵ سال کی عمر تک زندہ رہنے کے خلاف امکان ۲:۳ ہے۔ بتاؤ کہ کم از کم ایک شخص کے ۳۰ سال تک زندہ رہنے کا کیا احتمال ہے۔

۳۰ سال کے اندر ا کے مرجانے کا احتمال $\frac{۹}{۱۶}$ ہے۔

۳۰ سال کے اندر ب کے مرجانے کا احتمال $\frac{۳}{۵}$ ہے۔

پس " " " دونوں کے " " " $\frac{۹}{۱۶} \times \frac{۳}{۵}$ یعنی $\frac{۲۷}{۸۰}$

پس دونوں کے نہ مرنے کا احتمال یعنی کم از کم ایک کے زندہ رہنے کا احتمال $۱ - \frac{۲۷}{۸۰}$ یعنی $\frac{۵۳}{۸۰}$ ہے۔

۴۵۸۔ دفعہ ۴۵۶ کے حروف کے مفہوم میں ذرا سا تغیر کرنے سے ہم دو تابع واقعات کے ایک ساتھ وقوع پذیر ہونے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ جب پہلا واقعہ ہو چکتا ہے تو اس کے تحت دوسرا واقعہ اَ طریقوں سے وقوع پذیر ہو سکتا ہے اور بَ طریقوں سے وقوع پذیر نہیں ہو سکتا، تب جن طریقوں سے دونوں واقعات اکٹھے واقع ہو سکتے ہیں ان کی تعداد ا اَ ہے، اس لئے ان کے ایک ساتھ واقع ہونے کا احتمال $\frac{ا\ اَ}{(ا+ب)(اَ+بَ)}$ ہے۔

پس اگر پہلے واقعہ کا احتمال ح ہو اور اس کے تحت دوسرے واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال حَ ہو تو دونوں واقعات کے ایک ساتھ واقع ہونے کا احتمال ح حَ ہوگا۔

مثال ۱۔ ترپ کی بازی میں تاش کے پتے ایک ایک کرکے چار کھلاڑیوں میں تقسیم کئے گئے ہیں، بتاؤ کہ ایک خاص شخص کے پاس ترپ کا بادشاہ، اور "بیگم" دونوں کے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

فرض کرو کہ یہ کھلاڑی ا ہے، تب ا کے پاس بادشاہ ہونیکا احتمال $\frac{۱۳}{۵۲}$ ہے کیونکہ "پتہ" ۵۲ مختلف طریقوں سے تقسیم ہوسکتا ہے اور اِن میں سے ۱۳ طریقے ا کے حصہ میں آئے ہیں، اب بادشاہ ا کے پاس آجانے کے بعد ا کے پاس "بیگم" بھی آنے کا قرینہ $\frac{۱۲}{۵۱}$ ہے کیونکہ "بیگم" کا پتہ باقی ۵۱ طریقوں سے تقسیم ہو سکتا ہے اور ۱۲ طریقے ا کے حصہ میں آتے ہیں۔

$$\text{پس مطلوبہ احتمال} = \frac{۱۳}{۵۲} \times \frac{۱۲}{۵۱} = \frac{۱}{۱۷}$$

یا ہم اس طرح بھی استدلال کر سکتے ہیں۔

جن مختلف طریقوں سے بادشاہ، اور بیگم ا کے پاس آسکتے ہیں وہ اُن ترتیبوں کی تعداد کے مساوی ہیں جو ۱۳ چیزوں میں سے دو دو کو لینے سے حاصل ہوتی ہیں یعنی ان کی تعداد ۱۳ × ۱۲ ہے، اسی طرح بادشاہ اور بیگم کو تقسیم کرنے کے کل مختلف طریقے ۵۲ × ۵۱ ہیں۔

$$\text{اس لئے مطلوبہ احتمال} = \frac{۱۲ \times ۱۳}{۵۱ \times ۵۲} = \frac{۱}{۱۷} \text{ حسب سابق}$$

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۸ سیاہ گیند ہیں۔ پہلے تھیلی میں سے تین گیند نکالے گئے ہیں، پھر اِن گیندوں کو واپس رکھنے کے بغیر اِس میں سے تین اور گیند نکالے گئے ہیں۔ پہلی مرتبہ تینوں کے سفید اور دوسری مرتبہ تینوں کے سیاہ نکلنے کا احتمال معلوم کرو۔

پہلی آزمائش میں تین گیند ${}^{۱۳}\text{ج}_{۳}$ طریقوں سے نکل سکتے ہیں اور تین سفید گیند ${}^{۵}\text{ج}_{۳}$ طریقوں سے نکل سکتے ہیں پس پہلی آزمائش میں تینوں گیندوں کے سفید نکلنے کا احتمال

$${}^{۵}\text{ج}_{۳} \div {}^{۱۳}\text{ج}_{۳} = \frac{۳\times۴\times۵}{۳\times۲\times۱} \div \frac{۱۲\times۱۲\times۱۳}{۳\times۲\times۱} = \frac{۵}{۱۴۳}$$

جب تین گیند نکال لئے جائیں تو تھیلی میں باقی ۲ سفید اور ۸ سیاہ گیند رہ جاتے ہیں۔

پس دوسری آزمائش میں تین گیند کل $^{10}ج_3$ مختلف طریقوں سے نکالے جا سکتے ہیں اور تین سیاہ گیند $^{8}ج_3$ مختلف طریقوں سے نکالے جا سکتے ہیں۔ پس دوسری آزمائش میں تینوں گیندوں کے سیاہ نکلنے کا احتمال $^{8}ج_3 \div {}^{10}ج_3 = \frac{6 \times 7 \times 8}{8 \times 9 \times 10} = \frac{7}{15}$ ہے

پس مرکب واقعہ کا احتمال $\frac{7}{15} \times \frac{5}{143} = \frac{7}{429}$ ہے

طالب علم کو چاہئے کہ اس جواب کا مقابلہ دفعہ ۴۵۷ کی مثالِ اول کے ساتھ کرے۔

۴۵۹۔ اگر ایک واقعہ دو یا زیادہ مختلف طریقوں سے واقع ہو سکتا ہو اور یہ طریقے ایک دوسرے کے متافی ہوں تو اس کے واقع ہونے کا احتمال مختلف طریقوں سے واقع ہونے کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی ہوگا۔

اس مسئلہ کو بعض اوقات صریح اور از خود بیّن نتیجہ خیال کرتے ہیں جو احتمال کی تعریف سے ہی واضح ہے تاہم اسکو باضابطہ طور پر حسب ذیل طریقہ سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ واقعہ دو ایسے طریقوں سے جو ایک ساتھ واقع نہیں ہوتے وقوع میں آسکتا ہے، نیز فرض کرو کہ ان دو طریقوں سے اس کے واقع ہونے کے احتمال بالترتیب $\frac{ا_1}{ب_1}$ اور $\frac{ا_2}{ب_2}$ ہیں۔ تب $ب_1 ب_2$ صورتوں میں سے $ا_1 ب_2$ صورتیں ایسی ہیں جن میں واقعہ پہلے طریقہ سے واقع ہو سکتا ہے اور $ا_2 ب_1$ صورتیں ایسی ہیں

جن میں واقعۂ مذکورہ دوسرے طریقہ سے واقع ہوسکتا ہے اور یہ طریقے ایک ساتھ واقع نہیں ہوتے۔ پس فی الجملہ $ب_۱ ب_۲$ صورتوں میں سے $ا_۱ ب_۲ + ا_۲ ب_۱$ صورتیں ایسی ہیں جو واقعہ کے موافق ہیں، پس واقعہ کے اِن دو طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے واقع ہونے کا احتمال

$$\frac{ا_۱ ب_۲ + ا_۲ ب_۱}{ب_۱ ب_۲} = \frac{ا_۱}{ب_۱} + \frac{ا_۲}{ب_۲}$$ ہے۔

ایسے باہم منافی طریقوں کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو سب پر اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا۔

اس لئے اگر واقعہ $ن$ طریقوں سے واقع ہوسکتا ہو جو باہم منافی ہوں اور اگر واقعہ کے اِن مختلف طریقوں سے واقع ہونے کے احتمال بالترتیب $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$..... $ق_ن$ ہوں تو اِن طریقوں میں سے کسی ایک سے واقع ہونے کا احتمال۔

$$ق_۱ + ق_۲ + ق_۳ + \ldots + ق_ن$$ ہوگا

مثال ۱۔ دو مہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں۔ اُن سے کم از کم ۹ نکلنے کا احتمال دریافت کرو۔

۹ چار طریقوں سے بن سکتا ہے، اس لئے ۹ نکلنے کا احتمال $\frac{۴}{۳۶}$ ہے۔

۱۰ تین طریقوں سے بن سکتا ہے، اسلئے ۱۰ نکلنے کا احتمال $\frac{۳}{۳۶}$ ہے۔

۱۱ دو طریقوں سے بن سکتا ہے، اسلئے ۱۱ نکلنے کا احتمال $\frac{۲}{۳۶}$ ہے۔

۱۲ ایک طریقہ سے بن سکتا ہے، اسلئے ۱۲ نکلنے کا احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ ہے۔

اب ۹ سے کم عدد نہ نکلنے کا احتمال اِن مختلف احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی ہے

$\therefore$ مطلوبہ احتمال $= \frac{۱+۲+۳+۴}{۳۶} = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$

مثال ۲۔ ایک بٹوے میں ایک پونڈ ہے اور تین شلنگ، دوسرے بٹوے میں دو پونڈ ہیں اور چار شلنگ، تیسرے بٹوے میں تین پونڈ ہیں اور ایک شلنگ، اگر علی الحساب کوئی ایک بٹوا لیکر اس میں سے ایک سکہ نکالا جائے تو بتاؤ کہ سکہ کے پونڈ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

چونکہ ہر ایک بٹوے کے لئے جانے کا امکان مساوی ہے اسلئے پہلا بٹوا لینے کا احتمال $\frac{1}{3}$ ہے اور اس میں سے نکالے ہوئے ایک سکہ کے پونڈ ہونے کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے، پس جہاں تک پہلے بٹوے کا تعلق ہے اس میں سے پونڈ نکالنے کا احتمال $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$۔
اسی طرح سے دوسرے بٹوے میں سے پونڈ نکالنے کا احتمال $\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$ ہے اور تیسرے میں سے نکالے ہوئے سکہ کے پونڈ ہونے کا احتمال $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$ یعنی $\frac{1}{4}$ ہے۔

$$\therefore \text{مطلوبہ احتمال} = \frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{4}{9}$$

۴۶۰۔ دفعہ ماقبل میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ بعض اوقات کسی واقعہ کے احتمال کو دو یا زیادہ مختلف واقعات کے احتمال کے حاصل جمع کے مساوی تصور کیا جا سکتا ہے لیکن یہ اچھی طرح ذہن نشین کر لینا چاہئے کہ کسی واقعہ کا احتمال دو یا زیادہ واقعات کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی اسی صورت میں سمجھا جا سکتا ہے جبکہ واقعات بلحاظ ایک دوسرے کے بالکل غیر متعلق ہوں یعنی جب کسی ایک کا واقع ہونا باقی واقعات میں سے کسی ایک کے وقوع پذیر ہونے پر اثر انداز نہ ہو۔

مثال۔ ۲۰ ٹکٹوں پر پہلے بیس طبعی عدد لکھے ہوئے ہیں، ان میں سے ایک ٹکٹ علی الحساب نکالا گیا ہے، بتاؤ کہ اس پر کے عدد کے ۳ یا ۷ کے ضعف ہونے کا کیا احتمال ہے۔

اِس ٹکٹ پر کے عدد کے ۳ کے ضعف ہونے کا احتمال $\frac{6}{20}$ ہے۔ اور ۷ کے ضعف ہونے کا احتمال $\frac{2}{20}$ یعنی $\frac{1}{10}$ ہے، اور یہ واقعات باہم منافی ہیں۔ پس مطلوبہ احتمال

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5} \text{ ہے۔}$$

لیکن اگر سوال یوں ہوتا کہ اس عدد کے ۳ کے یا ۵ کے ضعف ہونے کا کیا احتمال ہے تو حسب ذیل طریق پر استدلال کرنا غلط ہوتا۔

چونکہ عدد مذکور کے ۳ کے ضعف ہونے کا احتمال $\frac{6}{20}$ ہے اور عدد مذکور کے ۵ کے کوئی ضعف ہونے کا احتمال $\frac{4}{20}$ ہے، اسلئے

مطلوبہ احتمال $\frac{6}{20} + \frac{4}{20} = \frac{1}{2}$ ہے۔

اس کی وجہ یہ ہے کہ ممکن ہے کہ عدد مذکور ۳ اور ۵ دونوں کا ضعف ہو، اس لئے اِس صورت میں دونوں واقعات ایک دوسرے سے غیر متعلق یا منافی نہیں ہیں۔

۱۶۴ ۔ یہ بات قابل غور ہے کہ مفرد اور مرکب واقعات کا فرق بہت سی صورتوں میں محض مصنوعی ہوتا ہے۔ بعض صورتوں میں یہ صرف نقطہ نظر کا فرق ہوتا ہے۔

مثال ۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۷ سیاہ گیند ہیں، اگر دو گیند نکالے جائیں تو ایک گیند کے سیاہ اور دوسرے کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

(۱) اگر اِس واقعہ کو مفرد تصور کیا جائے تو

$$\text{احتمال مطلوبہ} = (5 \times 7) \div {}^{12}C_2 = \frac{35}{66}$$

(۲) اِس واقعہ کو ذیل کے دو مرکب واقعات میں سے ایک یا دوسرے

کا وقوع تصور کیا جا سکتا ہے۔
۱۔ پہلے ایک سفید اور پھر ایک سیاہ گیند کا نکالنا، اس کا احتمال

$$\frac{5}{12} \times \frac{7}{11}$$ یعنی $\frac{35}{132}$ ہے

۲۔ پہلے سیاہ اور پھر سفید گیند کا نکالنا، اس کا احتمال

$$\frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$ ہے

اور چونکہ یہ واقعات ایک دوسرے سے بالکل غیر متعلق ہیں، اسلئے مطلوبہ احتمال

$$= \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{35}{66}$$ ہے

یہ بات قابل غور ہے کہ ہم نے یہاں تسلیم کرلیا ہے کہ دو خ[illegible] گیندوں کو یکے بعد دیگرے نکالنے کا احتمال وہی ہے جو ا[illegible] ایک ساتھ نکالنے کا ہے، ذرا سے غور سے معلوم ہو جائیگا [illegible] درست ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (ب)

۱۔ ایک معمولی مہرہ کو یکے بعد دیگرے دو مر[illegible] پہلی افتاد میں یکہ کے نکلنے کا کیا احتمال ہے

۲۔ ایک تاش میں سے تین پتے ملی الحسا[illegible] بتاؤ کہ ان پتوں کے بادشاہ، بیگم اور غلام [illegible]

۳۔ ایک واقعہ کے خلاف امکان ۵ : ۲ [illegible] جو پہلے واقعہ پر منحصر نہیں ہے اس کے موافق [illegible] ان واقعات میں سے کم از کم ایک کے وقوع [illegible]

۴۔ ایک لڑکے ا کے ایک سوال کو حل [illegible]

امکان ۴ : ۳ ہے اور ایک لڑکے ب کے یہی سوال حل کر سکنے کے
موافق امکان ۷ : ۵ ہے اگر یہ دونوں حل کرنے کی کوشش کریں تو سوال
کے حل ہو جانے کا کیا احتمال ہے۔

۵۔ ایک بٹوے کے ایک خانہ میں ۲ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں
اور دوسرے خانہ میں ۲ پونڈ اور ایک شلنگ، بٹوے میں سے
ایک پونڈ نکالنے کا کیا احتمال ہے۔

۶۔ ایک تھیلی میں ۱۷ ٹکٹ ہیں جن پر ایک سے سترہ تک
عدد لکھے ہوئے ہیں۔ ان میں سے ایک ٹکٹ نکالا گیا ہے اور
پھر اس کو واپس رکھ دیا گیا ہے، پھر ایک اور ٹکٹ نکالا گیا ہے
اس کا کیا احتمال ہے کہ پہلا عدد جفت اور دوسرا طاق ہو۔

۷۔ ۴ آدمی ایک تاش میں سے ایک ایک پتہ نکالتے ہیں،
بتاؤ کہ (۱) چاروں پتوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کا اور (۲)
کسی دو پتوں کی ایک ہی قیمت کے نہ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۸۔ ایک مہرہ کو ۵ دفعہ پھینکنے میں کم از کم ایک دفعہ '۶'
نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۹۔ ایک کتاب کا تین نکتہ سنج جدا جدا تبصرہ کر رہے ہیں،
[illegible] تبصروں کے کتاب کے حق میں یا موافق ہونے کے احتمال
[illegible] ۲ : ۳، ۴ : ۳، ۴ : ۲ ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ تین
[illegible] سے کثرت کتاب کے حق میں ہو۔

[illegible] ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۳ سیاہ گیند ہیں۔ ان میں سے
[illegible] یکے بعد دیگرے اسطرح نکالا گیا ہے کہ نکالا ہوا گیند واپس نہیں
[illegible] بتاؤ کہ ان گیندوں کے متبادلاً مختلف رنگوں کے ہونے کا
[illegible] احتمال ہے۔

[illegible] دو مہروں کو تین بار پھینکا گیا ہے، بتاؤ کہ کم از کم ایک بار
[illegible] نکلنے کا کیا احتمال ہے [جب دو رخوں کے عددوں کی قیمتیں

مساوی ہوں تو ان عددوں کے زوج کو دستر کہتے ہیں]

۱۲- اگر علی الحساب چار صحیح عددوں کو لیکر ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب کے آخری ہندسہ کے ۱، ۳، ۷، یا ۹ ہونیکا احتمال $\frac{16}{625}$ ہے۔

۱۳- ایک بٹوے میں ۱۰ سکے ہیں جن میں سے ایک سکہ پونڈ ہے اور باقی سب شلنگ ہیں، دوسرے بٹوے میں ۱۰ سکے ہیں اور سب کے سب شلنگ ہیں۔ پہلے بٹوے میں سے ۹ سکے لیکر دوسرے میں ڈال دئے گئے ہیں، پھر دوسرے میں سے ۹ سکے لیکر پہلے میں ڈالے گئے ہیں، بتاؤ کہ پونڈ کے ابھی تک پہلے ہی بٹوے میں ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۴- ۲ سکوں کو پانچ مرتبہ اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ ۵ تصویروں اور ۵ زنجیروں کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۵- ہ سکوں کو اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ ایک اور صرف ایک ہی سکہ میں تصویر کے اوپر ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۶- ا، ب اور ج ترتیب دار پتوں کی ایک تاش کو کاٹتے ہیں اور پتوں کو پھر واپس رکھہ دیتے ہیں۔ شرط یہ ہے کہ جو شخص پہلے تاش کے حکم کا پتہ کاٹے گا وہ انعام کا مستحق ہوگا، ان میں سے ہر ایک کے جداگانہ انعام پانے کا کیا احتمال ہے؟

۱۷- ایک بٹوے میں ۲ پونڈ اور ۴ شلنگ ہیں، ا اور ب ترتیب دار اس میں سے جداگانہ ایک ایک سکہ نکالتے ہیں اور پھر واپس نہیں رکھتے، ان میں سے جداگانہ ہر ایک کا پہلے ایک پونڈ نکالنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۸- ن اشخاص کی ایک جماعت ایک گول میز کے گرد بیٹھی ہے دو مخصوص آدمیوں کے ایک دوسرے کے پاس بیٹھنے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۱۹۔ چھ گھوڑے ایک دوڑ میں حصہ لیتے ہیں، ان میں سے ایک ا ہے۔ ا پر جابک سواروں ب اور ج میں سے کوئی ایک سوار ہو گا۔ ب کا ا پر سوار ہونے کے موافق امکان ۲ : ۱ ہے، اس صورت میں سب گھوڑوں کے جیتنے کا امکان مساوی ہے اگر ج ا پر سوار ہو تو ا کے جیتنے کا احتمال تین گنا ہو جاتا ہے، ا کے جیتنے کے خلاف کیا امکان ہے؟

۲۰۔ اگر ۱۰ جہازوں میں سے بالاوسط ایک جہاز غرق ہو جاتا ہو تو ۵ جہازوں میں سے کم از کم ۴ کے صحیح سلامت پہنچنے کا کیا احتمال ہے۔

۴۶۲۔ اگر ایک واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال ایک امتحان میں معلوم ہو تو ن امتحانوں میں اس کے ٹھیک ایک دفعہ، دو دفعہ، تین دفعہ ..... واقع ہونے کا احتمال جداگانہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک امتحان میں واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال ق ہے۔ نیز فرض کرو کہ ۱ - ق = ف، تب ن امتحانوں میں واقعۂ مذکور کے عین ر مرتبہ وقوع پذیر ہونے کا احتمال $(ف + ق)^{ن}$ کے پھیلاؤ میں (ر+۱) ویں رقم کے مساوی ہو گا۔

کیونکہ اگر ہم کل امتحانوں میں سے ر امتحانوں کا کوئی خاص جٹ منتخب کر لیں تو اس کا احتمال کہ واقعۂ مذکور ان ر امتحانوں میں سے ہر ایک میں واقع ہو اور باقی امتحانوں میں سے کسی میں واقع نہ ہو $ق^{ر} ف^{ن-ر}$ ہے (دیکھو دفعہ ۴۵۶) اور چونکہ ر امتحانوں کا کوئی جٹ $ن_{ج_ر}$ طریقوں سے منتخب کیا جا سکتا ہے اور ان میں سے ہر طریقہ میں واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا

احتمال $ق^{ر} ف^{ن-ر}$ ہے اِس لئے مطلوبہ احتمال

$${}^{ن}ج_{ر}\; ق^{ر} ف^{ن-ر}$$

ہے

اگر ہم $(ق + ف)^{ن}$ کو مسئلہ ثنائی کی رُو سے پھیلائیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(ق+ف)^{ن} = ق^{ن} + {}^{ن}ج_{1}\, ق^{ن-1} ف + {}^{ن}ج_{2}\, ق^{ن-2} ف^{2} + \dots + {}^{ن}ج_{ن-ر}\, ق^{ر} ف^{ن-ر} + \dots + ف^{ن}$$

گویا سلسلۂ بالا کی رقمیں ن امتحانوں میں واقعہ کے بالترتیب ن بار، (ن - ۱) بار، (ن - ۲) بار، ...... واقع ہونے کے احتمال کو تعبیر کرتی ہیں۔

۴۶۳۔ اگر ایک واقعہ پورے ن مرتبہ واقع ہو سکتا ہو یا صرف ایک مرتبہ، دو مرتبہ ..... (ن - ر) مرتبہ واقع نہ ہو سکتا ہو تو ظاہر ہے کہ یہ یا ر سے زیادہ مرتبہ واقع ہو سکتا ہے، اس لئے ن امتحانوں میں اس کے کم از کم ر مرتبہ واقع ہونے کا احتمال

$$ق^{ن} + {}^{ن}ج_{1}\, ق^{ن-1} ف + {}^{ن}ج_{2}\, ق^{ن-2} ف^{2} + \dots + {}^{ن}ج_{ن-ر}\, ق^{ر} ف^{ن-ر}$$

ہے یعنی $(ق + ف)^{ن}$ کی تفصیل میں پہلی ن - ر + ۱ رقموں کے حاصل جمع سے تعبیر ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ دو مہروں کو ایک ساتھ چار مرتبہ پھینکا گیا ہے۔ کم از کم دو "دُسروں" کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

ایک دفعہ پھینکنے میں دُسّر نکلنے کا احتمال $\frac{۶}{۳۶}$ یعنی $\frac{۱}{۶}$ ہے۔ اور دُسّر نہ نکلنے کا احتمال $\frac{۵}{۶}$ ہے۔ واقعہ زیرِ بحث کے پورا ہونے کے لئے

دستیں دو مرتبہ، تین مرتبہ، یا چار مرتبہ نکل سکتی ہیں کیونکہ مہروں کو چار مرتبہ پھینکا گیا ہے۔ پس مطلوبہ احتمال $(\frac{۱}{۶}+\frac{۵}{۶})^{۴}$ کی تفصیل میں پہلی تین رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔ یعنی

$$= \frac{۱}{۶^{۴}}(۱+۴\times۵+۶\times۵^{۲}) = \frac{۱۹}{۱۴۴}$$

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں کچھ گیند ہیں جن میں سے کچھ گیند سفید ہیں، ایک گیند کو نکال کر پھر واپس رکھ دیا گیا ہے۔ پھر ایک اور کو نکال کر واپس رکھ دیا گیا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ اگر ایک امتحان میں سفید گیند کے نکلنے کا احتمال ق ہو تو بتاؤ کہ ن امتحانوں میں زیادہ سے زیادہ کتنے سفید گیندوں کے نکلنے کا احتمال ہے؟

ٹھیک ر سفید گیند نکلنے کا احتمال $^{ن}ج_{ر}\ ق^{ر}\ ف^{ن-ر}$ ہے، اب ہمیں صرف یہ معلوم کرنا ہے کہ ن کی کس قیمت کے یہ جملہ بڑے سے بڑا ہے۔

اب $^{ن}ج_{ر}\ ق^{ر}\ ف^{ن-ر} > {}^{ن}ج_{ر-۱}\ ق^{ر-۱}\ ف^{ن-(ر-۱)}$

تاوقتیکہ $(ن-ر+۱)\ ق > ر\ ف$

یعنی $(ن+۱)\ ق > (ق+ف)\ ر$

لیکن $ق+ف=۱$، پس ر کی مطلوبہ قیمت $ق\ (ن+۱)$ میں کے بڑے سے بڑے عدد کے مساوی ہے۔

اگر ن ایسا ہو کہ ق ن کوئی صحیح عدد ہو تو غالب ترین صورت یہ ہے کہ ق ن کامیابیاں اور ف ن ناکامیاں ہونگی۔

۴۶۴۔ فرض کرو کہ ایک قرعہ میں ن ٹکٹ ہیں اور انعام لا پونڈ ہے، اب چونکہ انعام حاصل کرنے کے لئے سب ٹکٹوں کا امکان مساوی ہے اور ایک شخص جس کے پاس سب ٹکٹ

ہوں وہ ضرور جیتیگا اس لئے سمجھنا چاہئے کہ ہر ایک ٹکٹ کی مالیت $\frac{ل}{ن}$ پونڈ ہے، دوسرے لفظوں میں ایک ٹکٹ کے عوض میں یہ رقم معقولیت کے ساتھ ادا کیجا سکتی ہے۔ پس اگر ایک آدمی کے پاس ر ٹکٹ ہوں اور وہ ان کو بیچنا چاہے تو ان کے عوض میں اسکا $\frac{رل}{ن}$ پونڈ طلب کرنا معقولیت سے بعید نہیں، گویا اسکی کامیابی کے احتمال کی قیمت $\frac{ر}{ن}$ ل پونڈ متصور ہو سکتی ہے۔ اس بنا پر ذیل کی تعریف وضع کرنا موجب سہولت ہوگا۔

اگر ایک شخص کی کامیابی کا احتمال ق ہو اور م وہ رقم ہو جو اس کو بصورت کامیابی حاصل ہو سکتی ہو تو م ق سے جو رقم تعبیر ہوگی وہ اس شخص کی "توقع" کہلاتی ہے۔

۴۶۵۔ جس طرح سے بلحاظ کسی شخص کے لفظ "توقع" کا استعمال سہولت بخش ہے اسی طرح بلحاظ اشیائے کے الفاظ "ظنی قیمت" کا استعمال موجب آسانی ہے۔

مثال ۱۔ ایک بٹوے میں ایک پونڈ اور ۵ شلنگ ہیں۔ ایک اور بٹوے میں ۶ شلنگ ہیں، پہلے بٹوے میں سے دو سکے نکال کر دوسرے بٹوے میں ڈالے گئے ہیں، پھر دوسرے میں سے دو سکے نکال کر پہلے میں ڈالے گئے ہیں، ہر ایک بٹوے کے سکوں کی "ظنی قیمت" معلوم کرو۔

پونڈ کے پہلے بٹوے میں ہونے کا احتمال اسکے دوبارہ بدلے جانے اور ایک بار بھی نہ بدلے جانے کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی

یعنی پہلے بٹوے میں ہونیکا احتمال = $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۴} \times ۱ = \frac{۳}{۴}$

لہذا پونڈ کے دوسرے بٹوے میں ہونے کا احتمال = $\frac{1}{4}$
پس پہلے بٹوے کی ظنی قیمت $\frac{3}{4}$ × ۲۵ شلنگ + $\frac{1}{4}$ × ۶ شلنگ
= ۱ پونڈ ۰ شلنگ ۳ پنس
∴ دوسرے بٹوے کی ظنی قیمت = ۳۱ شلنگ - $\frac{1}{4}$ ۲۰ شلنگ
= ۰ ۰ شلنگ ۹ پنس
اس مسئلہ کو اس طرح بھی حل کیا جاسکتا ہے۔
جن سکوں کو نکالا گیا ہے ان کی ظنی قیمت = ۲۵ شلنگ کا $\frac{1}{3}$
= $\frac{1}{3}$ ۸ شلنگ، جن کو پھر واپس لایا گیا ہے ان کی ظنی قیمت
= (۶ شلنگ + $\frac{1}{3}$ ۸ شلنگ) کا $\frac{1}{4}$ = $\frac{7}{12}$ ۳ شلنگ
∴ پہلے بٹوے کی ظنی قیمت = (۲۵ - $\frac{1}{3}$ ۸ + $\frac{7}{12}$ ۳) شلنگ
= ۱ پونڈ ۰ شلنگ ۳ پنس حسب سابق

مثال ۲۔ ا اور ب ۱۱ پونڈ کا ایک انعام جیتنے کے لئے اس شرط پر یکے بعد دیگرے ایک مہرہ پھینکتے ہیں کہ جو پہلے ۶ پھینکیگا وہ انعام کا مستحق ہوگا۔ اگر ا پہلے پھینکے تو ان کی جداگانہ کیا "توقعات" ہیں۔

پہلی افتاد میں ا کا احتمال $\frac{1}{6}$ ہے اور دوسری افتاد میں $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ ہے، کیونکہ ا کو دوسری مرتبہ پھینکنے کا موقع صرف اسی صورت میں مل سکتا ہے جبکہ دونوں کھلاڑی پہلی مرتبہ ناکام رہ چکیں تیسری مرتبہ پھینکنے میں ا کا احتمال $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6}$ ہے، کیونکہ ا کو تیسرا موقع صرف اسی صورت میں مل سکتا ہے جبکہ ا اور ب دونوں دو دو مرتبہ ناکام رہ چکیں علیٰ ہذالقیاس
پس ا کا احتمال لامتناہی سلسلہ

$$\frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اسی طرح سے ب کا احتمال لامتناہی سلسلہ

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

∴ ا کے احتمال کی نسبت ب کے احتمال کے ساتھ ۶ : ۵ ہے، اس لئے جداگانہ اُن کے احتمال بالترتیب $\frac{6}{11}$ اور $\frac{5}{11}$ ہیں اور ان کی توقعات ۶ پونڈ اور ۵ پونڈ ہیں۔

۴۶۶۔ اب ہم دو اور مثالیں حل کرتے ہیں جن سے نہایت مفید اور دلچسپ نتائج مستنبط ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک بازی جیتنے کے لئے دو کھلاڑیوں ا اور ب کو بالترتیب م اور ن کھیل جیتنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایک کھیل جیتنے کے لئے اُن کے احتمال بالترتیب ق اور قَ ہیں جہاں ق اور قَ کا مجموعہ ایک ہے انعام اُس کو ملیگا جو پہلے اپنے کھیلوں کی تعداد کو پورا کرلے گا۔ بتاؤ کہ ہر ایک کھلاڑی کے جیتنے کا کیا احتمال ہے؟

فرض کرو کہ ا ٹھیک م + ر کھیلوں میں بازی جیت لیتا ہے ایسا ہونے کے لئے لازمًا وہ آخری کھیل میں جیتا ہوگا اور اس سے پہلے کے م + ر − ۱ کھیلوں میں سے م − ۱ کھیلوں میں جیتا ہوگا۔ اس کا احتمال

$$ {}^{م+ر-1}ج_{م-1}\ ق^{م-1}\ قَ^{ر}\ ق $$

یعنی $ {}^{م+ر-1}ج_{م-1}\ ق^{م}\ قَ^{ر}$ ہے۔

ب ضروری ہے کہ بازی کا فیصلہ م + ن - ۱ کھیلوں سے ہو اور ا
پنے م کھیل ٹھیک م کھیلوں میں سے یا م + ۱ کھیلوں میں سے
..... م + ن - ۱ کھیلوں میں سے جیت سکتا ہے - اس لئے اگر ہم
لہ $\text{ج}^{\text{م+ن-۱}}_{\text{م-۱}}\ \text{ق}^{\text{م}}\ \text{ق}'^{\text{ر}}$ میں بالترتیب ر کو ۱، ۲، ۳، .... ن - ۱
تیں دیگر محصلہ جملوں کی قیمتیں معلوم کر لیں تو ہمیں ا کے جیتنے کا
تمال معلوم ہو جائے گا ۔
پس ا کے جیتنے کا احتمال

$$\text{ق}^{\text{م}}\left\{۱ + \text{م}\,\text{ق}' + \frac{\text{م(م+۱)}}{|\underline{۲}}\,\text{ق}'^{۲} + \dots + \frac{|\underline{\text{م+ن-۲}}}{|\underline{\text{م-۱}}\ |\underline{\text{ن-۱}}}\,\text{ق}'^{\text{ن-۱}}\right\} \text{ ہے}$$

اسی طرح ب کے جیتنے کا احتمال

$$\text{ق}'^{\text{ن}}\left\{۱ + \text{ن}\,\text{ق} + \frac{\text{ن(ن+۱)}}{|\underline{۲}}\,\text{ق}^{۲} + \dots + \frac{|\underline{\text{م+ن-۲}}}{|\underline{\text{م-۱}}\ |\underline{\text{ن-۱}}}\,\text{ق}^{\text{م-۱}}\right\} \text{ ہے}$$

اس مسئلہ کو "بازیوں کا مسئلہ" کہتے ہیں اور حکیم پاسکل کے زمانہ سے
لہ بعد کے اکثر مشہور و معروف ریاضی دانوں کی توجہ اس مسئلہ
ا طرف مبذول رہی ہے، ۱۶۵۴ء میں پہلے پہلے یہ سوال
نی دلیر ڈی میٹری کی جانب سے حکیم پاسکل کے سامنے پیش کیا گیا اور
سکل اور فرما نے اس پر بحث کی لیکن انہوں نے اپنی توجہ کو
ونوں کھلاڑیوں کے بلحاظ مہارت مساوی ہونے کی صورت تک
دود رکھا۔ ان دونوں کے نتائج اوپر کے نتائج سے ذرا مختلف شکل
یں تھے۔ جو نتائج ہم نے اوپر درج کئے ہیں وہ مانٹ مارٹ کے ساتھ
نسوب کئے جاتے ہیں جس نے پہلے پہل ان کو اپنی ایک کتاب میں
۱۷۱۴ میں شائع کیا۔ یہی نتیجہ بعد ازاں لاگرینج اور لاپلاس نے

مختلف طریقوں سے حاصل کیا۔ موخرالذکر نے اس مسئلہ کی بہت سی مختلف صورتوں پر بالتفصیل بحث کی ہے۔

مثال ۲۔ ن مہروں میں سے ہر ایک مہرہ کے ر رُخ ہیں اور ہر ایک مہرے کے رخوں پر بالترتیب ۱ سے ر تک عدد منقوش ہیں، اگر ان سب کو علی الحساب پھینکا جائے تو بتاؤ کہ جو عدد سب مہروں پر نکلیں ان کے مجموعہ کے ق کے مساوی ہونے کا کیا احتمال ہے۔

چونکہ ن مہروں میں سے ہر ایک مہرہ کے ر رخوں میں سے کوئی رُخ اوپر آسکتا ہے اس لئے مہروں کے گرنے کے طریقوں کی تعداد $\text{ر}^{\text{ن}}$ ہے۔

نیز جن طریقوں سے ظاہر شدہ عددوں کا مجموعہ ق ہو سکتا ہے ان کی تعداد

$$(\text{لا}^{۱} + \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳} + \ldots\ldots + \text{لا}^{\text{ر}})^{\text{ن}}$$

کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ق}}$ کے سر کے مساوی ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ ہمیں قوت نماؤں ۱، ۲، ۳، .....، ر میں سے ن ایسے قوت نماؤں کو لینا ہے جن کا مجموعہ ق ہو اور ایسا کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد صریحاً $\text{لا}^{\text{ق}}$ کے سر کے مساوی ہے۔

$$\text{اب جملۂ بالا} = \text{لا}^{\text{ن}}(۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲} + \ldots\ldots + \text{لا}^{\text{ر}-۱})^{\text{ن}}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}}\left(\frac{۱ - \text{لا}^{\text{ر}}}{۱ - \text{لا}}\right)^{\text{ن}}$$

اس لئے اب ہمیں صرف $(۱ - \text{لا}^{\text{ر}})^{\text{ن}}(۱ - \text{لا})^{-\text{ن}}$ کی تفصیل میں $\text{لا}^{\text{ق}-\text{ن}}$ کا سر معلوم کرنا ہے۔

$$(۱ - \text{لا}^{\text{ر}})^{\text{ن}} = ۱ - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ر}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\text{لا}^{۲\text{ر}} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\underline{|۳}}\text{لا}^{۳\text{ر}} + \ldots\ldots$$

$$(۱-لا)^{-ن} = ۱ + ن\,لا + \frac{ن(ن+۱)}{\underline{|۲}}لا^{۲} + \frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{\underline{|۳}}لا^{۳} + \ldots$$

اِن سلسلوں کو باہم ضرب دو اور حاصل ضرب میں $لا^{ق-ن}$ کا سر محسوب کرو، اس طرح سے یہ سر

$$\frac{ن(ن+۱)\ldots(ق-۱)}{\underline{|ق-ن}} - ن\,\frac{ن(ن+۱)\ldots\ldots(ق-ر-۱)}{\underline{|ق-ن-ر}}$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲} \times \frac{ن(ن+۱)\ldots\ldots(ق-۲ر-۱)}{\underline{|ق-ن-۲ر}} - \ldots\ldots\ldots$$

حاصل ہوتا ہے جہاں یہ سلسلہ اس وقت تک جاری رکھنا چاہئے جبتک کہ کوئی منفی جزو ضربی رونما نہ ہو جائے۔ مطلوبہ احتمال مندرجہ بالا سلسلہ کو $ر^{ن}$ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کو ڈی ماٹیرے کے ساتھ منسوب کیا جاتا ہے، اس نے اس مسئلہ کو ۱۷۳۰ میں طبع کیا، یہ ایک نہایت کثیر الاستعمال طریقہ کی مثال ہے۔

لاپلاس نے بعد ازیں یہی ضابطہ زیادہ پُرمشقت طریقہ سے دریافت کیا اور اس نے اُس ابتدائی وجہ موجبہ پر بحث کرتے ہوئے جس سے تمام سیّارے ناقص مداروں پر گھومنے شروع ہوئے اور اسی سمت میں گھومنے شروع ہوئے جس میں زمین سورج کے گرد گھوم رہی ہے اس ضابطہ کو استعمال بھی کیا۔ اس کے متعلق طالب علم اگر چاہے تو ٹاڈہنٹر کی ہسٹری آف پرابے بلی ٹی (تاریخ احتمال) دفعہ ۹۸۷ کا مطالعہ کر سکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (ج)

۱۔ ایک کھیل میں ا کی مہارت اور ب کی مہارت کی باہمی نسبت

۲ : ۳ ہے۔ بتاؤ کہ ۵ بازیوں میں سے کم از کم ۳ جیتنے کے لئے ب کا کیا احتمال ہے۔

۲۔ ایک سکہ کے رخوں پر بالترتیب ۲ اور ۳ لکھے ہوئے ہیں، سکہ کو پانچ مرتبہ اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ جو عدد نکلیں اُن کے مجموعہ کے ۱۲ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۳۔ کئی کھیلوں کی بازی میں ہر ایک کھیل کے اندر گذشتہ کھیل کے جیتنے والے کے موافق امکان ۲ : ۱ ہے، بتاؤ کہ اس کھلاڑی کے لئے جو پہلی بازی جیتتا ہے بعد کی چار بازیوں میں سے کم از کم تین جیتنے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک تھیلی میں ۹ سکے ہیں، ان میں سے ۵ پونڈ ہیں اور باقی مساوی الیت کے نامعلوم سکے ہیں۔ اگر ایک دفعہ سکے نکالنے کی ظنی قیمت ۱۲ شلنگ ہو تو بتاؤ کہ وہ سکے کیا ہیں۔

۵۔ ایک سکہ کو n بار اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ تصویر کے طاق بار نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۶۔ ایک شخص ایک تھیلی میں سے جس میں ۲ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں بن دیکھے دو سکے نکالنے کا مجاز ہے، اس کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۷۔ چھ اشخاص یکے بعد دیگرے ایک پیسہ اچھالتے ہیں، انعام اس کو ملیگا جس کے پھینکنے سے پہلے تصویر نکلے۔ چوتھے شخص کا احتمال معلوم کرو۔

۸۔ ایک تھیلی میں تین پتیاں ہیں جن پر بالترتیب اعداد ۱، ۲، ۳ لکھے ہیں، ان میں سے ایک کو نکال کر پھر واپس رکھ دیا گیا ہے، اسی عمل کو تین بار کیا گیا ہے مجموعہ کے ۶ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۹۔ ایک سکہ کے دو رخوں پر ہندسے ۴ اور ۵ لکھے گئے ہیں سکہ کو چار مرتبہ اچھالا گیا ہے۔ اس طرح اچھالنے سے جو عدد برآمد ہوں ان کے حاصل جمع کے ۱۵ سے کم ہونے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۱۰۔ تین مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ٹھیک ۱۰ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ دو مساوی مہارت کے کھلاڑی ا اور ب کھیلوں کی ایک بازی میں شریک ہوئے۔ جب ا کے جیتنے میں ۳ کھیلوں کی اور ب کے جیتنے میں دو کھیلوں کی کمی رہ جائے تو وہ کھیلنا چھوڑ دیتے ہیں اگر انعام ۱۶ پونڈ ہو تو بتاؤ کہ اوسمیں دونوں کا کیا حصہ ہے۔

۱۲۔ ا اور ب تین مہروں سے کھیلتے ہیں، ا کے مہرے پھینکنے سے ۸ برآمد ہوتا ہے بتاؤ کہ ب کا اس سے زیادہ پھینکنے کا کیا احتمال ہے؟

۱۳۔ ا کی جیب میں ایک پونڈ اور ۴ شلنگ ہیں، وہ ان میں سے دو سکوں کو علی الحساب نکال کر ب اور ج کو دے دینا چاہتا ہے، ج کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک ہی مہرہ کو ۵ مرتبہ پھینکنے سے (۱) ٹھیک ۳ یکے (۲) کم از کم تین یکے نکلنے کا کیا احتمال ہے؟

۱۵۔ ا، ب کے ساتھ ۵ شلنگ : ۲ شلنگ کی شرط باندھتا ہے کہ دو مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے وہ ب کے ۴ پھینکنے سے پہلے ۶ پھینک سکے گا دونوں کے پاس دو، دو مہرے ہیں اور وہ دونوں ایک ساتھ پھینکتے ہیں حتیٰ کہ ان میں سے ایک جیت جاتا ہے اور ان اعداد کو جن میں مساوی اعداد برآمد ہوتے ہیں نظر انداز کیا جاتا ہے۔ ب کی توقع معلوم کرو۔

۱۶۔ دو مہروں میں سے ایک مہرہ معمولی مکعب ہے اور دوسرا منتظم چہار سطحی مجسم۔ ایک شخص ان مہروں کو پھینکتا ہے بتاؤ کہ جو عدد اس طرح برآمد ہوں ان کے حاصل جمع کے ۵ سے کم نہ ہونے کا کیا احتمال ہے۔ چہار سطحی کی صورت میں سب سے نچلے رخ پر کا عدد شمار میں آتا ہے۔

۱۷۔ ایک تھیلی میں ه مالیت کا ایک سکہ ہے اور چند اور سکے ہیں جنکی مجموعی قیمت م ہے۔ ایک آدمی ایک ایک کر کے سکے نکالتا ہے حتیٰ کہ وہ ه نکال لیتا ہے، اس کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۱۵- ایک تھیلی میں ۶ ن ٹکٹ ہیں جن پر اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ..... ۶ ن - ۱ لکھے ہوئے ہیں ان میں سے تین ٹکٹ نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے مجموعہ کا ۶ ن کے مساوی ہونے کا احتمال یہ ہے

$$\frac{۳ ن}{(۶ ن - ۱)(۶ ن - ۲)}$$

مقلوب احتمال

۴۶۷- جن صورتوں پر اب تک ہم نے غور کیا ہے اِن میں ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ وہ اسباب جو کسی واقعہ کا موجب ہوتے ہیں اُن کے متعلق ہمارے معلومات اس قسم کے ہیں کہ ہم اُن سے واقعۂ مذکور کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کرسکتے ہیں۔ اب ہم اس سے مختلف نوعیت کے مسائل پر بحث کریں گے۔ مثلاً اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ کوئی خاص واقعہ کئی اسباب میں سے کسی ایک سبب کی وجہ سے پیدا ہوا ہے تو ہم یہ معلوم کرینگے کہ اِن سب اسباب میں سے ہر ایک سبب کے واقعہ مذکور پر منتج ہونے کا کیا احتمال ہے۔ نیز انہی اسباب کے زیر عمل مزید واقعات کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال دریافت کرینگے۔

۴۶۸- عام ترین صورت پر بحث کرنے سے پہلے ہم ایک عددی مثال حل کرینگے۔

فرض کرو کہ ہمارے پاس دو بٹوے ہیں۔ ایک میں ۵ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں۔ دوسرے میں ۳ پونڈ اور ایک شلنگ ہے۔ نیز فرض کرو کہ ایک پونڈ علی الحساب نکالا گیا ہے، اس پونڈ کے پہلے بٹوے میں سے اور دوسرے بٹوے میں سے نکالے جانے کے بالترتیب کیا احتمال ہیں۔

امتحانوں کی ایک بہت بڑی تعداد ع پر غور کرو، چونکہ واقعہ واقع

ہونے سے پہلے ہر ایک بٹوے کے لئے جانے کا مساوی امکان ہے،
ہم فرض کر سکتے ہیں کہ پہلے بٹوے کا انتخاب $\frac{ع}{۲}$ امتحانوں میں ہوگا
اور ان کے $\frac{۵}{۸}$ میں پونڈ نکالا جائے گا یعنی پہلے بٹوے میں

سے $\frac{۵}{۸} \times \frac{۱}{۲}$ ع یا $\frac{۵}{۱۶}$ ع مرتبہ پونڈ نکالا جائے گا۔

دوسرا بٹوا بھی $\frac{ع}{۲}$ امتحانوں میں منتخب کیا جا سکتا ہے اور

اور ان کے $\frac{۳}{۴}$ میں پونڈ نکلیگا۔ یعنی دوسرے بٹوے میں سے

$\frac{۳}{۸}$ ع مرتبہ پونڈ نکلیگا۔

اب ع بہت بڑا ہے لیکن سوائے اس کے یہ بالکل اختیاری
عدد ہے۔ یہ فرض کرو کہ ع = ۱۶ ن، پس ایک پونڈ پہلے
بٹوے میں سے ۵ ن مرتبہ اور دوسرے میں سے ۶ ن مرتبہ
نکالا جائے گا۔ یعنی اگر یہ کل ۱۱ ن مرتبہ نکالا جائے تو ۵ ن مرتبہ
پہلے بٹوے میں سے اور ۶ ن مرتبہ دوسرے بٹوے میں سے نکلیگا
پس اس امر کا احتمال کہ پونڈ پہلے بٹوے سے نکالا گیا ہے $\frac{۵}{۱۱}$
ہے اور دوسرے بٹوے سے نکالے جانے کا احتمال $\frac{۶}{۱۱}$ ہے۔

۴۶۹۔ یہ نہایت ضروری ہے کہ طالب علم دفعہ ماقبل کے مفروضہ
کی ماہیت سے پورا واقف ہو جائے۔ ہم ایک خاص مثال لیکر اس
کی مزید توضیح کرتے ہیں۔ اگر ایک متشاکل اور منتظم مکعب مہرہ کو ۶۰
مرتبہ پھینکا جائے تو یہ ممکن ہے کہ یکہ ٹھیک ۱۰ بار نکلے لیکن با ایں ہمہ
اس میں شبہ نہیں کہ اگر ہم انداختوں کی تعداد کو متواتر بڑھاتے جائیں
تو ان انداختوں کی تعداد جن میں یکہ برآمد ہوتا ہے اور کل انداختوں
کی تعداد کی باہمی نسبت بتدریج $\frac{۱}{۶}$ کے قریب قریب آتی جائے گی
کیونکہ یہ فرض کرنے کی کوئی وجہ نہیں ہے کہ کوئی خاص رخ باقی رخوں

کی نسبت زیادہ مرتبہ برآمد ہوگا۔ پس بالآخر ہر ایک رُخ کے برآمد ہونے کی نسبت تقریباً وہی ہونی چاہیئے۔

اوپر کی مثال ایک عام مسئلہ کی جسکو جیمز برنالی نے دریافت کیا تھا ایک خاص صورت ہے۔ موخرالذکر مسئلہ اپنے موجد کی وفات کے ۸ سال بعد ۱۷۱۳ء میں کتاب آرس کان جکٹنڈی میں طبع ہوا تھا۔ برنالی کے مسئلہ کا دعوےٰ یہ ہے۔

اگر ایک واحد امتحان میں ایک واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال ق ہو تو امتحانوں کی تعداد کو لاانتہا بڑھا دینے سے یہ امر یقینی ہو جاتا ہے کہ کامیابیوں کی تعداد کو کل امتحانوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ق ہوگی۔ بالفاظ دیگر اگر امتحانوں کی تعداد ع ہو تو کامیابیوں کی تعداد ق ع ہوگی۔

ملاحظہ ہو ٹاڈہنٹر کی تاریخ احتمال (ہسٹری آف پروبے بلی ٹی) باب ہفتم۔ برنالی کے اس مسئلے کا ثبوت انسائیکلوپیڈیا برٹانیکا میں احتمال (پروبے بلی ٹی) کے مضمون میں دیا ہوا ہے۔

۴۰۷۔ ایک مشاہدہ شدہ واقعہ کئی غیر متعلق اسباب میں سے کسی ایک سبب سے واقع ہوا ہے۔ کسی ایک مخصوص سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

فرض کرو کہ کل اسباب ن ہیں اور واقعہ کے واقع ہونے سے قبل ان اسباب کی موجودگی کے احتمال بالترتیب ق، ق، ق ... ق دریافت کیے گئے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ جب ر، واں سبب موجود ہو تو اس کی بناء پر واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال ق ہے۔ واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کے بعد ر، ویں سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال دریافت کرنا مقصود ہے۔

امتحانوں کی کسی بہت بڑی تعداد ع پر غور کرو۔ تب پہلا سبب ان میں سے ق ع میں موجود ہوگا اور اس تعداد میں

$ق'_1 ق_1 ع$ میں واقعۂ مذکور واقع ہوگا۔ اسی طرح سے $ق'_2 ق_2 ع$ امتحانوں میں واقعۂ مذکور دوسرے سبب کی وجہ سے واقع ہوگا اور اسی طرح تا باقی ہر ایک سبب کے لئے۔ پس اُن امتحانوں کی تعداد جن میں واقعہ واقع ہوگا۔

$$(ق'_1 ق_1 + ق'_2 ق_2 + \ldots\ldots + ق'_ن ق_ن)\, ع \quad یا \quad ع\, \Sigma(ق'ق)$$

ہے۔ نیز اُن امتحانوں کی تعداد جن میں واقعۂ مذکور ر ویں سبب کی وجہ سے واقع ہوتا ہے $ق'_ر ق_ر ع$ ہے، پس واقعہ کے وقوع پذیر ہو جانے کے بعد ر ویں سبب کے اصلی سبب یعنی واقعۂ مذکور کا موجب ہونے کا احتمال

$$ق'_ر ق_ر ع \div ع\, \Sigma(ق'ق)$$

ہے، پس ر ویں سبب سے واقعۂ مذکور کے وقوع کا احتمال

$$\frac{ق'_ر ق_ر}{\Sigma ق'ق} \text{ ہے۔}$$

۱۷۴۔ یہ نہایت ضروری ہے کہ کسی واقعہ کے وقوع سے قبل متعدد اسباب کی موجودگی کے احتمال اور وقوع کے بعد کسی سبب کے اصلی سبب ہونے کے احتمال میں بخوبی تمیز کیا جائے۔ اول الذکر کو بالعموم احتمال مقدم سے موسوم کرتے ہیں اور $ق_1$، $ق_2$، $ق_3$، ......، $ق_ن$ سے تعبیر کرتے ہیں، موخرالذکر کو احتمال موخر کہتے ہیں۔ اگر اِن کو $ف_1$، $ف_2$، $ف_3$ ..... $ف_ن$ سے تعبیر کیا جائے تو ہم ابھی ثابت کر چکے ہیں کہ

$$ف_ر = \frac{ق'_ر ق_ر}{\Sigma(ق'ق)}$$

جہاں $ق'_ر$، ر ویں سبب کی موجودگی کے مفروضہ کی بنا پر واقعۂ مذکور کے وقوع کے احتمال کو ظاہر کرتا ہے۔

اس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ ح ف = ۱، اور یہ امر ویسے ہی صاف عیاں ہے کیونکہ واقعہ ان اسباب میں سے کسی ایک اور صرف ایک ہی سبب سے ظہور پذیر ہوا ہے۔

اب ہم دفعۂ ماقبل کے مسئلہ کا ایک اور ثبوت ذیل میں درج کرتے ہیں جو دفعہ ۴۶۹ کے اصول پر مبنی نہیں ہے۔

۴۷۲۔ ایک مشاہدہ کردہ واقعہ چند غیر متعلق اسباب میں سے کسی ایک کی وجہ سے واقع ہوا ہے۔ کسی ایک مخصوص سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

فرض کرو کہ کل ن اسباب ہیں۔ اور واقعہ کے قبل ان اسباب کی موجودگی کے احتمال بالترتیب $ق_۱$، $ق_۲$، $ق_۳$ ..... $ق_ن$ ہیں نیز فرض کرو کہ جب ر واں سبب موجود ہو تو واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال $ق'_ر$ ہے، تب ر ویں سبب سے واقع ہونے کا احتمال مقدم $ق_ر ق'_ر$ ہے۔

فرض کرو کہ ر ویں سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال موخر $ف_ر$ ہے، تب ر ویں سبب کے اصلی سبب ہونے کا احتمال یعنی $ف_ر$ متناسب ہے اس احتمال کے جو اس بنا پر محسوب کیا جائے کہ یہ سبب موجود ہے اور اس کی موجودگی میں واقعۂ مذکور کے واقع ہونے کے احتمال یہ ہے، اس لئے

$$\frac{ف_۱}{ق_۱ ق'_۱} = \frac{ف_۲}{ق_۲ ق'_۲} = \dots = \frac{ف_ن}{ق_ن ق'_ن} = \frac{ح(ف)}{ح\, ق ق'} = \frac{۱}{ح(ق ق')}$$

$$\therefore ف_ر = \frac{ق_ر ق'_ر}{ح(ق ق')}$$

اس سے ظاہر ہے کہ موجودہ طرز کے سوالوں میں سب سے پہلے حاصل ضرب $ق_{ر}\,ق_{ر}'$ کی درست قیمت نکال لینی چاہئے۔ بہت سی صورتوں میں $ق_{۱}$، $ق_{۲}$، $ق_{۳}$ ...... سب مساوی ہوتے ہیں جس سے عمل بہت مختصر ہو جاتا ہے۔

مثال۔ تین تھیلوں میں سے ہر ایک میں ۵ سفید گیند ہیں اور ۲ سیاہ گیند اور دو اور تھیلیاں ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۱ سفید گیند ہے اور ۴ سیاہ۔ اگر ایک سیاہ گیند نکلے تو اس گیند کے تھیلیوں کے اول جُٹ میں سے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۵ تھیلیوں میں سے تین تھیلیاں پہلے جُٹ کی ہیں اور دو دوسرے کی۔ اس لئے

$$ق_{۱} = \frac{۳}{۵} \text{ اور } ق_{۲} = \frac{۲}{۵}$$

اگر پہلے جُٹ میں سے ایک تھیلی لی جائے تو اس میں سے سیاہ گیند کے نکلنے کا احتمال $\frac{۲}{۷}$ ہے، اگر دوسرے جُٹ میں سے ایک تھیلی لیجائے تو اس میں سے سیاہ گیند نکلنے کا احتمال $\frac{۴}{۵}$ ہے

$$\text{پس } ق_{۱}' = \frac{۲}{۷} \text{ اور } ق_{۲}' = \frac{۴}{۵}$$

$$\therefore ق_{۱}\,ق_{۱}' = \frac{۶}{۳۵} \text{ اور } ق_{۲}\,ق_{۲}' = \frac{۸}{۲۵}$$

پس گیند مذکور کے پہلے جُٹ میں نکلنے کا احتمال

$$\frac{۶}{۳۵} \div \left(\frac{۶}{۳۵} + \frac{۸}{۲۵}\right) = \frac{۱۵}{۴۳} \text{ ہے۔}$$

۴۷۳۔ جب کوئی خاص واقعہ مشاہدہ کے تحت میں آجائے تو ہم نے دیکھا کہ دفعہ ۴۷۲ کی مدد سے کسی خاص سبب کے اس واقعہ پر منتج ہونے کا احتمال دریافت ہو سکتا ہے۔ اس کے بعد

ہم دوسرے امتحان میں واقعۂ مذکور کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کرسکتے ہیں یا کسی اور واقعہ کے وقوع کا احتمال محسوب کرسکتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ ر ویں سبب کی موجودگی میں واقعۂ مذکور کے وقوع کا احتمال $ق'_ر$ ہے اور ر ویں سبب کے اصلی سبب ہونیکا احتمال $ف_ر$ ہے، پس دوسرے امتحان میں ر ویں سبب کی بناپر واقعۂ مذکور کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال $ق'_ر ف_ر$ ہے لہذا اسباب زیر بحث میں سے کسی ایک سبب سے واقعۂ مذکور کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال ح $(ق'_ر ف_ر)$ ہے۔

مثال۔ ایک بٹوے میں ۴ سکے ہیں جو یا پونڈ ہیں یا شلنگ، ۲ سکوں کو نکال کر دیکھا گیا ہے یہ دونوں شلنگ ہیں۔ ان کو واپس رکھ دیا گیا ہے۔ ایک اور امتحان سے پونڈ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔ اس سوال کے دو مفہوم ہو سکتے ہیں، ان دونوں پر ہم جداگانہ بحث کرینگے۔

۱۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ شلنگوں کی کسی تعداد کے لئے جانے کا مساوی امکان ہے تو ذیل کے تین مفروضے حاصل ہوتے ہیں۔
(۱) ممکن ہے کہ تمام سکے شلنگ ہوں، (۲) تین سکے شلنگ ہوں (۳) دو سکے شلنگ ہوں۔

یہاں $ق_1 = ق_2 = ق_3$

نیز $ق'_1 = 1$، $ق'_2 = \frac{1}{2}$، $ق'_3 = \frac{1}{6}$

پس پہلے مفروضہ کا احتمال $= 1 \div (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \frac{6}{10} = ف_1$

دوسرے مفروضہ کا احتمال $= \frac{1}{2} \div (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \frac{3}{10} = ف_2$

تیسرے مفروضہ کا احتمال $= \frac{1}{6} \div (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \frac{1}{10} = ف_3$

پس ایک اور امتحان سے پونڈ نکلنے کا احتمال $= (\text{ف}_1 \times 0) + (\text{ف}_2 \times \frac{1}{4}) + (\text{ف}_3 \times \frac{2}{4})$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

۲۔ اگر ہر ایک سکے کے پونڈ یا شلنگ ہونے کا مساوی امکان ہے تو $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^4$ کے پھیلاؤ کی رقوم سے ہم دیکھتے ہیں کہ چار شلنگوں کا احتمال $\frac{1}{16}$ ہے، تین شلنگوں کا $\frac{4}{16}$ یعنی $\frac{1}{4}$ ہے، دو شلنگوں کا احتمال $\frac{6}{16}$ یعنی $\frac{3}{8}$ ہے۔

پس $\text{ق}_1 = \frac{1}{16}$ ، $\text{ق}_2 = \frac{4}{16}$ ، $\text{ق}_3 = \frac{6}{16}$

نیز $\text{ق}'_1 = 1$ ، $\text{ق}'_2 = \frac{1}{2}$ ، $\text{ق}'_3 = \frac{1}{6}$

لہذا $\frac{\text{ف}_1}{6} = \frac{\text{ف}_2}{12} = \frac{\text{ف}_3}{6} = \frac{\text{ف}_1 + \text{ف}_2 + \text{ف}_3}{24} = \frac{1}{24}$

پس ایک اور امتحان میں پونڈ نکلنے کا احتمال

$$= (\text{ف}_1 \times 0) + (\text{ف}_2 \times \frac{1}{4}) + (\text{ف}_3 \times \frac{2}{4}) = \frac{1}{8} + \frac{2}{16} = \frac{1}{4}$$

اب ہم یہ بتائینگے کہ اگر ہمیں چند گواہوں کے متعلق یہ معلوم ہو کہ وہ کس درجہ قابل اعتماد ہیں تو ہم احتمال کے نظریہ کی مدد سے کس طرح اُن کی شہادتوں کی صداقت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔ ہم یہاں تسلیم کرینگے کہ ہر ایک گواہ جو شہادت دیتا ہے اُسکو اپنے ذہن میں بالکل برحق اور سچی سمجھتا ہے خواہ اُس کا بیان تجربہ، مشاہدہ یا استدلال پر مبنی ہو۔ پس ہر ایک غلطی یا دروغ گوئی کو اسکی دانست کی غلطی پر محمول کرنا چاہئیے نہ کہ بالارادہ فریب کاری پر۔

جس قسم کے مسائل پر اب ہم بحث کرینگے وہ علمی اور عقلی مہارت کے لئے نہایت مفید اور سود مند ہیں۔ اگرچہ اِن نتائج سے کوئی خاص فائدہ حاصل نہیں ہوتا تاہم یہ سب عام عقل وفہم کے عین مطابق ہیں۔

۴۷۵۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کسی شخص کے سچ بولنے کا احتمال ق ہے تو اس سے ہماری مراد یہ ہوتی ہے کہ اگر اس شخص کی شہادتوں کی ایک کثیر تعداد کا معائنہ کیا جائے تو اُن شہادتوں کی نسبت جو سچی ثابت ہوں شہادتوں کی کل تعداد کے ساتھ ق ہے۔

۴۷۶۔ دو گواہ جن کو ایک دوسرے سے کچھ تعلق نہیں ہے اور جن کے سچ بولنے کے احتمال بالترتیب ق اور قَ ہیں ایک ہی شہادت پیش کرتے ہیں۔ بتاؤ کہ شہادت کے سچے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

یہاں مشاہدہ شدہ واقعہ یہ ہے کہ ا اور ب دونوں ایک ہی شہادت دیتے ہیں۔ واقعہ سے قبل ۴ مفروضے ہیں، کیونکہ ممکن ہے کہ (۱) ا اور ب دونوں سچ بولیں، (۲) ا سچ بولے اور ب جھوٹ بولے (۳) ا جھوٹ بولے اور ب سچ بولے (۴) ا اور ب دونوں جھوٹ بولیں۔ اِن چاروں مفروضوں کے احتمال بالترتیب

ق قَ ، ق(ا-قَ)، قَ(ا-ق)، (ا-ق)(ا-قَ)

ہیں۔ پس مشاہدہ شدہ واقعہ کے بعد جس میں ا اور ب دونوں ایک ہی شہادت دیتے ہیں شہادت کے سچا ہونے کے احتمال کو شہادت کے جھوٹا ہونے کے احتمال کے ساتھ نسبت ق قَ : (ا-ق)(ا-قَ) ہے۔ یعنی شہادت کے سچا ہونیکا

احتمال $\dfrac{ق\,ق'}{ق\,ق' + (1-ق)(1-ق')}$ ہے۔

اسی طرح سے اگر ایک تیسرا شخص وہی شہادت دے اور اسکے سچ بولنے کا احتمال ق'' ہو تو شہادت کے سچا ہونے کا احتمال

$$\frac{ق\,ق'\,ق''}{ق\,ق'\,ق'' + (1-ق)(1-ق')(1-ق'')}$$

ہے اور علیٰ ہذا القیاس گواہوں کی کسی تعداد کے لئے

۷۷۴۔ دفعۂ ماقبل میں ہم نے یہ فرض کرلیا ہے کہ ہمیں ا اور ب کے بیانات کے علاوہ واقعہ کے متعلق کوئی علم نہیں ہے اگر ہمارے پاس اِن بیانات کے علاوہ واقعۂ مذکورہ کی صداقت یا دروغ کے احتمال کو معلوم کرنے کے اور ذرائع بھی موجود ہوں تو مختلف مفروضات کے احتمال معلوم کرنے کے لئے اِن ذرائع کو بھی ملحوظ رکھنا چاہئے۔ مثلاً اگر ا اور ب ایک بیان میں متفق ہوں جسکا احتمال مقدم $ق_1$ ہو تو اُس بیان کی صداقت اور دروغ کے احتمال بالترتیب

$ق_1\,ق\,ق'$ اور $(1-ق_1)(1-ق)(1-ق')$ ہوں گے۔

مثال۔ ۱۲ ٹکٹوں کی ایک لاٹری میں دو انعام ہیں؛ ایک ۹ پونڈ کا اور دوسرا ۳ پونڈ کا۔ ا، ب اور ج جن کے سچ بولنے کے احتمال بالترتیب $\frac{1}{2}$، $\frac{2}{3}$ اور $\frac{3}{5}$ ہیں د کو جس کے پاس ایک ٹکٹ ہے نتیجہ سے اس طرح معلوم کرتے ہیں: ا اور ب کہتے ہیں کہ اُس نے ۹ پونڈ کا انعام جیتا ہے اور ج کہتا ہے کہ اُس نے ۳ پونڈ والا انعام جیتا ہے، د کی توقع محسوب کرو۔

تین صورتیں ممکن ہیں، (۱) د نے ۹ پونڈ والا انعام جیتا ہو (۲) ۳ پونڈ والا انعام جیتا ہو (۳) ا، ب اور ج تینوں نے جھوٹ

بولا ہو اور د نے کوئی انعام نہ جیتا ہو۔
اب دفعہ ۴۷۲ کے طریق کتابت کے موافق احتمال مقدم

$$ق_1 = \frac{1}{12}، \quad ق_2 = \frac{1}{12} \quad ق_3 = \frac{10}{12}$$

ہیں، نیز $ق'_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{30}$، $ق'_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{30}$

$$ق'_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{20}$$

$$\therefore \frac{ف_1}{4} = \frac{ف_2}{3} = \frac{ف_3}{20} = \frac{1}{27}$$

لہٰذا د کی توقع = ۹ پونڈ کا $\frac{4}{27}$ + ۳ پونڈ کا $\frac{3}{27}$

= ۱ پونڈ ۱۳ شلنگ ۴ پنس

۴۷۸۔ یہ بات قابل غور ہے کہ جو نتائج ہم نے دفعہ ۴۷۶ میں ثابت کئے ہیں ان میں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ بیان صرف دو طریقوں سے دیا جا سکتا ہے یعنی اگر سب گواہ متفق طور پر جھوٹ بولیں تو وہ سب ایک ہی جھوٹا بیان دینگے۔
اگر یہ صورت نہ ہو تو فرض کرو کہ ا اور ب دونوں کے ایک ہی جھوٹا بیان دینے کا احتمال ج ہے، تب بیان کے سچا ہونے کے احتمال کو اس کے جھوٹا ہونے کے احتمال کے ساتھ نسبت

$$ق ق' : ج (1 - ق) (1 - ق')$$ ہے

عام طور پر یہ ایک نہایت غیر اغلب امر ہے کہ دو غیر متعلق گواہ متفقہ طور پر ایک ہی جھوٹ بولیں۔ لہٰذا ج بالعموم بہت چھوٹا ہوتا ہے اور نیز جوں جوں گواہوں کی تعداد بڑھتی جائے ج بتدریج اور بھی کم ہوتا جاتا ہے۔ ان امور کا لحاظ رکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر

دو یا زیادہ غیر متعلق گواہ ایک ہی بیان پر متفق ہوں تو خواہ اُن گواہوں کا اعتماد بہت کم ہو تو بھی بیان مذکور کے سچا ہونے کا احتمال بڑھ جاتا ہے۔

مثال۔ ا کے ۴ بیانوں میں سے ۳ بیان سچے ہوتے ہیں اور ب کے ۱۰ میں سے ۷۔ یہ دونوں اس بات پر متفق ہیں کہ ایک تھیلی میں سے جسمیں مختلف رنگوں کے گیند ہیں ایک سفید گیند نکالا گیا ہے۔ اس بیان کے سچا ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

اس میں صرف دو مفروضے ہو سکتے ہیں، (۱) یہ متفقہ شہادت سچ ہے یا (۲) جھوٹ۔

یہاں $ق_1 = \frac{1}{6}$ ، $ق_2 = \frac{5}{6}$

$ق'_1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{10}$ ، $ق'_2 = \frac{1}{25} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{10}$

کیونکہ $ق'_2$ کی قیمت معلوم کرنے میں ہمیں اس کے احتمال کو ملحوظ رکھنا چاہیے کہ ا اور ب سفید رنگ کے گیند کو منتخب کریں جبکہ سفید گیند تھیلی سے نہ نکالا گیا ہو۔ یہ احتمال

$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ ہے۔

اب ان دو مفروضوں کے احتمالوں کی نسبت $ق_1 ق'_1 : ق_2 ق'_2$ یعنی ۳۵ : ۱ ہے۔
پس بیان مذکور کے سچا ہونے کا احتمال $\frac{35}{36}$ ہے۔

۴۷۹۔ جن صورتوں پر ہم نے بحث کی ہے وہ سب کی سب ہمعصر شہادت کی سچائی کے احتمال کے متعلق تھیں۔ منقولی شہادت کی ایک مثال ذیل میں درج کی جاتی ہے۔

ا کہتا ہے کہ ایک واقعہ واقع ہوا اور اس واقعہ کے وقوع یا عدم وقوع کی اطلاع اس نے ب سے پائی ہے، بتاؤ کہ واقعہ کے وقوع کا

کیا احتمال ہے۔
واقعۂ مذکور واقع ہوا ہے (۱) اگر ان دونوں نے سچ بولا ہے (۲) یا اگر ان دونوں نے جھوٹ بولا ہے اور واقعہ نہیں ہوا اگر ان میں سے ایک نے سچ بولا ہے اور دوسرے نے جھوٹ۔
فرض کرو کہ ا اور ب کے سچ بولنے کے احتمال ق اور قَ ہیں تب واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال

ققَ + (۱ - ق) (۱ - قَ)

ہے اور واقعہ کے واقع نہ ہونے کا احتمال

ق (۱ - قَ) + قَ (۱ - ق)

ہے۔
۴۰۸۔ دفعۂ ماقبل کے مسئلہ کا جو حل عام کتابوں میں دیا جاتا ہے وہی یہاں درج کیا گیا ہے درحقیقت ایسا کرنا اعتراض سے خالی نہیں کیونکہ یہ کہنا کہ اگر ا اور ب دونوں نے سچ نہیں بولا تو واقعہ مذکور واقع ہوا ہے صرف اسی صورت میں درست ہو سکتا ہے جبکہ بیان صرف دو طریقوں سے دیا جا سکے نیز یہ امر بھی کہ ا نے ب سے اطلاع پائی ہے پورے طور پر درست تصور نہیں کیا جا سکتا کیونکہ اس کی صداقت کا دارومدار بھی ا کے بیان پر ہی ہے۔
اس سوال کو جو مختلف معنی دئے جا سکتے ہیں اور ان معنوں کے متناظر مسئلہ مذکور کے مختلف حلوں پر ایجوکیشنل ٹائمز ریپرنٹ جلد ۲۷، ۳۲ پر بسیط اور مدلل بحث کی گئی ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (د)

۱۔ ایک تھیلی میں ۴ گیند ہیں لیکن یہ معلوم نہیں کہ وہ کس رنگ کے ہیں۔ ایک گیند کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ وہ سفید ہے۔ سب گیندوں کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۲۔ ایک تھیلی میں نامعلوم رنگوں کے چھ گیند ہیں، تین گیندوں کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ ان تینوں کا رنگ سیاہ ہے۔ تھیلی میں اور کسی سیاہ گیند کے باقی نہ رہنے کا کیا احتمال ہے۔

۳۔ ایک کتاب میں ایک لفظ کا کچھ حصہ چھپائی میں حذف ہو گیا ہے، آخر کے دو حروف و ن پڑھے جا سکتے ہیں، یہ معلوم ہے کہ یا یہ لفظ "صورتوں" ہے یا "مصاحبوں"۔ بتاؤ کہ اس لفظ کے "صورتوں" ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک کھیل کے شروع ہونے سے قبل تین کھلاڑیوں ا، ب، ج کی کامیابیوں کے احتمال بالترتیب ۵، ۳، ۲ کے متناسب ہیں۔ لیکن اثنائے کھیل میں کسی حادثہ کی وجہ سے ا کا احتمال پہلے احتمال کا $\frac{1}{2}$ رہ جاتا ہے۔ اب ب اور ج کے الگ الگ کیا احتمال ہیں۔

۵۔ ایک بٹوے میں نامعلوم قیمت کے ن سکے ہیں، ایک سکہ نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ پونڈ ہے، تھیلی میں صرف اسی ایک سکہ کے پونڈ ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۶۔ ایک آدمی کے پاس ۱۰ شلنگ ہیں اور ان میں سے ایک پر دونوں طرف مورتیں ہیں۔ وہ آدمی علی الحساب ایک شلنگ لیکر اسکو ۵ دفعہ اچھالتا ہے اور پانچوں دفعہ مورت نکلتی ہے، بتاؤ کہ اس شلنگ کے دو مورتوں والے شلنگ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۷۔ ایک تھیلی میں نامعلوم رنگوں کے ۵ گیند ہیں۔ دو مرتبہ ایک گیند نکالا گیا ہے اور واپس رکھدیا گیا ہے اور دونوں مرتبہ یہ گیند سرخ نکلا ہے۔ اب اگر ایک ہی مرتبہ دو گیند نکالے جائیں تو ان دونوں گیندوں کے سرخ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۸۔ ایک بٹوے میں ۵ سکے ہیں اور ان میں سے ہر ایک یا نصف شلنگ یا شلنگ ہے۔ دو کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں شلنگ ہیں۔ باقی سکوں کی ظنی قیمت معلوم کرو۔

۹۔ ایک پھرے کو تین بار پھینکا گیا ہے اور جو تین عدد نکلے ہیں ان کا حاصل جمع ۱۵ ہے۔ پہلی اداخت میں جو عدد نکلا تھا اس کے ۴ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۰۔ د کے چار بیانوں میں سے تین بیان سچ ہوتے ہیں اور ب کے چھ میں سے پانچ، ایک ہی بیان کے اظہار میں دونوں کے ایک دوسرے کی تردید کرنے کا کیا احتمال ہے؟

۱۱۔ ا کی تین باتوں میں سے ۲ باتیں سچی نکلتی ہیں اور ب کی پانچ میں سے چار، وہ دونوں اس بیان میں متفق ہیں کہ ایک تھیلی میں سے جس میں مختلف رنگوں کے چھ گیند ہیں ایک سرخ گیند نکالا گیا ہے۔ اس بیان کے سچے ہونے کا احتمال محسوب کرو۔

۱۲۔ ۵۲ پتوں کی ایک تاش میں سے ایک پتہ گم ہو گیا ہے، باقی تاش میں سے دو پتے نکالے گئے ہیں اور یہ دونوں حکم کے پتے ہیں، گم شدہ پتے کے حکم کا پتا ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۳۔ ایک لاٹری میں [illegible] ٹکٹ ہیں اور ۵ پونڈ اور ۱ پونڈ کے دو انعام ہیں۔ ب، ا کو جس کے پاس ایک ٹکٹ ہے اطلاع دیتا ہے کہ اس نے ۵ پونڈ کا انعام جیتا ہے، ج، ا کو اطلاع دیتا ہے کہ اس نے ایک پونڈ کا انعام جیتا ہے، اگر ب کا اعتماد $\frac{۲}{۳}$ ہو اور ج کا $\frac{۳}{۴}$ تو ا کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۱۴۔ ایک بٹوے میں ۴ سکے ہیں اور ان میں سے دو کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں پونڈ ہیں، بتاؤ کہ (۱) سب سکوں کے پونڈ ہونے کا اور (۲) اگر سکے واپس رکھ دئے جائیں تو پھر نکالنے پر پونڈ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۵۔ ف، ق کے ساتھ ۸ پونڈ : ۱۲۰ پونڈ کی شرط لگاتا ہے کہ تین گھڑ دوڑوں میں تین گھوڑے ا، ب اور ج جیتینگے جن کے خلاف شرطیں بالترتیب ۳ : ۲، ۴ : ۱، ۲ : ۱ ہیں۔ پہلی گھڑ دوڑ میں

د جیتتا ہے اور یہ بھی معلوم ہے کہ دوسری گھڑ دوڑ میں ا یا ب جیتتا ہے یا کوئی اور گھوڑا د جیتے خلاف توقع ۲ : ۱ ہے؛ ف کی نوٹ کی قیمت معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک تھیلی میں ن گیند ہیں جو یا سیاہ ہیں یا سفید۔ ہر قسم کے گیندوں کے سب عددوں کا امکان مساوی ہے۔ ایک گیند نکال کر دیکھا گیا ہے کہ وہ سفید ہے، اس کو واپس رکھ دیا گیا ہے پھر ایک گیند نکالا گیا ہے یہ بھی سفید ہے۔ اگر اس کو بھی واپس رکھ دیا جائے تو ثابت کرو کہ اب جو گیند نکلیگا اس کے سیاہ ہونیکا احتمال $\frac{۱}{۲}(ن-۱)(۲ن+۱)^{-۱}$ ہے۔

۱۷۔ م ن سکے م بٹوؤں میں تقسیم کئے گئے ہیں یعنی ہر بٹوے میں ن سکے دئے گئے ہیں۔ (۱) ن مخصوص سکوں کے ایک ہی بٹوے میں ہونے کا کیا احتمال ہے (۲) اگر ر بٹوؤں کو دیکھا گیا ہو اور ان میں سے کسی میں سے بھی ان مخصوص سکوں میں سے کوئی سکہ برآمد نہ ہو تو یہ احتمال کیا ہو جائیگا۔

۱۸۔ ا اور ب دو طلبہ فن ریاضی میں کمزور ہیں اور ان کے ایک سوال کو حل کرنے کے احتمال جداگانہ $\frac{۱}{۸}$ اور $\frac{۱}{۱۲}$ ہیں، دونوں کا جواب ایک ہی ہے۔ اگر ان کے ایک ہی غلطی کے مرتکب ہونے کے خلاف امکان ۱۰۰۰ : ۱ ہو تو جواب کے درست ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۱۹۔ ۱۰ گواہ ایسے ہیں کہ ہر ایک کے چھ بیانوں میں سے ایک جھوٹا ہوتا ہے، وہ سب اس بات پر متفق ہیں کہ ایک واقعہ ہوا۔ ثابت کرو کہ اس بیان کے موافق امکان ۵ : ۱ ہے جبکہ احتمال مقدم ایک چھوٹی مقدار $\frac{۱}{۱+۵}$ کے مساوی ہے۔

مقامی احتمال۔ ہندسی طریقے

۴۸۱۔ احتمال کے مسائل کے حل کرنے کے لئے علم ہندسہ سے مدد لینے میں بالعموم احصائے تکملات سے کام لینا پڑتا ہے۔ تاہم بعض آسان سوالات ایسے بھی ہیں جو محض ابتدائی ہندسہ کی مدد سے حل ہو سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ دو مستقیم خطوں میں سے ہر ایک کا طول ل ہے، ان دونوں میں سے علی الحساب کچھ حصہ کاٹ کر الگ کر دیا گیا ہے۔ باقی طولوں کے حاصل جمع کے ل سے کم ہونے کا کیا احتمال ہے۔

دونوں خطوں کو ایک دوسرے کے متوازی رکھو اور فرض کرو کہ قطع کرنے کے بعد دائیں جانب کے حصے خارج کر دئے گئے ہیں۔ تب اوپر کا سوال ذیل کے سوال کے ہم معنی ہے: دائیں جانب کے حصوں کے حاصل جمع کا بائیں طرف کے حصوں کے حاصل جمع سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے۔ ظاہر ہے کہ پہلے حاصل جمع کے دوسرے حاصل جمع سے بڑے یا چھوٹے ہونے کے امکان مساوی ہیں۔ پس مطلوبہ احتمال $\frac{1}{2}$ ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر یہ معلوم ہو کہ دونوں خطوں میں سے کسی ایک کا طول ل سے بڑا نہیں ہے تو ان کے حاصل جمع کے ل سے بڑا نہ ہونے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے۔

مثال ۲۔ اگر تین خط علی الحساب طولوں کے لئے جائیں تو بتاؤ کہ ان سے ایک مثلث بن سکنے کا امکان مثلث نہ بن سکنے کے امکان کے مساوی ہے۔

ان تین خطوں میں سے ایک نہ ایک خط لازماً باقی دو خطوں کے مساوی ہو گا یا ان دونوں سے بڑا ہو گا۔ فرض کرو اس خط کا طول ل ہے، تب باقی دو خطوں کی بابتہ ہم صرف یہ کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کا طول ۔ اور ل کے درمیان واقع ہے۔ اب ہمیں معلوم ہے (دیکھو نتیجہ صریح مثال ۱) کہ اگر دو

خطوں کے طول ۰ اور ل کے درمیان ہوں تو ان کے حاصل جمع کے ل سے بڑے ہونے کا احتمال ل سے بڑے نہ ہونے کے احتمال کے مساوی ہوتا ہے جس سے جواب مطلوبہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۳۔ ایک دائرہ کے تین مماس علی الحساب کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ دائرہ مذکور کے ان مماسوں کا اندرونی دائرہ ہونے کے خلاف امکان ۳ : ۱ ہے۔

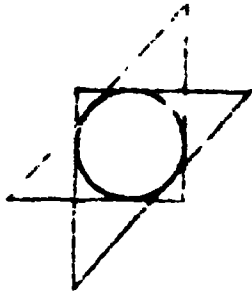
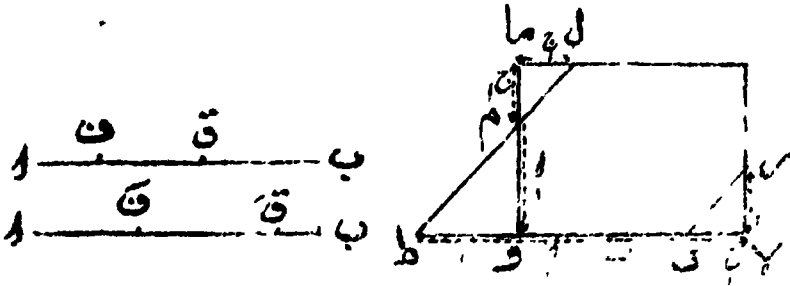
ف

ق | ر ر

دائرہ کی سطح مستوی میں تین خط ف، ق، ر علی الحساب کھینچو اور ان خطوں کے متوازی دائرہ کے ۶ مماس کھینچو۔ ظاہر ہے کہ اس طرح سے جو ۸ مثلث بنتے ہیں ان میں سے چھ کے لئے دائرہ مذکورہ جانبی دائرہ ہے اور ۲ کیلئے اندرونی دائرہ اور یہ ہر حالت میں درست ہے خواہ ف، ق، ر کی سمتیں کچھ ہی ہوں۔ پس مطلوبہ نتیجہ صاف ظاہر ہے۔

۴۸۲۔ احتمال کے سوالات بعض اوقات ہندسہ تحلیلی کی مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔

مثال۔ ایک سلاخ یہ ہے جس کا طول $ا_1$ + $ب_1$ + ج ہے دو طول $ا_1$ اور $ب_1$ علی الحساب ناپ لئے گئے ہیں۔ اس امر کا احتمال معلوم کرو کہ ایک طول کا کوئی نقطہ دوسرے طول کے کسی نقطہ پر منطبق نہ ہو۔

فرض کرو کہ خطِ مذکور ا ب ہے،

نیز فرض کرو کہ ا ف = لا، ف ق = ا، اور ا، ف سے ب کی سمت میں ناپا گیا ہے۔ پس لا، ب + ج، کم سے ہوگا،
نیز فرض کرو کہ ا فَ = ما، فَ قَ = ب اور فَ قَ کو ب سے ب کی سمت میں ناپا گیا ہے، تب ما کم ہوگا ا + ج سے۔
اب موافق صورتوں میں ا فَ > ا ق یا ا ف > ا قَ
لہٰذا ما > ا + لا یا لا > ب + ما .... (۱)

لیکن سب ممکن صورتوں میں لا > ۰ اور < ب + ج
ما > ۰ اور < ا + ج ... (۲)

دو علی القوائم محاور لو، و لا کو ب + ج کے مساوی بناؤ اور و ما کو ا + ج کے مساوی بناؤ۔
خطوط ما = ا + لا اور لا = ب + ما کھینچو اور ان کو بالترتیب ط م ل اور ک ر سے تعبیر کرو۔
تب ما م اور ک لا دونوں ج کے مساوی ہیں اور و م، و ط دونوں ا کے مساوی ہیں۔
شرائط (۱) صرف مثلثات م ما ل اور ک لا ر کے نقطوں سے

پوری ہوتی ہیں، اور شرائط (۲) مستطیل و ل × و ما کے اندر کے نقطوں سے پوری ہوتی ہیں ۔

$$\therefore \text{مطلوبہ احتمال} = \frac{ج_{1}^{2}}{(ا_{1} + ج_{1})(ب + ج_{1})}$$

۴۸۳ ۔ اب ہم چند متفرق مثالیں درج کرکے اس باب کو ختم کرتے ہیں ۔

مثال ۱ ۔ ایک صندوق م مساوی خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ان میں ن گیند علی الحساب ڈالے گئے ہیں ۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ ف خانوں میں سے ہر ایک میں ا گیند ہوں، ق خانوں میں سے ہر ایک میں ب گیند، ر خانوں میں سے ہر ایک میں ج گیند ہوں اور علیٰ ہذا القیاس، جہاں

$$ف ا + ق ب + ر ج + \ldots\ldots = ن$$

چونکہ ن گیندوں میں سے کوئی گیند م خانوں میں سے کسی خانے میں پڑ سکتا ہے اس لئے کل صورتوں کی تعداد جو واقع ہو سکتی ہیں $م^{ن}$ ہے اور ان سب کا امکان مساوی ہے ۔ موافق صورتوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ہمیں یہ دیکھنا چاہیے کہ کتنے طریقوں سے ن گیند ف، ق، ر..... ایسے جٹوں میں تقسیم ہو سکتے ہیں جن میں بالترتیب ا، ب، ج، ..... گیند ہوں
پہلے کوئی س خانے منتخب کرو جہاں س، ف + ق + ر + ... کو تعبیر کرتا ہے، ان مختلف طریقوں کی تعداد جن سے یہ عمل کیا جا سکتا ہے

$$\frac{\lfloor م}{\lfloor س \; \lfloor م - س} \ldots\ldots (1) \text{ ہے ۔}$$

پھر ان س خانوں کو ایسے جٹوں میں تقسیم کرو کہ ان میں خانوں

کی تعداد بالترتیب ف، ق، ر، .... ہو، دفعہ ۱۴ کی رُو سے جن مختلف طریقوں سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے اِن کی تعداد

$$\frac{|س}{|ف |ف |ق |ر ....} \text{ ہے} \quad ..... (۲)$$

آخر کار ن گیندوں کو اِن خانوں میں اس طرح تقسیم کرو کہ ف خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانے میں ا گیند ہوں، ق خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانہ میں ب گیند ہوں، ر خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانہ میں ج، وغیرہ وغیرہ، اُن مختلف طریقوں کی تعداد جن سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{|ن}{(|ا)^ف (|ب)^ق (|ج)^ر ....} \text{ ہے} \quad ..... (۳)$$

پس اُن طریقوں کی تعداد جن سے حسب شرائط مذکورۂ بالا یہ گیند ترتیب دیئے جا سکتے ہیں جملا بیتہ (۱)، (۲) اور (۳) کے حاصل ضرب سے تعبیر ہوتی ہے۔ لہٰذا مطلوبہ احتمال یہ ہے:-

$$\frac{|م \; |ن}{م^ن (|ا)^ف (|ب)^ق (|ج)^ر .... |ف |ق |ر .... |م-ف-ق-ر....}$$

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ن گیند ہیں۔ یکے بعد دیگرے کئی مرتبہ ایک ایک گیند نکالا گیا ہے اور ہر دفعہ سفید گیند برآمد ہوتا ہے، اگر (۱) گیند نکال کر ہر دفعہ واپس رکھے جائیں (۲) اگر واپس نہ رکھے جائیں تو بتاؤ کہ پھر ایک گیند نکالنے پر سفید گیند نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

(۱) مشاہدہ کردہ واقعہ سے قبل مساوی امکان کے (ن + ۱) مفروضات ہیں کیونکہ تھیلی میں ۰، ۱، ۲، ۳، ....، ن سفید گیند ہو سکتے ہیں۔

لہٰذا دفعہ ۱۷۴ کے طریقِ کتابت کے موافق

$$\text{ق}_{\text{ب}} = \text{ق}_{۱} = \text{ق}_{۲} = \text{ق}_{۳} = \ldots = \text{ق}_{\text{ن}}$$

اور $\text{ق}'_{\text{ب}} = ۰$، $\text{ق}'_{۱} = \left(\frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ک}}$، $\text{ق}'_{۲} = \left(\frac{۲}{\text{ن}}\right)^{\text{ک}}$، $\text{ق}'_{۳} = \left(\frac{۳}{\text{ن}}\right)^{\text{ک}}$ ....

..... $\text{ق}'_{\text{ن}} = \left(\frac{\text{ن}}{\text{ن}}\right)^{\text{ک}}$

پس مشاہدہ کردہ واقعہ کے بعد

$$\text{ف}_{\text{ر}} = \frac{\text{ر}^{\text{ک}}}{۱^{\text{ک}} + ۲^{\text{ک}} + ۳^{\text{ک}} + \ldots + \text{ن}^{\text{ک}}}$$

اب اگلی مرتبہ نکالنے سے سفید گیند کے نکلنے کا احتمال $= \sum \frac{\text{ر}}{\text{ن}} \text{ف}_{\text{ر}}$

پس مطلوبہ احتمال $= \frac{۱}{\text{ن}} \cdot \frac{۱^{\text{ک}+۱} + ۲^{\text{ک}+۱} + ۳^{\text{ک}+۱} + \ldots + \text{ن}^{\text{ک}+۱}}{۱^{\text{ک}} + ۲^{\text{ک}} + ۳^{\text{ک}} + \ldots + \text{ن}^{\text{ک}}}$

اور شمار کنندہ اور نسب نما کی قیمتیں دفعہ ۴۰۵ کی رُو سے نکل سکتی ہیں
اگر خاص صورت میں ک = ۲ تو

$$\text{مطلوبہ احتمال} = \frac{۱}{\text{ن}} \left\{\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{۲}\right\}^{۲} \div \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(۲\text{ن}+۱)}{۶}$$

$$= \frac{۳(\text{ن}+۱)}{۲(۲\text{ن}+۱)}$$

اگر ن لاانتہا بڑا ہو تو مطلوبہ احتمال $= \text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \frac{۱}{\text{ن}} \frac{\text{ن}^{\text{ک}+۲}}{\text{ک}+۲} \div \frac{\text{ن}^{\text{ک}+۱}}{\text{ک}+۱}$

یعنی $= \frac{\text{ک}+۱}{\text{ک}+۲}$

(۲) اگر گیند واپس نہ رکھے جائیں تو

$$\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\text{ر}}{\text{ن}} \times \frac{\text{ر}-۱}{\text{ن}-۱} \times \frac{\text{ر}-۲}{\text{ن}-۲} \cdots\cdots \frac{\text{ر}-\text{ک}+۱}{\text{ن}-\text{ک}+۱}$$

$$\text{اور ف}_{\text{ر}} = \frac{\text{ق}_{\text{ر}}}{\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}} \text{ق}_{\text{ر}}} = \frac{(\text{ر}-\text{ک}+۱)(\text{ر}-\text{ک}+۲)\cdots(\text{ر}-۱)\text{ر}}{\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}} (\text{ر}-\text{ک}+۱)(\text{ر}-\text{ک}+۲)\cdots(\text{ر}-۱)\text{ر}}$$

$$= (\text{ک}+۱)\frac{(\text{ر}-\text{ک}+۱)(\text{ر}-\text{ک}+۲)\cdots(\text{ر}-۱)\text{ر}}{(\text{ن}-\text{ک}+۱)(\text{ن}-\text{ک}+۲)\cdots(\text{ن}-۱)\text{ن}(\text{ن}+۱)}$$

(دفعہ ۳۹۴)

$$\text{اگلے گیند کے سفید ہونے کا احتمال} = \sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{ر}-\text{ک}}{\text{ن}-\text{ک}}\,\text{ف}_{\text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ک}+۱}{(\text{ن}-\text{ک})(\text{ن}-\text{ک}+۱)\cdots\text{ن}(\text{ن}+۱)} \sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}} (\text{ر}-\text{ک})(\text{ر}-\text{ک}+۱)\cdots(\text{ر}-۱)\text{ر}$$

$$= \frac{\text{ک}+۱}{(\text{ن}-\text{ک})(\text{ن}-\text{ک}+۱)\cdots\text{ن}(\text{ن}+۱)} \times \frac{(\text{ن}-\text{ک})(\text{ن}-\text{ک}+۱)\cdots\text{ن}(\text{ن}+۱)}{\text{ک}+۲}$$

$$= \frac{\text{ک}+۱}{\text{ک}+۲}$$

جو تھیلی کے ابتدائی گیندوں کی تعداد کے تابع نہیں۔

مثال ۳۔ ایک شخص نے ن خط لکھے اور ان کے پتوں کے ن لفافے۔ اگر وہ خطوطِ مذکورہ کو ان لفافوں میں علی الحساب ڈال دے تو ہر ایک خط کے غلط لفافہ میں ڈالے جانے کا کیا احتمال ہے۔

فرض کرو کہ $\text{ع}_{\text{ن}}$ ان طریقوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے جن میں سب خط غلط لفافوں میں پڑ سکتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ جب سب خط

اپنے اپنے لفافوں میں ہوں تو اِن کی ترتیب ا ب ج د ...... سے تعبیر
ہوتی ہے۔ اب اگر ا کسی اور ترتیب میں کسی مخصوص حرف ب کی
جگہ لے لے تو ب یا ا کی جگہ لیگا یا کسی دوسرے حرف کی جگہ۔

(۱) فرض کرو کہ ب، ا کی جگہ سے ہٹتا ہے۔ تب ان ترتیبوں کی
تعداد جن سے باقی سب (ن - ۲) خط اپنی جگہ سے ہٹ سکتے ہیں
$ع_{ن-۲}$ ہے، اس لئے جن متعلقہ طریقوں سے ا باقی ن - ۱ خطوں
میں سے کسی ایک کے ساتھ تبادلہ کرنے سے ہٹ سکتا ہے جبکہ
باقی سب حروف بھی ساتھ ہی اپنی جگہ سے ہٹے ہوئے ہوں ان
کی تعداد (ن - ۱) $ع_{ن-۲}$ ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ا نے ب کی جگہ لے لیا ہے اور ب، ا کی جگہ
نہیں لیتا۔ تب چونکہ ا، ب کی جگہ پر قائم ہے اس لئے اُن
ترتیبوں میں جو مطلوبہ شرائط کو پورا کرتی ہیں خطوط ب، ج، د....
سب کے سب جگہ بدلیں گے۔ یہ عمل $ع_{ن-۱}$ طریقوں سے ہوسکتا ہے
پس ان طریقوں کی تعداد جن میں ا کسی دوسرے خط کی جگہ لیتا
ہے لیکن وہ خط ا کی جگہ نہیں لیتا (ن - ۱) $ع_{ن-۱}$ ہے۔

$$\therefore ع_{ن} = (ن - ۱)(ع_{ن-۱} + ع_{ن-۲})$$

اس سے دفعہ ۴۴۴ کی مدد سے ہم معلوم کرسکتے ہیں کہ

$$ع_{ن} - ن\, ع_{ن-۱} = (-۱)^{ن}(ع_{۲} - ع_{۱})؛$$

نیز $ع_{۱} = ۰$، $ع_{۲} = ۱$، اس لئے بالآخر ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$ع_{ن} = |\underline{ن}\left\{\frac{۱}{|\underline{۲}} - \frac{۱}{|\underline{۳}} + \frac{۱}{|\underline{۴}} - \cdots\cdots + \frac{(-۱)^{ن}}{|\underline{ن}}\right\}$$

اب اُن کُل طریقوں کی تعداد جن میں ن چیزیں ن جگہوں پر
رکھی جاسکتی ہیں $|\underline{ن}$ ہے، اسلئے مطلوبہ احتمال

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n}}{n} \text{ ہے۔}$$

جو مسئلہ ہم نے اوپر ثابت کیا ہے وہ نہایت ضروری اور دلچسپ ہے اور اپنی کثیر التعداد شکلوں میں سے کسی نہ کسی میں نظریۂ احتمال کی سب کتب میں پایا جاتا ہے۔ اس پر پہلے پہل مانٹ مارٹ نے بحث کی اور بعد ازاں ڈی مائیبر نے، آٹسلیر اور لاپلاس نے اس کو عمومیت کا جامہ پہنایا۔

۴۸۴۔ احتمال کا مضمون اس قدر وسیع اور بسیط ہے کہ اسکے مشہور مشہور جبریہ طریقوں کا محض خاکہ کھینچنے کی یہاں کوشش کی گئی ہے اس سے زیادہ بحث کی اس جگہ گنجائش نہیں۔ اسکے متعلق ہر ایک جبریہ عمل کی توضیح کے لئے مختلف مسائل کا ایک بیش بہا گلدستہ وٹ ورتھ کے چانس اور چانس میں مل سکتا ہے۔ جو طالب علم احصائی تکملات سے واقف ہے اسے چاہئے کہ انسائکلو پیڈیا برٹانیکا میں پروفیسر کرافٹن نے جو مضمون احتمال کے متعلق لکھا ہے اس کا مطالعہ کرے۔ اس مضمون کی ابتدا اور مسلسل نشو و نما کے متعلق ملاحظہ ہو ٹاڈھنٹر کی تاریخ نظریہ پاسکل کے زمانہ سے لاپلاس کے وقت تک۔

تجارتی لین دین میں احتمال کے نظریہ کے علمی فائدہ پر بحث کرنا اس ابتدائی کتاب کی حدود سے باہر ہے۔ اس امر کے لئے طالب علم انسائکلو پیڈیا برٹانیکا میں (اینوئیٹیز) اور انشیورنس کا مطالعہ کرے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (ل)

۱۔ دو مُہروں کی ایک ہی افتاد سے کم از کم ۷ نکلنے کے موافق کیا احتمال ہے۔

۲۔ ایک بٹوے میں ۵ پونڈ ہیں اور ۴ شلنگ۔ ان کے متبادلاً پونڈ اور شلنگ نکلنے کا کیا احتمال ہے جبکہ ان کو یکے بعد دیگرے نکالا جائے اور پہلے پونڈ نکلے۔

۳۔ اگر ۱۰ جہازوں میں سے ۹ جہاز بالاوسط بندرگاہ تک صحیح سلامت پہنچ جاتے ہوں تو بتاؤ کہ پانچ جہازوں میں سے کم از کم تین جہازوں کے صحیح سلامت پہنچ جانے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک قرعہ میں سوائے ایک ٹکٹ کے باقی سب ٹکٹ خالی ہیں، ہر ایک آدمی ایک ٹکٹ نکالتا ہے اور اپنے پاس رکھ لیتا ہے، ثابت کرو کہ ہر ایک آدمی کے انعام جیتنے کا احتمال مساوی ہے۔

۵۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۳ سرخ گیند ہیں اور ایک اور تھیلی میں ۴ سفید اور ۵ سرخ گیند ہیں۔ کسی ایک تھیلی میں سے علی الحساب دو گیند نکالے گئے ہیں۔ ان گیندوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

۶۔ پانچ اشخاص ا، ب، ج، د، ع ترتیب وار ایک مہرہ پھینکتے ہیں حتی کہ ان میں سے کوئی ایک یکہ پھینک سکے۔ یہ فرض کر کے کہ وہ مہرہ کو پھینکتے رہیں گے تاوقتیکہ یکہ نکل آئے ان کے اضافی احتمال معلوم کرو۔

۷۔ شطرنج کے ایک تختہ پر کے تین خانے علی الحساب منتخب کئے گئے ہیں ان میں سے دو خانوں کے ایک رنگ کے اور ایک کے دوسرے رنگ کے ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

۸۔ ایک شخص دو مہرے پھینکتا ہے۔ ایک مہرہ معمولی مکعب ہے اور دوسرا منتظم ذوار بعتہ السطوح، ذوار بعتہ السطوح کی صورت میں نچلے رخ کا عدد لیا جاتا ہے، ایک انداخت کی اوسط قیمت معلوم کرو اور ۵، ۶، ۷ پھینکنے کے احتمال محسوب کرو۔

۹۔ ا کی مہارت کی نسبت ب کی مہارت کے ساتھ ۱ : ۳ ہے

اور ج کی مہارت کے ساتھ ۳ : ۲ اور د کے ساتھ ۴ : ۳ ۔ بتاؤ کہ اگر ا، باقی تینوں اشخاص ب، ج، د میں سے ہر ایک کے مقابلہ میں مہرہ پھینکے تو اس کے کم از کم دو مرتبہ جیتنے کا کیا احتمال ہے ۔

۱۰ ۔ چار آدمی بالترتیب ایک ہشت سطحی مہرہ کو اس شرط پر پھینکتے ہیں کہ انعام اس کو ملے جو اول مرتبہ یکہ پھینکے بتاؤ کہ آخری آدمی کے جیتنے کا کیا احتمال ہے ۔

۱۱ ۔ مساوی مہارت کے دو کھلاڑی ا اور ب کھیلوں کی ایک بازی کھیلتے ہیں ۔ ا کو بازی جیتنے کے لئے دو کھیلوں کی ضرورت ہے اور ب کو تین کی ۔ ان کے جیتنے کے احتمال کا مقابلہ کرو ۔

۱۲ ۔ ایک بٹوے میں تین پونڈ ہیں اور ۲ شلنگ ۔ ایک شخص دونوں ہاتھوں سے ایک ایک سکہ نکالتا ہے ۔ پھر ایک سکہ کو دیکھتا ہے کہ وہ پونڈ ہے، بتاؤ کہ دوسرے ہاتھ میں کے سکے کے پونڈ اور شلنگ ہونے کا مساوی امکان ہے ۔

۱۳ ۔ ا اور ب ایک انعام کو جیتنے کے لئے ایک مہرہ پھینکتے ہیں، پہلے ا اس شرط پر پھینکتا ہے کہ اگر وہ ۶ پھینک سکے تو وہ جیت جائیگا ۔ اگر ا ناکام رہے تو پھر ب پھینکے اور اگر ب ۶ یا ۵ پھینک سکے تو وہ جیت جائیگا ۔ اگر وہ بھی ناکام رہے تو پھر ا پھینکے اور اگر ا، ۶، ۵ یا ۴ پھینک سکے تو ا جیت جائے ۔ علی ہذالقیاس ہر ایک کھلاڑی کے جیتنے کا احتمال دریافت کرو ۔

۱۴ ۔ ایک ریل گاڑی کے درجۂ اول کے خانہ کی چھ نشستوں کو حاصل کرنے کے لئے سات آدمی قرعہ ڈالتے ہیں، ان میں سے (۱) دو مخصوص اشخاص کے مقابل کی نشستوں کے حاصل کرنے کے اور (۲) ایک ہی جانب کی دو متصل نشستوں کے حاصل کرنے کے احتمال محسوب کرو ۔

۱۵ ۔ ایک عدد میں ۷ ہندسے ہیں جن کا حاصل جمع ۵۹ ہے ثابت کرو کہ اس عدد کے ۱۱ پر تقسیم ہوسکنے کا احتمال $\frac{4}{21}$ ہے ۔

۱۶ — تین مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ۱۲ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۷ — ایک تھیلی میں ۷ ٹکٹ ہیں اور اُن پر بالترتیب اعداد ۰، ۱، ۲، ....۶ لکھے ہیں، ایک ٹکٹ کو نکال کر واپس رکھ دیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اس طرح چار ٹکٹ نکالنے سے جو عدد ملے ہوں اُن کے حاصل جمع کے ۸ ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۱۸ — ۱۰ ٹکٹوں میں ۵ ٹکٹ خالی ہیں اور باقی پانچ پر اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ لکھے ہیں تین بار ایک ایک ٹکٹ نکال کر ۱۰ بنا لینے کا کیا احتمال ہے۔ جبکہ (۱) ہر دفعہ ٹکٹ واپس رکھ دئے جائیں (۲) ٹکٹ واپس نہ رکھے جائیں۔

۱۹ — اگر ن صحیح عددوں کو علی الحساب لیکر ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب کے

آخری عدد کے ۱، ۳، ۷ یا ۹، ہونے کا احتمال $\frac{4^n}{5^n}$ ہے، ۲، ۴، ۶ یا ۸

ہونے کا احتمال $\frac{4^n - 2^n}{5^n}$ ہے، ۵ ہونے کا احتمال $\frac{5^n - 4^n}{10^n}$ ہے اور ۰ ہونے کا

احتمال $\frac{10^n - 8^n - 5^n + 4^n}{10^n}$ ہے۔

۲۰ — ایک بٹوے میں ۲ پونڈ اور ۲ شلنگ ہیں اور ایک کھوٹا سکہ اسی شکل و قامت کا کسی دوسری دھات کا ہے ایک آدمی ایک وقت ایک سکہ نکالتا ہے تاوقتیکہ وہ کھوٹا سکہ نہ نکال لے اس کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۱ — تین اشخاص ا، ب اور ج اسی ترتیب سے تین مہرے ایک ساتھ اس شرط پر پھینکتے ہیں کہ جو شخص پہلے ۱۰ پھینک لے اس کو ایک خاص رقم انعام دی جائے گی۔ اگر وہ اسی ترتیب سے پھینکتے جائیں جب تک کہ شرط کو پوری نہ ہو جائے تو ثابت کرو کہ اُن کے احتمال بالترتیب

$\left(\frac{8}{13}\right)^2$، $\frac{56}{13^2}$ اور $\left(\frac{7}{13}\right)^2$ ہیں۔

۲۲ — دو اشخاص جن کے سچ بولنے کے احتمال بالترتیب $\frac{۲}{۳}$ اور $\frac{۵}{۶}$ ہیں متفقہ طور پر یہ بیان کرتے ہیں کہ ایک تھیلی میں سے جس میں ۱۵ ٹکٹ ہیں ایک مخصوص ٹکٹ نکالا گیا ہے۔ اس بیان کی صداقت کا احتمال معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک تھیلی میں $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ مُہرے ہیں، اُن میں سے ایک مُہرہ پر ۱، دو پر ۲ اور تین پر ۹ لکھا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ ایک آدمی تھیلی میں سے ایک مُہرہ اس شرط پر نکالتا ہے کہ جو عدد اُس مُہرے پر ہو اُس کو اتنے ہی شلنگ دیئے جائیں۔ اِس آدمی کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۴ — اگر ۱۰ چیزیں تین شخصوں میں تقسیم کی جائیں تو ثابت کرو کہ ایک خاص آدمی کے ۵ سے زیادہ چیزیں لینے کا احتمال $\frac{۱۵۰۷}{۱۹۶۸۳}$ ہے۔

۲۵ — ایک سلاخ پر علی الحساب ن نشان لگا کر سلاخ کو اِن نشانات سے حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اِن حصوں میں سے ہر ایک حصہ کے سلاخ کے $\frac{۱}{ن}$ ویں حصے سے بڑے نہ ہونے کا احتمال $\frac{۱}{ن^ن}$ ہے۔

۲۶ — دو بٹوؤں میں سے ایک میں تین پونڈ اور ایک شلنگ ہے اور دُوسرے میں ۳ شلنگ اور ایک پونڈ۔ ایک غیر معین بٹوے میں سے ایک سکّہ نکال کر دوسرے میں ڈال دیا گیا ہے۔ پھر دونوں بٹوؤں میں سے ایک ایک سکّہ نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں شلنگ ہیں۔ اگر پھر دونوں بٹوؤں میں سے ایک ایک سکّہ اور نکالا جائے تو اِن دونوں سکّوں کے شلنگ ہونے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۲۷ — ایک دائرہ کے محیط پر علی الحساب تین نقطے لیکر اُن کو ملانے سے ایک مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس مثلث کے سب زاویوں کے حادہ

ہونے کے خلاف امکان ۳ : ۱۱ ہے۔

۲۸ — ایک دائرہ کے محیط پر تین نقطے علی الحساب لئے گئے ہیں، بتاؤ کہ اس طرح سے جو تین قوسیں حاصل ہوں اُن میں سے کسی دو قوسوں کے ملکر تیسری قوس سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۲۹ — ایک خط کو علی الحساب تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اِن حصوں سے ایک مثلث بن سکنے کا کیا احتمال ہے۔

۳۰ — ایک بٹوے میں ۲۵ پونڈ ہیں اور دوسرے بٹوے میں ۱۰ پونڈ اور ۱۵ شلنگ۔ ایک بٹوے کو علی الحساب منتخب کرکے اِس میں سے ۴ سکے نکالے گئے ہیں اور سب کے سب پونڈ ہیں۔ اِس بٹوے کے صرف پونڈوں والا بٹوا ہونے کا کیا احتمال ہے اور اگر اِس بٹوے میں سے ایک اَور سکہ نکالا جائے تو اِس کی تخمینی قیمت کیا ہے۔

۳۱ — ایک خطِ مستقیم کا طول ا ہے اِس پر دو نقطے علی الحساب لئے گئے ہیں اِن نقطوں کے درمیانی فاصلہ کے ب سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے

۳۲ — ایک خطِ مستقیم کا طول ا ہے، اِس پر علی الحساب دو نقطے لیکر اِس کو تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اِس کا احتمال معلوم کرو کہ کوئی حصہ ب سے بڑا نہ ہو۔

۳۳ — ایک خطِ مستقیم کا طول ا + ب ہے، اِس پر دو طول ا اور ب علی الحساب ناپے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن طولوں کے مشترک حصہ کے ج سے زیادہ نہ ہونے کا احتمال $\frac{ج^2}{اب}$ ہے جہاں ج کم ہے ا یا ب سے۔ نیز بتاؤ کہ چھوٹے طول ب کے بڑے طول ا کے کلی طور پر اندر آنے کا احتمال $\frac{ا - ب}{ا}$ ہے۔

۳۴ — ایک خطِ مستقیم کا طول ا + ب + ج ہے، اِس پر علی الحساب دو طول ا اور ب ناپے گئے ہیں۔ اِن کے مشترک حصے کے د سے

زیادہ نہ ہونے کا احتمال $\frac{(ج + د)^{2}}{(ج + ا)(ج + ب)}$ ہے جہاں د، ا یا ب سے کم ہے۔

۵۳۔ ایک انڈین ریلوے میں درجہ اول کے ل خانے ہیں، درجہ دوم کے م اور درجہ سوم کے ن۔ اِس گاڑی میں دو مرد ا اور ب اور دو عورتیں ج اور د سفر کر رہے ہیں جو سب ایک دُوسرے سے ناواقف ہیں۔ ا اور ب کے سوار ہونے سے قبل درجہ اوّل، درجہ دوم اور درجہ سوم میں سفر کرنے کے احتمال بالترتیب لہ، مہ، نہ، ہیں اور ج اور د کے یہی احتمال بالترتیب ل، م اور ن ہیں، ثابت کرو کہ لہ، مہ، نہ، کی تمام قیمتوں کے واسطے (سوائے اس خاص صورت کے جب کہ لہ : مہ : نہ = ل : م : ن) ا اور ب کے ایک ہی عورت کی رفاقت میں ہونے کا احتمال الگ الگ عورتوں کی رفاقت میں ہونے کے احتمال سے مقابلۃً زیادہ ہے۔

تینتیسواں باب

مقطعات

۳۸۵ — باب ہذا میں ہم مقطعات اور اُن کے ابتدائی خواص پر اجمالی بحث کرینگے۔ اس مختصر بیان سے طالب علم ہندسۂ تحلیلی اور نیز علم ریاضی کے دیگر اعلےٰ شعبوں میں مقطعات کی ترقیم سے مستفید ہونے کے قابل ہوجائے گا۔ شعبۂ تحلیل کی اس شاخ کے متعلق زیادہ مفصل اور موضح معلومات ڈاکٹر سالمن کی کتاب اعلےٰ جبرو مقابلہ جدید کے ابتدائی اسباقی
(Lessons Introductory to modern Higher algebra)
سے اور نیز موئر کے نظریۂ مقطعات (Theory of Determinants)
سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

۳۸۶ — دو متجانس خطی مساواتوں

$$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} = ۰$$

$$\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} = ۰$$

پر غور کرو۔ پہلی مساوات کو ب₂ سے اور دوسری کو ب₁ سے ضرب دو۔ پھر تفریق کرکے حاصل تفریق کو لا پر تقسیم کرو، ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1 = ۰$$

Muir ¹

اِس نتیجہ کو بعض اوقات شکل

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} = ۰$$

میں لکھتے ہیں۔ دائیں طرف کا جملہ مقطعہ کہلاتا ہے، اس میں دو قطاریں اور دو ستون ہیں۔ اس کی تفصیل میں ہر ایک رقم دو مقادیر کا حاصل ضرب ہے۔ اس لحاظ سے مندرجہ بالا مقطعہ کو دوسرے رتبہ کا مقطعہ کہتے ہیں۔

حروف $ا_1$، $ب_2$، $ا_2$، $ب_1$ کو مقطعہ کے اجزائے افرادی کہتے ہیں۔

اور رقوم $ا_1 ب_2$، $ا_2 ب_1$ کو اجزائے ترکیبی سے موسوم کرتے ہیں۔

۴۸۷ — چونکہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} = ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1 = \begin{vmatrix} ا_1 & ا_2 \\ ب_1 & ب_2 \end{vmatrix}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس مقطعہ کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی جبکہ اس کی قطاروں کو ستونوں میں اور ستونوں کو قطاروں میں بدل دیا جائے۔

۴۸۸ — یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ب_1 & ا_1 \\ ب_2 & ا_2 \end{vmatrix} \quad \text{اور} \quad \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ا_2 & ب_2 \\ ا_1 & ب_1 \end{vmatrix}$$

یعنی اگر ہم ایک مقطعہ کی دو قطاروں یا دو ستونوں کو ایک دوسرے سے بدل دیں تو جو مقطعہ حاصل ہوگا وہ پہلے مقطعہ سے صرف بلحاظ علامت کے مختلف ہوگا۔

۴۸۹ — ذیل کی متجانس خطی مساواتوں پر غور کرو۔

$$ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 ی = ۰$$

$$ا_{۲}\,لا + ب_{۲}\,ما + ج_{۲}\,ی = ۰$$

$$ا_{۳}\,لا + ب_{۳}\,ما + ج_{۳}\,ی = ۰$$

اِن میں سے لا ، ما ، ی کو ساقط کرنے سے حسب دفعہ ۴ مشق ۲ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا_{۱}(ب_{۲}ج_{۳} - ب_{۳}ج_{۲}) + ب_{۱}(ج_{۲}ا_{۳} - ج_{۳}ا_{۲}) + ج_{۱}(ا_{۲}ب_{۳} - ا_{۳}ب_{۲}) = ۰$$

$$\text{یا}\quad ا_{۱}\begin{vmatrix} ب_{۲} & ج_{۲} \\ ب_{۳} & ج_{۳} \end{vmatrix} + ب_{۱}\begin{vmatrix} ج_{۲} & ا_{۲} \\ ج_{۳} & ا_{۳} \end{vmatrix} + ج_{۱}\begin{vmatrix} ا_{۲} & ب_{۲} \\ ا_{۳} & ب_{۳} \end{vmatrix} = ۰$$

اِس مقطعہ کو بالعموم اِس شکل میں لکھا جاتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} ا_{۱} & ب_{۱} & ج_{۱} \\ ا_{۲} & ب_{۲} & ج_{۲} \\ ا_{۳} & ب_{۳} & ج_{۳} \end{vmatrix} = ۰$$

اِس میں دائیں طرف ... جملہ کو جو تین قطاروں اور تین ستونوں پر مشتمل ہے تیسرے مرتبہ کا مقطعہ کہتے ہیں۔

۴۹۰ — مقطعۂ بالا کی تفصیلی صورت کو اِس کی رقوم کی ترتیب کو قدرے بدلنے سے یوں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$ا_{۱}(ب_{۲}ج_{۳} - ب_{۳}ج_{۲}) + ا_{۲}(ب_{۳}ج_{۱} - ب_{۱}ج_{۳})$$

$$+\; ا_{۳}(ب_{۱}ج_{۲} - ب_{۲}ج_{۱})$$

$$\text{یا}\quad ا_{۱}\begin{vmatrix} ب_{۲} & ب_{۳} \\ ج_{۲} & ج_{۳} \end{vmatrix} + ا_{۲}\begin{vmatrix} ب_{۳} & ب_{۱} \\ ج_{۳} & ج_{۱} \end{vmatrix} + ا_{۳}\begin{vmatrix} ب_{۱} & ب_{۲} \\ ج_{۱} & ج_{۲} \end{vmatrix}$$

لہذا

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

یعنی مقطعہ مذکور کی قیمت میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جبکہ اسکی قطاروں کو ستونوں میں اور ستونوں کو قطاروں میں بدل دیا جائے۔

۴۹۱ — دفعہ ماقبل کی رو سے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \end{vmatrix}$$

یعنی یا

$$= \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ا}_2 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ا}_3 \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots(1)$$

نیز دفعہ ۴۸۹ سے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{ا}_1 \begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ب}_1 \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ج}_1 \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 \end{vmatrix} \quad \ldots(2)$$

اب ہم ذیل میں تیسرے مرتبہ کے مقطعہ کو پھیلانے کا آسان طریقہ درج کرتے ہیں۔ غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ خواہ ہم مقطعہ کو پہلے

[س]تون سے پھیلائیں یا پہلی قطار سے، ہر دو صورتوں میں وہی جواب حاصل [ہ]وتا ہے۔

مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اجزائے افرادی ا$_1$، ا$_2$، ا$_3$ میں سے [کس]ی ایک کا سر درجہ دوم کا وہ مقطعہ ہے جو اس جزوِ افرادی میں سے [گز]رنے والے ستون اور قطار کو نکال دینے سے باقی رہتا ہے، یہ [مق]طعات ابتدائی مقطعہ کے **صغائر** کہلاتے ہیں اس لحاظ سے [م]ساوات (۱) کی دائیں جانب کے رکن کو اس طرح

$$ا_1 اَ_1 - ا_2 اَ_2 + ا_3 اَ_3$$

[کی] شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں اَ$_1$، اَ$_2$، اَ$_3$ بالترتیب ا$_1$، ا$_2$، ا$_3$ [کے] صغائر ہیں۔

نیز مساوات (۲) سے مقطعۂ مذکورہ

$$ا_1 اَ_1 - ب_1 بَ_1 + ج_1 جَ_1$$

[ک]ے مساوی ہے جہاں اَ$_1$، بَ$_1$، جَ$_1$ بالترتیب ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$ کے صغائر ہیں۔

۴۹ - مقطعہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

$$= ا_1(ب_2 ج_3 - ب_3 ج_2) + ب_1(ج_2 ا_3 - ج_3 ا_2) + ج_1(ا_2 ب_3 - ا_3 ب_2)$$

$$= - ب_1(ا_2 ج_3 - ا_3 ج_2) - ا_1(ج_2 ب_3 - ج_3 ب_2) - ج_1(ب_2 ا_3 - ب_3 ا_2)$$

[ا]س لئے

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ب_1 & ا_1 & ج_1 \\ ب_2 & ا_2 & ج_2 \\ ب_3 & ا_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

اِس سے ظاہر ہے کہ اگر دو متصل ستونوں کو یا متصل قطاروں کو باہم بدل دیا جائے تو مقطعہ کی علامت بدل جاتی ہے لیکن عددی قیمت میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔

اگر ہم اختصار کی خاطر مقطعہ

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

کو $(ا_1 \; ب_2 \; ج_3)$ سے تعبیر کریں تو جو نتیجہ ہم نے ابھی حاصل کیا ہے اُس کو یوں بھی لکھا جا سکتا ہے: $(ب_1 \; ا_2 \; ج_3) = -(ا_1 \; ب_2 \; ج_3)$

اِسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$(ج_1 \; ا_2 \; ب_3) = -(ا_1 \; ج_2 \; ب_3) = +(ا_1 \; ب_2 \; ج_3)$$

۴۹۳۔ اگر ایک مقطعہ کے دو ستون یا دو قطاریں متماثل ہوں تو مقطعہ صفر ہو جاتا ہے۔

فرض کرو کہ مقطعہ کی قیمت ق ہے، تب دو ستونوں یا دو قطاروں کو باہم بدلنے سے مقطعہ کی قیمت '-ق' ہو جاتی ہے، لیکن ظاہر ہے کہ متماثل قطاروں اور ستونوں کو بدلنے سے مقطعۂ مذکورہ میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوسکتی، اسلیئے ق = -ق یعنی ق = ۰، پس ہمیں مندرجہ ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$ا_1 آ_1 - ا_2 آ_2 + ا_3 آ_3 = ق$$

$$ب_1 آ_1 - ب_2 آ_2 + ب_3 آ_3 = ۰$$

$$ج_1 آ_1 - ج_2 آ_2 + ج_3 آ_3 = ۰$$

۲۹۴ ـ اگر کسی قطار یا ستون کے ہر ایک جزوِ افرادی کو ایک ہی جزوِ ضربی سے ضرب دیا جائے تو مقطعۂ مذکور اُس جزوِ ضربی سے ضرب کھا جاتا ہے۔

کیونکہ

$$\begin{vmatrix} \text{م}\,\text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{م}\,\text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{م}\,\text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{م}\,\text{ا}_1\text{اَ}_1 - \text{م}\,\text{ا}_2\text{اَ}_2 + \text{م}\,\text{ا}_3\text{اَ}_3$$

$= \text{م}(\text{ا}_1\text{اَ}_1 - \text{ا}_2\text{اَ}_2 + \text{ا}_3\text{اَ}_3)$ لہذا مسئلہ ثابت ہوا۔

نتیجہ صریح ـ اگر ایک قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی کسی اور قطار یا ستون کے متناظر جزوِ افرادی کا ایک ہی ضعف ہو تو مقطعہ کی قیمت صفر ہوگی۔

۲۹۵ ـ اگر ایک مقطعہ کی کسی ایک قطار یا ستون کا ایک جزوِ افرادی دو رقوم پر مشتمل ہو تو مقطعۂ مذکور دو مقطعات کے حاصل جمع کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ مثلاً

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{عہ}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2+\text{عہ}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3+\text{عہ}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{عہ}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{عہ}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{عہ}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

کیونکہ دائیں طرف کا جملہ

$$= (\text{ا}_1+\text{عہ}_1)\text{اَ}_1 - (\text{ا}_2+\text{عہ}_2)\text{اَ}_2 + (\text{ا}_3+\text{عہ}_3)\text{اَ}_3$$

$$= (\text{ا}_1\text{اَ}_1 - \text{ا}_2\text{اَ}_2 + \text{ا}_3\text{اَ}_3) + (\text{عہ}_1\text{اَ}_1 - \text{عہ}_2\text{اَ}_2 + \text{عہ}_3\text{اَ}_3)$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

اِسی طرح سے اگر کسی ایک قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی م رقوم پر مشتمل ہو تو اِس مقطعہ کو م مقطعات کے حاصل جمع کے

طور پر لکھ سکتے ہیں۔

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{ع}_1 & \text{ب}_1+\text{به}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2+\text{ع}_2 & \text{ب}_2+\text{به}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3+\text{ع}_3 & \text{ب}_3+\text{به}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{به}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{به}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{به}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ع}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ع}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ع}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ع}_1 & \text{به}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ع}_2 & \text{به}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ع}_3 & \text{به}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

ان نتائج کی تعمیم نہایت آسانی سے کی جا سکتی ہے۔ شلاً اگر تین ستونوں کے اجزائے افرادی بالترتیب م، ن، ف رقوم پر مشتمل ہوں تو ہم اس مقطعہ کو م ن ف مقطعات کے حاصل جمع کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ب}+\text{ج} & \text{ا}-\text{ب} & \text{ا} \\ \text{ج}+\text{ا} & \text{ب}-\text{ج} & \text{ب} \\ \text{ا}+\text{ب} & \text{ج}-\text{ا} & \text{ج} \end{vmatrix} = ۳\,\text{ا ب ج} - \text{ا}^3 - \text{ب}^3 - \text{ج}^3$$

مذکورہ بالا مقطعہ =

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{ج} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{ا} & \text{ج} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

ان چار مقطعات میں سے پہلے تین معدوم ہو جاتے ہیں اور مقطعہ زیر بحث ان میں سے صرف آخری مقطعہ کے مساوی رہ جاتا ہے۔ لہذا اس کی قیمت

$$= -\{\text{ج}(\text{ج}^2 - \text{ا ب}) - \text{ب}(\text{ا ج} - \text{ب}^2) + \text{ا}(\text{ا}^2 - \text{ب ج})\}$$

$$= ۳\,\text{ا ب ج} - \text{ا}^3 - \text{ب}^3 - \text{ج}^3$$

مثال ۲ـ
$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$
کی قیمت معلوم کرو ـ

یہاں
$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 57+10 & 19 & 21 \\ 39+0 & 13 & 14 \\ 72+9 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 57 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 72 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2+19 \\ 0 & 13 & 1+13 \\ 9 & 24 & 2+24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 63 = -43$$

۴۹۶ـ ذیل کے مقطعہ پر غور کرو:

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 + \text{ف}\,\text{ب}_1 + \text{ق}\,\text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 + \text{ف}\,\text{ب}_2 + \text{ق}\,\text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 + \text{ف}\,\text{ب}_3 + \text{ق}\,\text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

دفعہ ماقبل کی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ یہ ذیل کے تین مقطعات

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ف}\,\text{ب}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ف}\,\text{ب}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ف}\,\text{ب}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ق}\,\text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ق}\,\text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ق}\,\text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

کے مساوی ہے۔ اِن میں سے آخر کے دو مقطعات حسب دفعہ ۴۹۴ نتیجۂ صریح معدوم ہوجاتے ہیں۔ اِس سے ظاہر ہے کہ مفروضہ مقطعہ کی قیمت اُس مقطعہ کے مساوی ہے جو اگلی مقطعہ کے

لے ستون کے اجزائے افرادی میں سے باقی ستونوں کے متناظر اجزائے
رادی کے مساوی ضعف تفریق کرنے اور باقی ستونوں کو حسبِ سابق
قرار رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

برعکس اس کے

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1+ف\,ب_1+ق\,ج_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2+ف\,ب_2+ق\,ج_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3+ف\,ب_3+ق\,ج_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

نیز پہلے ستون کے متعلق جو بات اُوپر ثابت کی جا چکی ہے وہ
ر ایک قطار یا ستون کے لئے درست ہے۔ پس ثابت ہوا کہ
ی ایک مقطعہ کو مختصر کرنے میں ہم کسی قطار یا ستون کو ایک
ر ایسی قطار یا ستون سے بدل سکتے ہیں جو حسبِ ذیل طریقہ سے
تا ہے۔

اُس ستون یا قطار کو لو جس کے اجزائے افرادی کو آپ بدلنا
ہتے ہیں اور ان میں باقی ایک یا زیادہ قطاروں یا ستونوں کے
ناظر اجزائے افرادی کے مساوی ضعف جمع یا تفریق کردو۔

تھوڑی سی مشق کے بعد یہ معلوم ہوگا کہ کسی مقطعہ کو اس کی
یا زیادہ قطاروں یا ستونوں کو ایک ساتھ بدلنے سے فوراً مختصر
جا سکتا ہے۔ مثلاً یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} ا_1+ف\,ب_1 & ب_1-ق\,ج_1 & ج_1 \\ ا_2+ف\,ب_2 & ب_2-ق\,ج_2 & ج_2 \\ ا_3+ف\,ب_3 & ب_3-ق\,ج_3 & ج_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

لیکن اس قاعدہ کو استعمال کرتے وقت یہ احتیاط رکھنی چاہئے کہ

کم از کم ایک ستون یا قطار کو بغیر بدلے ویسے ہی چھوڑ دیا جائے۔ مثلاً اگر اوپر کی مساوات متماثلہ میں تیسرے ستون کے اجزائے افرادی بالترتیب ج۱ + د ل۱، ج۲ + د ل۲، ج۳ + د ل۳ میں بدل دئے جائیں تو مقطعہ کی قیمت میں بقدر

$$\begin{vmatrix} \text{د ل}_1 & \text{ب}_1 - \text{ق ج}_1 & \text{ا}_1 + \text{ف ب}_1 \\ \text{د ل}_2 & \text{ب}_2 - \text{ق ج}_2 & \text{ا}_2 + \text{ف ب}_2 \\ \text{د ل}_3 & \text{ب}_3 - \text{ق ج}_3 & \text{ا}_3 + \text{ف ب}_3 \end{vmatrix}$$

کا اضافہ ہو جائیگا اور یہ مقطعہ جن چار مقطعات میں تحلیل کیا جاسکتا ہے اُن میں سے ایک مقطعہ ایسا ہے جو معدوم نہیں ہوتا اور وہ یہ ہے

$$\begin{vmatrix} \text{د ل}_1 & -\text{ق ج}_1 & \text{ف ب}_1 \\ \text{د ل}_2 & -\text{ق ج}_2 & \text{ف ب}_2 \\ \text{د ل}_3 & -\text{ق ج}_3 & \text{ف ب}_3 \end{vmatrix}$$

مثال ۱۔ مقطعہ $\begin{vmatrix} ۲۲ & ۲۶ & ۲۹ \\ ۲۷ & ۳۱ & ۲۵ \\ ۴۶ & ۵۴ & ۶۳ \end{vmatrix}$ کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{یہ مقطعہ} = \begin{vmatrix} -۴ & ۲۶ & ۳ \\ -۴ & ۳۱ & -۶ \\ -۸ & ۵۴ & ۹ \end{vmatrix} = -۳ \times ۴ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۲۶ & ۱ \\ ۱ & ۳۱ & -۲ \\ ۲ & ۵۴ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$= -۱۲ \begin{vmatrix} ۱ & ۲۶ & ۱ \\ ۰ & ۵ & -۳ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = -۱۲ \begin{vmatrix} ۲۶ & ۱ & ۱ \\ ۵ & -۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = -۱۲ \begin{vmatrix} ۵ & -۳ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۱۳۲$$

[تشریح۔ اختصار کی پہلی منزل پر دوسرے ستون کو برقرار رکھو، پہلے ستون کے اجزائے افرادی حاصل کرنے کے لئے دئے ہوئے مقطعہ کے دوسرے ستون کے اجزائے افرادی کو پہلے ستون کے متناظر اجزائے افرادی میں سے

تفریق کرو، نئے تیسرے ستون کے لئے دئے ہوئے مقطعہ کے تیسرے ستون کے
اجزائے افرادی میں سے دوسرے ستون کے متناظر اجزائے افرادی تفریق کرو۔
دوسری منزل پر اجزائے ضربی '۳' اور '۴' باہر نکال لو۔ تیسری منزل پر
پہلی قطار کو برقرار رکھو۔ دوسری نئی قطار کے لئے دوسری قطار کے اجزائے
افرادی میں سے پہلی قطار کے متناظر اجزائے افرادی تفریق کرو، تیسری نئی
قطار کے لئے پہلی قطار کے اجزائے افرادی کو ۲ سے ضرب دیکر تیسری قطار
کے متناظر اجزائے افرادی میں سے تفریق کرو۔ بعد کی منزلیں بالکل آسان ہیں۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ مقطعہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}-\text{ب}-\text{ج} & ۲\text{ا} & ۲\text{ا} \\ ۲\text{ب} & \text{ب}-\text{ج}-\text{ا} & ۲\text{ب} \\ ۲\text{ج} & ۲\text{ج} & \text{ج}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix} = (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^{۳}$$

مندرجہ بالا مقطعہ =

$$\begin{vmatrix} \text{ا}+\text{ب}+\text{ج} & \text{ا}+\text{ب}+\text{ج} & \text{ا}+\text{ب}+\text{ج} \\ ۲\text{ب} & \text{ب}-\text{ج}-\text{ا} & ۲\text{ب} \\ ۲\text{ج} & ۲\text{ج} & \text{ج}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}) \times \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲\text{ب} & \text{ب}-\text{ج}-\text{ا} & ۲\text{ب} \\ ۲\text{ج} & ۲\text{ج} & \text{ج}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}) \times \begin{vmatrix} ۱ & \cdot & \cdot \\ ۲\text{ب} & -\text{ب}-\text{ج}-\text{ا} & \cdot \\ ۲\text{ج} & \cdot & -\text{ج}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix} = (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}) \times \begin{vmatrix} -\text{ب}-\text{ج}-\text{ا} & \cdot \\ \cdot & -\text{ج}-\text{ا}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^{۳}$$

[تشریح۔ پہلے نئے مقطعہ میں پہلی قطار ابتدائی مقطعہ کی تین قطاروں کے
اجزائے افرادی کے حاصل جمع کے مساوی ہے اور دوسری اور تیسری قطاریں
وہی ہیں، تیسرے نئے مقطعہ میں پہلے ستون کو برقرار رکھا گیا ہے اور
دوسرے نئے ستون کے اجزائے افرادی دوسرے ستون کے اجزائے افرادی

میں سے پہلے ستون کے اجزائے افرادی تفریق کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور تیسرے نئے ستون کے اجزائے پہلے ستون کے اجزائے افرادی کو تیسرے ستون کے اجزائے افرادی میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ باقی تبدیلیاں از خود واضح ہیں]۔

۴۹۶۔ یہ بتانے سے پہلے کہ دو مقطعات کے حاصل ضرب کو ایک مقطعہ کی شکل میں کس طرح لکھا جاسکتا ہے ہم ذیل کے مقطعہ کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

ا$_1$ع$_1$ + ب$_1$بہ$_1$ + ج$_1$جہ$_1$	ا$_1$ع$_2$ + ب$_1$بہ$_2$ + ج$_1$جہ$_2$	ا$_1$ع$_3$ + ب$_1$بہ$_3$ + ج$_1$جہ$_3$
ا$_2$ع$_1$ + ب$_2$بہ$_1$ + ج$_2$جہ$_1$	ا$_2$ع$_2$ + ب$_2$بہ$_2$ + ج$_2$جہ$_2$	ا$_2$ع$_3$ + ب$_2$بہ$_3$ + ج$_2$جہ$_3$
ا$_3$ع$_1$ + ب$_3$بہ$_1$ + ج$_3$جہ$_1$	ا$_3$ع$_2$ + ب$_3$بہ$_2$ + ج$_3$جہ$_2$	ا$_3$ع$_3$ + ب$_3$بہ$_3$ + ج$_3$جہ$_3$

دفعہ ۴۹۵ کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ مندرجۂ بالا مقطعہ ۲۷ مقطعات کے حاصل جمع کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے، اِن میں سے تین مقطعات بطور نمونہ ذیل میں درج کئے جاتے ہیں۔

ا$_1$ع$_1$	ا$_1$ع$_2$	ا$_1$ع$_3$
ا$_2$ع$_1$	ا$_2$ع$_2$	ا$_2$ع$_3$
ا$_3$ع$_1$	ا$_3$ع$_2$	ا$_3$ع$_3$

،

ا$_1$ع$_1$	ب$_1$بہ$_2$	ج$_1$جہ$_3$
ا$_2$ع$_1$	ب$_2$بہ$_2$	ج$_2$جہ$_3$
ا$_3$ع$_1$	ب$_3$بہ$_2$	ج$_3$جہ$_3$

،

ا$_1$ع$_1$	ج$_1$جہ$_2$	ب$_1$بہ$_3$
ا$_2$ع$_1$	ج$_2$جہ$_2$	ب$_2$بہ$_3$
ا$_3$ع$_1$	ج$_3$جہ$_2$	ب$_3$بہ$_3$

اور یہ مقطعات بالترتیب

ع$_1$ع$_2$ع$_3$

ا$_1$	ا$_1$	ا$_1$
ا$_2$	ا$_2$	ا$_2$
ا$_3$	ا$_3$	ا$_3$

، ع$_1$بہ$_2$جہ$_3$

ا$_1$	ب$_1$	ج$_1$
ا$_2$	ب$_2$	ج$_2$
ا$_3$	ب$_3$	ج$_3$

، ع$_1$بہ$_3$جہ$_2$

ا$_1$	ج$_1$	ب$_1$
ا$_2$	ج$_2$	ب$_2$
ا$_3$	ج$_3$	ب$_3$

کے مساوی ہیں، اِن میں سے پہلا مقطعہ معدوم ہو جاتا ہے، اسی طرح سے یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ کل ۲۷ مقطعات میں سے ۲۱ مقطعات معدوم ہو جاتے ہیں۔

اور باقی کے چھ مقطعات مساوی ہیں

$$(\text{ع}_۱\text{ب}_۲\text{ج}_۳ - \text{ع}_۱\text{ب}_۳\text{ج}_۲ + \text{ع}_۲\text{ب}_۳\text{ج}_۱ - \text{ع}_۲\text{ب}_۱\text{ج}_۳ + \text{ع}_۳\text{ب}_۱\text{ج}_۲ - \text{ع}_۳\text{ب}_۲\text{ج}_۱) \times \begin{vmatrix} \text{ا}_۱ & \text{ب}_۱ \\ \text{ا}_۲ & \text{ب}_۲ \\ \text{ا}_۳ & \text{ب}_۳ \end{vmatrix}$$

کے یعنی

$$\begin{vmatrix} \text{ع}_۱ & \text{ب}_۱ & \text{ج}_۱ \\ \text{ع}_۲ & \text{ب}_۲ & \text{ج}_۲ \\ \text{ع}_۳ & \text{ب}_۳ & \text{ج}_۳ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ا}_۱ & \text{ب}_۱ & \text{ج}_۱ \\ \text{ا}_۲ & \text{ب}_۲ & \text{ج}_۲ \\ \text{ا}_۳ & \text{ب}_۳ & \text{ج}_۳ \end{vmatrix}$$

لہذا دیا ہُوا مقطعہ دو مقطعات کے حاصل ضرب کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

۴۹۸۔ دو مقطعات کا حاصل ضرب ایک مقطعہ ہوتا ہے۔
ذیل کی دو خطی مساواتوں پر غور کرو

$$\left.\begin{aligned} \text{ا}_۱\text{لا}_۱ + \text{ب}_۱\text{لا}_۲ = ۰ \\ \text{ا}_۲\text{لا}_۱ + \text{ب}_۲\text{لا}_۲ = ۰ \end{aligned}\right\} \quad ....(۱)$$

جہاں

$$\left.\begin{aligned} \text{لا}_۱ = \text{ع}_۱\text{لا}_۱ + \text{ع}_۲\text{لا}_۲ \\ \text{لا}_۲ = \text{ب}_۱\text{لا}_۱ + \text{ب}_۲\text{لا}_۲ \end{aligned}\right\} \quad ....(۲)$$

لا۱ اور لا۲ کی یہ قیمتیں (۱) میں مندرج کرنے سے

$$\left.\begin{aligned} (\text{ا}_۱\text{ع}_۱ + \text{ب}_۱\text{ب}_۱)\text{لا}_۱ + (\text{ا}_۱\text{ع}_۲ + \text{ب}_۱\text{ب}_۲)\text{لا}_۲ = ۰ \\ (\text{ا}_۲\text{ع}_۱ + \text{ب}_۲\text{ب}_۱)\text{لا}_۱ + (\text{ا}_۲\text{ع}_۲ + \text{ب}_۲\text{ب}_۲)\text{لا}_۲ = ۰ \end{aligned}\right\} \quad .....(۳)$$

اب اگر لا۱ اور لا۲ کی قیمتوں (سوائے صفر) کے لئے ہمزاد مساواتیں (۳) ایک ساتھ پوری ہوں تو اس کے لئے ضرور ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_۱\text{ع}_۱ + \text{ب}_۱\text{ب}_۱ & \text{ا}_۱\text{ع}_۲ + \text{ب}_۱\text{ب}_۲ \\ \text{ا}_۲\text{ع}_۱ + \text{ب}_۲\text{ب}_۱ & \text{ا}_۲\text{ع}_۲ + \text{ب}_۲\text{ب}_۲ \end{vmatrix} = ۰ \quad ....(۴)$$

لیکن مساواتیں (۳) پوری ہونگی اگر مساواتیں (۱) پوری ہوں اور
مساواتیں (۱) پوری ہونگی اگر یا

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

یا $ل_1 = 0$ اور $ل_2 = 0$
یعنی موخرالذکر شرط کی وجہ سے

$$\begin{vmatrix} ع_1 & بہ_1 \\ ع_2 & بہ_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

بس اگر مساواتیں (۵) اور (۶) پوری ہوں تو مساوات (۴) بھی
پوری ہوگی لہٰذا مساوات (۴) کے مقطعہ میں مساواتوں (۵) اور (۶)
کے مقطعات بطور اجزائے ضربی شامل ہونگے۔ نیز (۴) کے مقطعہ
کے ابعاد اور مساواتوں (۵) اور (۶) کے مقطعات کے حاصلِ ضرب کے
ابعاد پر غور کرنے سے ظاہر ہے کہ (۴) کا اگر کوئی اور جزوِ ضربی ہو
تو وہ صرف عددی ہوگا، لہٰذا۔

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ع_1 & بہ_1 \\ ع_2 & بہ_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا_1ع_1+ب_1بہ_1 & ا_1ع_2+ب_1بہ_2 \\ ا_2ع_1+ب_2بہ_1 & ا_2ع_2+ب_2بہ_2 \end{vmatrix}$$

کیونکہ مساواتوں کے دونوں طرف $ا_1 ب_2 ع_1 بہ_2$ کے جو سر ہیں
اُن کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ مذکورۂ بالا عددی سر ۱ ہے۔

نتیجہ صریح۔ $$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} ا_1^2+ب_1^2 & ا_1ا_2+ب_1ب_2 \\ ا_1ا_2+ب_1ب_2 & ا_2^2+ب_2^2 \end{vmatrix}$$

مندرجہ بالا طریقۂ ثبوت بالکل عام ہے اور ہر رتبہ کے مقطعات پر
اس کا مساوی طور پر اطلاق ہو سکتا ہے۔

چونکہ ایک مقطعہ کی قیمت میں اسکی قطاروں کو ستونوں میں اور اسکے ستونوں کو قطاروں میں بدلنے سے کوئی فرق نہیں آتا اس لئے ظاہر ہے کہ دو مقطعات کے حاصل ضرب کو ایک مقطعہ کی شکل میں کئی طریقوں سے لکھا جا سکتا ہے، لیکن ان سب کو پھیلانے سے ایک ہی جواب حاصل ہوگا۔

مثال۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ا' & -ب' & ج' \\ -ا'_1 & ب'_1 & -ج'_1 \\ ا'_2 & -ب'_2 & ج'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ا & ب & ج \\ ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \end{vmatrix}^2$$

یہاں ا'، ا'_1، ب'، ب'_1 ..... ، بالترتیب ا، ا_1، ب، ب_1 ..... کے مغائر ہیں۔

فرض کرو کہ دائیں طرف کے مقطعہ کو ق سے اور بائیں طرف کے مقطعہ کو ق' سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ تب

$$ق ق' = \begin{vmatrix} ا ا' - ب ب' + ج ج' & ا_1 ا' - ب_1 ب' + ج_1 ج' & ا_2 ا' - ب_2 ب' + ج_2 ج' \\ -ا ا'_1 + ب ب'_1 - ج ج'_1 & -ا_1 ا'_1 + ب_1 ب'_1 - ج_1 ج'_1 & -ا_2 ا'_1 + ب_2 ب'_1 - ج_2 ج'_1 \\ ا ا'_2 - ب ب'_2 + ج ج'_2 & ا_1 ا'_2 - ب_1 ب'_2 + ج_1 ج'_2 & ا_2 ا'_2 - ب_2 ب'_2 + ج_2 ج'_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ق & 0 & 0 \\ 0 & ق & 0 \\ 0 & 0 & ق \end{vmatrix}$$ (دفعہ ۴۹۳) پس ق ق' = ق^۳، لہٰذا ق' = ق^۲

امثلہ نمبری ۳۳ (ا)

ذیل کے مقطعات کی قیمتیں محسوب کرو۔

(۱)
| ۱ ۱ ۱ |
| ۳۵ ۳۶ ۳۴ |
| ۲۳ ۲۶ ۲۵ |

(۲)
| ۱۳ ۱۶ ۱۹ |
| ۱۴ ۱۷ ۲۰ |
| ۱۵ ۱۸ ۲۱ |

(۳)
| ۱۳ ۳ ۲۳ |
| ۳۰ ۷ ۵۳ |
| ۳۹ ۹ ۸۰ |

(۴)
| ا ھ گ |
| ھ ب ف |
| گ ف ج |

(۵)
| ا ی -[illegible] |
| -ی ا [illegible] |
| ما -لا |

(۶)
| ۱ ۱ ۱ |
| ۱ ۱+لا ۱ |
| ۱ ۱ ۱+ما |

(۷)
| ا-ب ب-ج ج-ا |
| ب-ج ج-ا ا-ب |
| ج-ا ا-ب ب-ج |

(۸)
| ب+ج ا ا |
| ب ج+ا ب |
| ج ج ا+ب |

اگر ۱ کا ایک جذرالکعب س ہو تو ذیل کے دو مقطعات کی قیمتیں معلوم کرو

(۹)
| ۱ س س² |
| س س² ۱ |
| س² ۱ س |

(۱۰)
| ۱ س³ س² |
| س³ ۱ س |
| س² س ۱ |

۱۱- ذیل کی مساواتوں

ال+ج م+ب ن=۰، ج ل+ب م+ا ن=۰، ب ل+ا م+ج ن=۰

میں سے ل، م، ن کو ساقط کرو اور نتیجہ کو سادہ ترین شکل میں لکھو

۱۲- مقطعات کو پھیلائے بغیر ثابت کرو کہ

ا ب ج		ما ب ق		لا ما ی
لا ما ی	=	لا ا ف	=	ف ق ر
ف ق ر		ی ج ر		ا ب ج

۱۳- ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱) $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{لا} \\ \text{م} & \text{م} & \text{م} \\ \text{ب} & \text{لا} & \text{ب} \end{vmatrix} = ٠$

(۲) $\begin{vmatrix} ١٥ - ٢\text{لا} & ١١ & ١٠ \\ ١١ - ٣\text{لا} & ١٦ & ١٦ \\ ٧ - \text{لا} & ١٤ & ١٣ \end{vmatrix} = ٠$

ذیل کی مماثلات کو ثابت کرو:

۱۴- $\begin{vmatrix} \text{ب}+\text{ج} & \text{ج}+\text{ا} & \text{ا}+\text{ب} \\ \text{ق}+\text{ر} & \text{ر}+\text{ف} & \text{ف}+\text{ق} \\ \text{ما}+\text{ی} & \text{ی}+\text{لا} & \text{لا}+\text{ما} \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ف} & \text{ق} & \text{ر} \\ \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} \end{vmatrix}$

۱۵- $\begin{vmatrix} ١ & \text{ا} & \text{ا}^٢ \\ ١ & \text{ب} & \text{ب}^٢ \\ ١ & \text{ج} & \text{ج}^٢ \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})$

۱۶- $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا}^٣ & \text{ب}^٣ & \text{ج}^٣ \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})$

۱۷- $\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} \\ \text{لا}^٢ & \text{ما}^٢ & \text{ی}^٢ \\ \text{ما ی} & \text{ی لا} & \text{لا ما} \end{vmatrix} = (\text{ما}-\text{ی})(\text{ی}-\text{لا})(\text{لا}-\text{ما})(\text{ما ی}+\text{ی لا}+\text{لا ما})$

۱۸- $\begin{vmatrix} -٢\text{ا} & \text{ا}+\text{ب} & \text{ا}+\text{ج} \\ \text{ب}+\text{ا} & -٢\text{ب} & \text{ب}+\text{ج} \\ \text{ج}+\text{ا} & \text{ج}+\text{ب} & -٢\text{ج} \end{vmatrix} = ٤(\text{ب}+\text{ج})(\text{ج}+\text{ا})(\text{ا}+\text{ب})$

۱۹- $\begin{vmatrix} (\text{ب}+\text{ج})^٢ & \text{ا}^٢ & \text{ا}^٢ \\ \text{ب}^٢ & (\text{ج}+\text{ا})^٢ & \text{ب}^٢ \\ \text{ج}^٢ & \text{ج}^٢ & (\text{ا}+\text{ب})^٢ \end{vmatrix} = ٢\,\text{ا ب ج}\,(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^٣$

۲۰- $\begin{vmatrix} ٠ & ج & ب \\ ج & ٠ & ا \\ ب & ا & ٠ \end{vmatrix}^2$ کو مقطعہ کی شکل میں لکھو۔

۲۱- وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات ل لا + م ما + ن ی = ٠ مجہول مقداروں کی قیمتوں کے تین جٹوں (ا، ب، ج)، (ا′، ب′، ج′)، (ا″، ب″، ج″) سے پوری ہو اور ثابت کرو کہ یہ شرط وہی ہے جو تین مساواتوں ا لا + ب ما + ج ی = ٠، ا′ لا + ب′ ما + ج′ ی = ٠، ا″ لا + ب″ ما + ج″ ی = ٠ کے ایک ساتھ ل، م، ن سے پورے ہونے کی شرط ہے۔

۲۲- $\begin{vmatrix} ا^2 + ل^2 & اب + ج ل & ج ا - ب ل \\ اب - ج ل & ب^2 + ل^2 & ب ج + ا ل \\ ج ا + ب ل & ب ج - ا ل & ج^2 + ل^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ل & ج & -ب \\ -ج & ل & ا \\ ب & -ا & ل \end{vmatrix}$

کی قیمت معلوم کرو

۲۳- ثابت کرو کہ $\begin{vmatrix} ا + خ ب & ج + خ د \\ -ج + خ د & ا - خ ب \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ع - خ ب & ج - خ ل \\ -ج - خ ل & ع + خ ب \end{vmatrix}$

جہاں خ = $\sqrt{-1}$، ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\begin{vmatrix} ا′ - خ ب′ & ج′ - خ د′ \\ -ج′ - خ د′ & ا′ + خ ب′ \end{vmatrix}$$

اس سے ذیل کا مسئلہ مستنبط کرو جو ایولر سے منسوب ہے۔

دو جملوں میں ہر ایک چار مربعوں کے حاصل جمع پر مشتمل ہو تو ان دونوں کے حاصل ضرب کو چار مربعوں کے حاصل جمع کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

ذیل کی متماثلہ مساواتیں ثابت کرو۔

Euler

(۱)
$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{لا} \\ \text{م} & \text{م} & \text{م} \\ \text{ب} & \text{لا} & \text{ب} \end{vmatrix} = ۰$$

(۲)
$$\begin{vmatrix} ۱۵ - ۲\text{لا} & ۱۱ & ۱۰ \\ ۱۱ - ۳\text{لا} & ۱۰ & ۱۶ \\ ۷ - \text{لا} & ۱۴ & ۱۳ \end{vmatrix} = ۰$$

ذیل کی متماثلات کو ثابت کرو:

۱۴-
$$\begin{vmatrix} \text{ب}+\text{ج} & \text{ج}+\text{ا} & \text{ا}+\text{ب} \\ \text{ق}+\text{ر} & \text{ر}+\text{ف} & \text{ف}+\text{ق} \\ \text{ما}+\text{ی} & \text{ی}+\text{لا} & \text{لا}+\text{ما} \end{vmatrix} = ۲\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ف} & \text{ق} & \text{ر} \\ \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} \end{vmatrix}$$

۱۵-
$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{ا} & \text{ا}^2 \\ ۱ & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ ۱ & \text{ج} & \text{ج}^2 \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})$$

۱۶-
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ا}^3 & \text{ب}^3 & \text{ج}^3 \end{vmatrix} = (\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})$$

۱۷-
$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} \\ \text{لا}^2 & \text{ما}^2 & \text{ی}^2 \\ \text{مای} & \text{یلا} & \text{لاما} \end{vmatrix} = (\text{ما}-\text{ی})(\text{ی}-\text{لا})(\text{لا}-\text{ما})(\text{مای}+\text{یلا}+\text{لاما})$$

۱۸-
$$\begin{vmatrix} -۲\text{ا} & \text{ا}+\text{ب} & \text{ا}+\text{ج} \\ \text{ب}+\text{ا} & -۲\text{ب} & \text{ب}+\text{ج} \\ \text{ج}+\text{ا} & \text{ج}+\text{ب} & -۲\text{ج} \end{vmatrix} = ۴(\text{ب}+\text{ج})(\text{ج}+\text{ا})(\text{ا}+\text{ب})$$

۱۹-
$$\begin{vmatrix} (\text{ب}+\text{ج})^2 & \text{ا}^2 & \text{ا}^2 \\ \text{ب}^2 & (\text{ج}+\text{ا})^2 & \text{ب}^2 \\ \text{ج}^2 & \text{ج}^2 & (\text{ا}+\text{ب})^2 \end{vmatrix} = ۲\,\text{ابج}(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^3$$

۲۴۔
$$\begin{vmatrix} \text{۱} & \text{ب ج + ا د} & \text{ب}^2\text{ج}^2 + \text{ا}^2\text{د}^2 \\ \text{۱} & \text{ج ا + ب د} & \text{ج}^2\text{ا}^2 + \text{ب}^2\text{د}^2 \\ \text{۱} & \text{ا ب + ج د} & \text{ا}^2\text{ب}^2 + \text{ج}^2\text{د}^2 \end{vmatrix}$$
$$= -(\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{د})(\text{ب}-\text{د})(\text{ج}-\text{د})$$

۲۵۔
$$\begin{vmatrix} \text{ب ج} - \text{ا}^2 & \text{ج ا} - \text{ب}^2 & \text{ا ب} - \text{ج}^2 \\ -\text{ب ج + ج ا + ا ب} & \text{ب ج} - \text{ج ا + ا ب} & \text{ب ج + ج ا} - \text{ا ب} \\ (\text{ا+ب})(\text{ا+ج}) & (\text{ب+ج})(\text{ب+ا}) & (\text{ج+ا})(\text{ج+ب}) \end{vmatrix}$$
$$= ۳(\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا+ب+ج})(\text{ب ج + ج ا + ا ب})$$

۲۶۔
$$\begin{vmatrix} (\text{ا}-\text{لا})^2 & (\text{ا}-\text{ما})^2 & (\text{ا}-\text{ی})^2 \\ (\text{ب}-\text{لا})^2 & (\text{ب}-\text{ما})^2 & (\text{ب}-\text{ی})^2 \\ (\text{ج}-\text{لا})^2 & (\text{ج}-\text{ما})^2 & (\text{ج}-\text{ی})^2 \end{vmatrix}$$
$$= ۲(\text{ب}-\text{ج})(\text{ج}-\text{ا})(\text{ا}-\text{ب})(\text{ما}-\text{ی})(\text{ی}-\text{لا})(\text{لا}-\text{ما})$$

۲۷۔ اس شرط کو کہ جملہ

$$\text{ا عہ}^2 + \text{ب بہ}^2 + \text{ج جہ}^2 + ۲\,\text{اَ بہ جہ} + ۲\,\text{بَ جہ عہ} + ۲\,\text{جَ عہ بہ}$$

عہ، بہ، جہ میں درجہ اول کے دو اجزائے ضربی کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہو ایک مقطعہ کی شکل میں ظاہر کرو۔

۲۸۔ مساوات ذیل

$$\begin{vmatrix} \text{ل} + \text{ا}^2\text{لا} & \text{نَ + ا ب لا} & \text{مَ + ا ج لا} \\ \text{نَ + ا ب لا} & \text{م} + \text{ب}^2\text{لا} & \text{لَ + ب ج لا} \\ \text{مَ + ا ج لا} & \text{لَ + ب ج لا} & \text{ن} + \text{ج}^2\text{لا} \end{vmatrix} = ۰$$

کو حل کرو اور جواب کو مقطعات کی شکل میں ظاہر کرو۔

۴۹۹۔ مقطعات کے خواص کی مدد سے ہمزاد خطی مساواتیں نہایت آسانی سے حل ہو سکتی ہیں۔ فرض کرو کہ مساواتیں یہ ہیں:۔

$$ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 ی + د_1 = 0$$
$$ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2 ی + د_2 = 0$$
$$ا_3 لا + ب_3 ما + ج_3 ی + د_3 = 0$$

ان کو بالترتیب $ا'_1$، $-ا'_2$، $ا'_3$ سے ضرب دو جہاں $ا'_1$، $ا'_2$، $ا'_3$ بالترتیب $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ کے صغائر ہیں ذیل کے مقطعہ میں

$$ق = \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

ان حاصل ضربوں کو جمع کرو۔ تب ما اور ی کے سر دفعہ ۴۹۴ کے روابط کی رُو سے معدوم ہو جاتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$(ا_1 ا'_1 - ا_2 ا'_2 + ا_3 ا'_3) لا + (د_1 ا'_1 - د_2 ا'_2 + د_3 ا'_3) = 0$$

اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$(ب_1 ب'_1 - ب_2 ب'_2 + ب_3 ب'_3) ما + (د_1 ب'_1 - د_2 ب'_2 + د_3 ب'_3) = 0$$

اور $$(ج_1 ج'_1 - ج_2 ج'_2 + ج_3 ج'_3) ی + (د_1 ج'_1 - د_2 ج'_2 + د_3 ج'_3) = 0$$

اب $$ا_1 ا'_1 - ا_2 ا'_2 + ا_3 ا'_3 = -(ب_1 ب'_1 - ب_2 ب'_2 + ب_3 ب'_3)$$
$$= ج_1 ج'_1 - ج_2 ج'_2 + ج_3 ج'_3 = ق$$

پس حل مطلوبہ کو ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\frac{لا}{\begin{vmatrix} د_1 & ب_1 & ج_1 \\ د_2 & ب_2 & ج_2 \\ د_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}} = \frac{-ما}{\begin{vmatrix} د_1 & ا_1 & ج_1 \\ د_2 & ا_2 & ج_2 \\ د_3 & ا_3 & ج_3 \end{vmatrix}} = \frac{ی}{\begin{vmatrix} د_1 & ا_1 & ب_1 \\ د_2 & ا_2 & ب_2 \\ د_3 & ا_3 & ب_3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}}$$

یا زیادہ تشاکلی

$$\frac{\text{لا}}{\begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \end{vmatrix}} = \frac{-\text{ما}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ی}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{د}_3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}}$$

۵۔ فرض کرو کہ ہمیں چار متجانس خطی مساواتوں کا ایک نظام دیا ہے:-

$$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1\text{ی} + \text{د}_1\text{ھ} = 0$$
$$\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2\text{ی} + \text{د}_2\text{ھ} = 0$$
$$\text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3\text{ما} + \text{ج}_3\text{ی} + \text{د}_3\text{ھ} = 0$$
$$\text{ا}_4\text{لا} + \text{ب}_4\text{ما} + \text{ج}_4\text{ی} + \text{د}_4\text{ھ} = 0$$

تب آخر کی تین مساواتوں سے حسب دفعہ ماقبل

$$\frac{\text{لا}}{\begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix}} = \frac{-\text{ما}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ی}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix}} = \frac{-\text{ھ}}{\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 \end{vmatrix}}$$

پہلی مساوات میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے حاصل اسقاط مطلوبہ یہ ہے:-

$$\text{ا}_1\begin{vmatrix} \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix} - \text{ب}_1\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix} + \text{ج}_1\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix} - \text{د}_1\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 \end{vmatrix} = 0$$

اس کو زیادہ مختصر طور پر حسب ذیل شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے:-

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix} = 0$$

یہاں دائیں طرف کا جملہ چوتھے رتبہ کا ایک مقطعہ ہے۔

نیز ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $ا_1$، $ب_1$، $ج_1$، $د_1$ کے سر علامت ہی صحیح علامت کے بالترتیب وہ صغائر ہیں جو ان اجزائے افرادی میں سے گذرنے والے ستون اور قطار کو نکال دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۰۵ ۔ زیادہ عام طور پر اگر ہمارے پاس ن متجانس خطی مساواتیں

$$ا_1 لا_1 + ب_1 لا_2 + ج_1 لا_3 + \dots\dots + ک_1 لا_ن = ۰$$

$$ا_2 لا_1 + ب_2 لا_2 + ج_2 لا_3 + \dots\dots + ک_2 لا_ن = ۰$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$ا_ن لا_1 + ب_ن لا_2 + ج_ن لا_3 + \dots\dots + ک_ن لا_ن = ۰$$

ہوں جن میں ن مجہول مقداریں $لا_1$، $لا_2$، $لا_3$، ..... $لا_ن$ شامل ہوں تو ہم ان مقداروں کو ساقط کرکے نتیجہ کو حسب ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں:-

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 & \dots\dots & ک_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 & \dots\dots & ک_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ا_ن & ب_ن & ج_ن & & ک_ن \end{vmatrix} = ۰$$

اس مساوات کے دائیں جانب کا رکن ایک مقطعہ ہے جس میں ن قطاریں اور ن ستون ہیں، ایسے مقطعہ کو ن' ویں رتبہ کا مقطعہ کہتے ہیں۔

مقطعات کی اس عام ترین شکل پر بحث کرنا کتاب ہذا کے حدود سے باہر ہے تاہم یہ بیان کر دینا کافی ہے کہ مقطعات کے وہ خواص جو دوسرے اور تیسرے رتبہ کے مقطعات کے لئے ثابت کئے جا چکے ہیں وہ بالکل عام ہیں اور ہر رتبہ کے مقطعات پر اُن کا

اطلاق ہو سکتا ہے۔ مثلاً ن ویں مرتبہ کا مندرجہ بالا مقطعہ

$$\text{ا}_1 \text{اَ}_1 - \text{ب}_1 \text{بَ}_1 + \text{ج}_1 \text{جَ}_1 - \text{د}_1 \text{دَ}_1 + \ldots\ldots + (-1)^{\text{ن}-1} \text{ک}_1 \text{کَ}_1$$

$$\text{یا } \text{ا}_1 \text{اَ}_1 - \text{ا}_2 \text{اَ}_2 + \text{ا}_3 \text{اَ}_3 - \text{ا}_4 \text{اَ}_4 + \ldots\ldots + (-1)^{\text{ن}-1} \text{ا}_\text{ن} \text{اَ}_\text{ن}$$

کے مساوی ہے جبکہ اِن کو بالترتیب پہلی قطار یا پہلے ستون سے پھیلایا جائے اِن میں جن حروف پر زبریں ہیں وہ متناظر چھوٹے حروف کے صغائر کو تعبیر کرتے ہیں یعنی زبر والا حرف (ن-۱) ویں رتبہ کے ایک مقطعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ اب اِن (ن-۱) ویں رتبہ والے مقطعات میں سے ہر ایک کو (ن-۲) ویں مرتبہ کے مقطعات کے حاصل جمع کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے اور علیٰ ہٰذالقیاس اِس طرح بالآخر مقطعہ مذکور کی تفصیلی شکل معلوم کیجا سکتی ہے۔ اگرچہ ہر ایک مقطعہ کو مندرجہ بالا طریقہ کے مطابق پھیلایا جا سکتا ہے لیکن یاد رہے کہ یہ طریقہ ہر مقطعہ کو پھیلانے کے لئے ہمیشہ آسان ترین نہیں ہوتا خاص کر اُس صورت میں جبکہ ہمارا مقصد مقطعہ کی پوری قیمت دریافت کرنا نہ ہو بلکہ محض اِس کے اجزائے ترکیبی کی علامات معلوم کرنا مطلوب ہو۔

۵۰۲ - مقطعہ ذیل

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

کی تفصیلی صورت $= \text{ا}_1\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ا}_1\text{ب}_3\text{ج}_2 + \text{ا}_2\text{ب}_3\text{ج}_1 - \text{ا}_2\text{ب}_1\text{ج}_3 + \text{ا}_3\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ا}_3\text{ب}_2\text{ج}_1$

یہ ظاہر ہے کہ ہر ایک جزو ترکیبی تین اجزائے ضربی کے حاصلِ ضرب پر مشتمل ہے۔ جن میں سے ایک ایک ہر قطار سے لیا گیا ہے

اور ایک ایک ہر ستون سے، نیز نصف رقموں کی علامت مثبت ہے اور نصف کی منفی۔ سب اجزائے ترکیبی کی علامتیں حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہو سکتی ہیں، پہلا جزوِ ترکیبی $ا_{۱} ب_{۲} ج_{۳}$ ہے جس میں لاحقے ترتیب حسابی میں ہیں اس کی علامت مثبت ہے، اسکو ہم جزوِ رئیس کہینگے۔ باقی سب اجزائے ترکیبی اس کے اعداد لاحقہ کی ترتیب بدلنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ کسی جزوِ ترکیبی کی علامت معلوم کرنے کا یہ قاعدہ ہے:۔ اگر جزوِ رئیس کے لاحقوں میں سے دو دو لیکر اِن کی ترتیب بدلتے جائیں یہاں تک کہ مذکورہ جزوِ ترکیبی حاصل ہو جائے تو ایسی ترتیبوں کے بدلنے کی تعداد اگر جفت ہو تو اس جزوِ ترکیبی کی علامت مثبت ہوگی اور اگر طاق ہو تو منفی۔ مثلاً جزوِ ترکیبی $ا_{۳} ب_{۲} ج_{۱}$، جزوِ رئیس کے اعداد ۱ اور ۳ کو باہم ایک بار بدلنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے اس کی علامت منفی ہوگی، جزوِ ترکیبی $ا_{۳} ب_{۱} ج_{۲}$ پہلے اعداد ۱ اور ۳ کو باہم بدلنے سے اور پھر اعداد ۱ اور ۲ کو باہم بدلنے سے حاصل ہوتا ہے، اس لئے اس کی علامت مثبت ہے۔

۵۰۳۔ پس وہ مقطعہ جس کا جزوِ رئیس $ا_{۱} ب_{۲} ج_{۳} د_{۴} \ldots$ ہے علامت

$Σ \pm ا_{۱} ب_{۲} ج_{۳} د_{۴} \ldots$ سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

علامت $Σ \pm$ جو جزوِ رئیس کے ماقبل درج کی گئی ہے اس سے اُن تمام اجزائے ترکیبی کا حاصل جمع مُراد ہے جو اسکے اعداد لاحقہ کو مختلف ترتیبوں سے بدلنے سے حاصل ہو سکتے ہیں جبکہ ہر جزوِ ترکیبی کے ماقبل مناسب علامت درج کی جائے۔

بعض اوقات مقطعہ کو اس کے جزوِ رئیس کے گرد خطوط وحدانی لکھنے سے اور بھی زیادہ مختصر شکل میں لکھ سکتے ہیں یعنی

$(ا_{۱} ب_{۲} ج_{۳} د_{۴} \ldots)$، $Σ \pm ا_{۱} ب_{۲} ج_{۳} د_{۴} \ldots$ کی مزید مختصر شکل ہے

مثال۔ بتاؤ کہ مقطعہ (ا۱ ب۲ ج۳ د۴ ع۵) میں جزوِ ترکیبی ا۴ ب۳ ج۱ د۵ ع۲ کی علامت کیا ہے۔

جزوِ بیّن میں ا اور د کے اعداد کو باہم بدلنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ا۴ ب۲ ج۳ د۱ ع۵ اس سے ب اور ج کے اعداد بدلنے سے حاصل ہوتا ہے ا۴ ب۳ ج۲ د۱ ع۵، پھر ج اور د کے حروف بدلنے سے حاصل ہوتا ہے ا۴ ب۳ ج۱ د۲ ع۵ اور بالآخر د اور ع کے حروف بدلنے سے حاصل ہوتا ہے ا۴ ب۳ ج۱ د۵ ع۲ جو مفروضہ جزوِ ترکیبی ہے۔ چونکہ ہم نے ترتیب اعداد کو چار مرتبہ بدلا ہے اس لئے اس جزوِ ترکیبی کی علامت مثبت ہے۔

۵۰۴۔ اگر دفعہ ۵۰۱ میں اجزائے افرادی ب۱، ج۱، ...... ک۱ میں سے ہر ایک صفر ہو تو مقطعہ مذکور ا۱ ا َ۱ کے مساوی رہ جاتا ہے، یعنی بالفاظِ دیگر یہ ا۱ اور ایک (ن - ۱) ویں رتبہ کے مقطعہ کے مساوی ہے، اس سے ہم ذیل کا عام مسئلہ مستنبط کرتے ہیں۔

اگر ن ویں رتبہ کے ایک مقطعہ میں پہلی قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی سوائے پہلے کے صفر ہو تو یہ مقطعہ اس جزوِ افرادی اور اس (ن - ۱) ویں رتبہ کے مقطعہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا جو اول الذکر جزوِ افرادی میں سے گذرنے والے ستون اور قطار کو حذف کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

نیز چونکہ قطاروں کے اور ستونوں کے مناسب تبادلہ سے کوئی سا جزوِ افرادی پہلے مقام پر لایا جا سکتا ہے اس سے ظاہر ہے کہ اگر کسی قطار یا ستون کے سب اجزائے افرادی سوائے ایک کے صفر ہوں تو مقطعہ اس سے نچلے رتبہ کے مقطعہ میں نہایت آسانی سے تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

یہ امر بعض اوقات مقطعات کے اختصار کے لئے نہایت کارآمد ہوتا ہے۔

مثال۔ مقطعہ ذیل کی قیمت معلوم کرو:۔

$$\begin{vmatrix} 39 & 20 & 11 & 30 \\ 9 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 36 & -2 & 11 \\ 22 & 17 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

پہلے ستون کے ہر ایک جزو افرادی میں سے دُوسرے ستون کے متناظر جزو افرادی کا دُگنا تفریق کرو، نیز چوتھے ستون کے ہر ایک جزو افرادی میں سے دُوسرے ستون کے متناظر جزو افرادی کا تین گنا تفریق کرو۔ اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} 5 & 20 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & 36 & -2 & 15 \\ 4 & 17 & 19 & 0 \end{vmatrix}$$

اور چونکہ دوسری قطار کے سب اجزائے افرادی سوائے ایک کے صفر ہیں۔

اس لئے مقطعہ بالا $= 3\times \begin{vmatrix} 5 & 20 & 1 \\ 9 & 36 & 15 \\ 40 & 17 & - \end{vmatrix} = 34 \begin{vmatrix} 5 & 20 & 8 \\ 5 & 19 & 8 \\ 4 & 17 & 7 \end{vmatrix}$

$$= 3\times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 19 & 8 \\ 4 & 17 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 9$$

۵۰۵۔ ذیل کی مثالوں میں جو ترکیبیں استعمال کی گئی ہیں وہ بعض اوقات بڑی مفید ثابت ہوئی ہیں:

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ

ا	ب	ج	د	= (ا + ب + ج + د)(ا - ب + ج - د)(ا - ب - ج + د)(ا + ب - ج - د)
ب	ا	د	ج	
ج	د	ا	ب	
د	ج	ب	ا	

سب قطاروں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (ا + ب + ج + د) مقطعہ مذکور کا ایک جزوِضربی ہے، پہلی اور تیسری قطاروں کو جمع کرنے اور حاصل جمع سے دوسری اور چوتھی قطاروں کے حاصل جمع کو تفریق کرنے سے ظاہر ہے کہ ا - ب + ج - د بھی ایک جزوِضربی ہو۔ اسی طرح سے یہ بھی بتایا جاسکتا ہے کہ ا - ب - ج + د اور ا + ب - ج - د بھی اجزائے ضربی ہیں - بقیہ جزوِضربی صرف عددی ہے اور $ا^۴$ والی رقموں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عددی جزوِضربی ۱ ہے، پس نتیجہ مطلوبہ آسانی سے حاصل ہوسکتا ہے -

مثال ۲ - ثابت کرو کہ

۱	۱	۱	۱	= (ا - ب)(ا - ج)(ا - د)(ب - ج)(ب - د)(ج - د)
ا	ب	ج	د	
$ا^۲$	$ب^۲$	$ج^۲$	$د^۲$	
$ا^۳$	$ب^۳$	$ج^۳$	$د^۳$	

اگر ا = ب تو پہلا اور دوسرا ستون متماثل ہو جاتے ہیں اور مقطعہ بالا صفر ہوجاتا ہے - پس (ا - ب) مقطعہ مذکور کا ایک جزوِضربی ہے (دیکھو دفعہ ۵۱۴)

اسی طرح باقی جملات (ا - ج)، (ا - د)، (ب - ج)، (ب - د)، (ج - د) میں سے ہر ایک جملہ جزوِضربی ہے، ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب چھ ابعاد کا ہے اور چونکہ مقطعہ زیرِبحث بھی چھ ابعاد کا ہے اس لئے باقی جزوِضربی محض عددی ہوگا - نیز $ب ج^۲ د^۳$ والی رقوم کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ یہ عددی جزوِضربی ۱ ہے - پس نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے

امثلہ نمبری ۳۳ (ب)

ذیل کے مقطعات کی قیمتیں محسوب کرو۔

۱-

۱	۱	۱	۱
۱	۲	۳	۴
۱	۳	۶	۱۰
۱	۴	۱۰	۲۰

۲-

۷	۱۳	۱۰	۶
۵	۹	۷	۴
۸	۱۲	۱۱	۷
۴	۱۰	۶	۳

۳-

ا	۱	۱	۱
۱	ا	۱	۱
۱	۱	ا	۱
۱	۱	۱	ا

۴-

۰	۱	۱	۱
۱	ب + ج	ا	ا
۱	ب	ج + ا	ب
۱	ج	ج	ا + ب

۵-

۳	۲	۱	۴
۱۵	۲۹	۲	۱۴
۱۶	۱۹	۳	۱۷
۳۳	۳۹	۸	۳۸

۶-

۱+ا	۱	۱	۱
۱	۱+ب	۱	۱
۱	۱	۱+ج	۱
۱	۱	۱	۱+د

۷-

۰	ل	م	ی
ل	۰	ی	م
م	ی	۰	ل
ی	م	ل	۰

۸-

۰	ل	م	ی
-ل	۰	ج	ب
-م	-ج	۰	ا
-ی	-ب	-ا	۰

۹-

ا	ب	ج	د
ا	ا + ب	ا + ب + ج	ا + ب + ج + د
ا	۲ا + ب	۳ا + ۲ب + ج	۴ا + ۳ب + ۲ج + د
ا	۳ا + ب	۶ا + ۳ب + ج	۱۰ا + ۶ب + ۳ج + د

۱۰- اگر ا کا ایک جذر الکعب [illegible] ہو تو ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{س} & \text{س}^{۲} & \text{س}^{۳} \\ \text{س} & \text{س}^{۲} & \text{س}^{۳} & \text{ا} \\ \text{س}^{۲} & \text{س}^{۳} & \text{ا} & \text{س} \\ \text{س}^{۳} & \text{ا} & \text{س} & \text{س}^{۲} \end{vmatrix} \text{ کا مربع } = \begin{vmatrix} ۱ & ۲- & ۱ & ۱ \\ ۲- & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۲- \\ ۱ & ۱ & ۲- & ۱ \end{vmatrix}$$

اور اس سے حاصل کرو کہ دائیں جانب کے مقطعہ کی قیمت $(\text{ا} - \text{س}^{۴})^{۳}$ ہے۔

۱۱- اگر (ف^{۲} - ب ج) لا + (ج ھ - ف گ) ما + (ب گ - ھ ف) ی = ۰

(ج ھ - ف گ) لا + (گ^{۲} - ج ا) ما + (ا ف - گ ھ) ی = ۰

(ب گ - ھ ف) لا + (ا ف - گ ھ) ما + (ھ^{۲} - ا ب) ی = ۰

تو ثابت کرو کہ

ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^{۲} - ب گ^{۲} - ج ھ^{۲} = ۰

حادلات ذیل کو حل کرو۔

۱۲- لا + ما + ی = ۱

ا لا + ب ما + ج ی = ک

ا^{۲} لا + ب^{۲} ما + ج^{۲} ی = ک^{۲}

۱۳- ا لا + ب ما + ج ی = ک

ا^{۲} لا + ب^{۲} ما + ج^{۲} ی = ک^{۲}

ا^{۳} لا + ب^{۳} ما + ج^{۳} ی = ک^{۳}

۱۴- لا + ما + ی + و = ۱

ا لا + ب ما + ج ی + د و = ک

ا^{۲} لا + ب^{۲} ما + ج^{۲} ی + د^{۲} و = ک^{۲}

ا^{۳} لا + ب^{۳} ما + ج^{۳} ی + د^{۳} و = ک^{۳}

۱۵- ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ب + ج - ا - د} & \text{ب ج - ا د} & \text{ب ج (ا + د) - ا د (ب + ج)} \\ \text{ج + ا - ب - د} & \text{ج ا - ب د} & \text{ج ا (ب + د) - ب د (ج + ا)} \\ \text{ا + ب - ج - د} & \text{ا ب - ج د} & \text{ا ب (ج + د) - ج د (ا + ب)} \end{vmatrix}$$

= -۲ (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (ا - د) (ب - د) (ج - د)

۱۶- ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}^2 & \text{ا}^2 - (\text{ب} - \text{ج})^2 & \text{ب ج} \\ \text{ب}^2 & \text{ب}^2 - (\text{ج} - \text{ا})^2 & \text{ج ا} \\ \text{ج}^2 & \text{ج}^2 - (\text{ا} - \text{ب})^2 & \text{ا ب} \end{vmatrix} = (\text{ب} - \text{ج})(\text{ج} - \text{ا})(\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2)$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} & \text{ع} & \text{ف} \\ \text{ف} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} & \text{ع} \\ \text{ع} & \text{ف} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{د} & \text{ع} & \text{ف} & \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{د} & \text{ع} & \text{ف} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{د} & \text{ع} & \text{ف} & \text{ا} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\text{ا}} & \bar{\text{ب}} & \bar{\text{ج}} \\ \bar{\text{ج}} & \bar{\text{ا}} & \bar{\text{ب}} \\ \bar{\text{ب}} & \bar{\text{ج}} & \bar{\text{ا}} \end{vmatrix}$$

جہاں
$$\bar{\text{ا}} = \text{ا}^2 - \text{د}^2 + 2\,\text{ج ع} - 2\,\text{ب ف}$$
$$\bar{\text{ب}} = \text{ع}^2 - \text{ب}^2 + 2\,\text{ا ج} - 2\,\text{د ف}$$
$$\bar{\text{ج}} = \text{ج}^2 - \text{ف}^2 + 2\,\text{ا ع} - 2\,\text{ب د}$$

۱۸۔ اگر ایک مقطعہ ن ویں رتبہ کا ایسا ہو کہ اس کی پہلی، دوسری، تیسری ... ن ویں قطاروں کے اجزائے افرادی بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے ...... ن ویں مرتبہ کے اعداد متشکلہ ہوں تو ثابت کرو کہ مقطعہ کی قیمت ا کے مساوی ہے۔

چونتیسواں باب

متفرق مسائل و امثلہ

۵۰۶ - ہم اس باب کے شروع میں صورت جبریہ کے قیام کے متعلق چند باتیں درج کریں گے اور اس اثناء میں چند دیگر اساسی کلیات کی نظرثانی کریں گے جو پیشتر ازیں ثابت کئے جا چکے ہیں۔

۵۰۷ - جبریہ اصولوں کی بحث میں ہمیشہ تحلیلی طرز عمل سے کام لیا جاتا ہے شروع میں ہی ہم نئے نئے نام اور قواعد مندرج نہیں کرتے بلکہ مجرد اعداد کے حساب کے متعلق اپنی معلومات کی مدد سے پہلے چند ایسے عمل اور کلیات ثابت کرتے ہیں جنکی تصدیق ہر مخصوص صورت میں نہایت آسانی سے ہوسکتی ہے ان اعمال کے عام نظریہ کو ہی درحقیقت جبرومقابلہ سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس اختلاف کی بنا پر جبرومقابلہ کی بعض اوقات دو قسمیں قرار دی جاتی ہیں۔ حسابی جبرومقابلہ اور علامتی جبرومقابلہ۔ اول الذکر قسم میں پہلے ہم اپنی علامتوں کو وہ معنی دیتے ہیں جو ازروئے حساب بخوبی سمجھ میں آسکیں اور ان سے اعمال کے اساسی قوانین مستنبط کرتے ہیں۔ آخرالذکر قسم میں ہم پہلے یہ مان لیتے ہیں کہ حسابی الجبرائی قوانین تمام صورتوں میں درست ہیں خواہ ان میں کی علامتوں کی نوعیت کچھ ہی ہو اور پھر یہ دریافت کرتے ہیں کہ ان علامات کو کیا معنی پہنائے جائیں کہ یہ اُن قوانین کے ماتحت رہیں۔ پس جوں جوں ہم معمولی حساب کی حدود سے نکل کر اوپر چڑھتے جاتے ہیں ہمیں نئے نئے نتیجے نکلتے آتے ہیں۔ نئے نئے الفاظ استعمال کرنے پڑتے ہیں اور علامتوں کو ایسے معنی دینے پڑتے ہیں جو ابتدائی تعریفات میں مضمر نہ تھے۔ نیز جس طریقہ سے الجبرا کے عام کلیات منضبط

ہوتے ہیں اُس کی رُو سے ان کی عمومیت اور قیام کے متعلق ہمارے ذہن میں وثوق رہتا ہے خواہ وہ مقادیر جن پر ان ضوابط کا اطلاق ہو از رُوئے حساب سمجھ میں نہ آسکیں۔

۵۰۸۔ اگر ہم اپنی توجہ کو محض علامات کی مثبت صحیح قیمتوں تک محدود رکھیں تو ذیل کے کلیات حساب کی ابتدائی تعریفات کی رُو سے بآسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

۱۔ قانونِ مبادلہ جسکو ہم ذیل کے الفاظ میں بیان کرتے ہیں۔

(۱) جمع اور تفریق کا عمل کسی ترتیب میں ہو سکتا ہے۔

مثلاً ا + ب - ج = ا - ج + ب = ب - ج + ا

(۲) ضرب اور تقسیم کا عمل کسی ترتیب میں ہو سکتا ہے۔

مثلاً ا × ب = ب × ا

ا × ب × ج = ب × ج × ا = ا × ج × ب وغیرہ

اب ÷ ج = ا × ب ÷ ج = (ا ÷ ج) × ب = (ب ÷ ج) × ا

۲۔ کلیۂ تقسیم جس کو ہم ذیل کے الفاظ میں بیان کرتے ہیں: ضرب یا تقسیم کے عمل جمع یا تفریق کے عملوں پر پھیلائے جا سکتے ہیں۔

(ا - ب + ج) م = ام - ب م + ج م

(ا - ب)(ج - د) = ا ج - ا د - ب ج + ب د

[دیکھو ابتدائی الجبرا دفعات ۳۳ اور ۳۴]

اور چونکہ تقسیم کا عمل محض ضرب کے عمل کا اُلٹ ہے اِس لئے تقسیم کے متعلق کلیۂ تقسیم جداگانہ بحث کا محتاج نہیں۔

۳۔ کلیاتِ قوت نما

(۱) $\text{ا}^{\text{م}} \times \text{ا}^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{م}+\text{ن}}$

$\text{ا}^{\text{م}} \div \text{ا}^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{م}-\text{ن}}$

(۲) $(\text{ا}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{ا}^{\text{م}\text{ن}}$

[دیکھو ابتدائی الجبرا دفعات ۲۲۴ تا ۲۳۵]

اِن قوانین کو جو اُوپر مندرج ہوئے نفسِ مضمون کی بنیاد سمجھنا چاہیئے۔
د۔ یہ سب اِس مفروضہ کی بنا پر ثابت کئے جا چکے ہیں کہ استعمال شدہ رموز یا علامات مثبت صیحح عدد ہیں اور اِن کا استعمال صرف ایسے اعمال تک محدود ہے جو از رُوئے حساب با معنی ہیں۔ اگر یہ شرائط پوری نہ ہوں تو علامتی جبر و مقابلہ کی رو سے ہم مان لیتے ہیں کہ حسابی جبر و مقابلہ کے قوانین ہر صورت میں بر قرار رہتے ہیں اور اس مفروضہ کی بنا پر جو معنی ان قوانین سے مستنبط ہوں اُن کو درست تصور کرتے ہیں اِس طرح سے اس امر کی توثیق ہو جاتی ہے کہ جبریہ اعمال کے قوانین ہر صورت میں درست ہیں اور ان کی وسیع اور عام صورت میں معمولی حساب کے قوانین کی مخصوص صورتیں بھی شامل ہیں۔

۵۰۹۔ **قانونِ مبادلہ** سے ہم خطوط وحدانی کے ادخال و اخراج کے قواعد مستنبط کرتے ہیں (دیکھو ابتدائی جبر و مقابلہ دفعات ۲۱، ۲۲) اور ان قواعد کی مدد سے ہم قانونِ تقسیم کو بموجب دفعہ ۳۵ ثابت کرتے ہیں۔ مثلاً یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ

(ا - ب)(ج - د) = ا ج - ا د - ب ج + ب د

جبکہ ا، ب، ج، د مثبت صحیح عدد ہیں اور ا بڑا ہے ب سے اور ج بڑا ہے د سے۔ اب اگر ان علامات پر سے تمام قیود اُٹھا دی جائیں تو یہ معلوم کرنا کہ اس صورت میں نتائج مذکورہ کے کیا معنی ہونگے علامتی جبر و مقابلہ سے متعلق ہے۔ پس ا = ۰ اور ج = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے (- ب) × (- ج) = ب ج یعنی دو منفی مقداروں کا حاصلِ ضرب مثبت ہوتا ہے۔ نیز ب = ۰ اور ج = ۰ رکھنے سے ا × (- د) = - ا د یعنی مختلف العلامت مقادیر کا حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔

اسی طرح کلیۂ تقسیم کے نتیجہ سے ہمیں فوراً قانونِ علامات حاصل ہو جاتا ہے۔ اور آیندہ کے لئے قانونِ علامات بھی ہمارے مسلمہ اور اساسی قوانین میں سے شمار ہونے لگتا ہے۔

۵۱۰ — جبریہ کسور کے خواص کو ثابت کرنے کے لئے جس طریقہ سے اساسی

قوانین سے کام لیا جاتا ہے اُس کے متعلق طالب علم اگر چاہے تو ابتدائی الجبرا کے ابواب ١٩، ٢٠ اور ٢١ کا مطالعہ کر سکتا ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ جن رموز اور اعمال کو بظاہر کوئی راست یا ابتدائی مفہوم پہنانا ناممکن نہیں اُن کی تعبیر اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ حسابی جبر و مقابلہ کے قوانین کے مطابق ہو جاتے ہیں۔

١١٥۔ قوت نماؤں کے کلیہ پر ابتدائی جبر و مقابلہ کے تیسویں باب میں مفصل بحث کی جا چکی ہے جب م اور ن مثبت صحیح اعداد ہوں اور م > ن تو ہم براہ راست قوت نما کی تعریف سے ثابت کرتے ہیں کہ

$$ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}\text{،}\quad ا^{م} \div ا^{ن} = ا^{م-ن}\text{،}\quad (ا^{م})^{ن} = ا^{من}$$

اس کے بعد ہم مان لیتے ہیں کہ ان میں سے پہلا ضابطہ صحیح رہتا ہے جبکہ قوت نماؤں پر سے تمام قیود ہٹا لی جائیں اور اس طرح پر اُن رموز کے لئے جن پر ہماری ابتدائی تعریف کا اطلاق نہیں ہوتا ہم معنی اور مفہوم تجویز کرنے کی کوشش کرتے ہیں اس طرح سے $ا^{\frac{م}{ن}}$، $ا^{0}$، $ا^{-ن}$ کے لئے جو مفہوم حاصل ہوتے ہیں وہ باقی کے دو قوانین کے عین مطابق ہیں، پس آیندہ کے لئے قوت نماؤں کے کلیہ کو پوری عمومیت اور کامل موافقت کے ساتھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

١١٢٥۔ باب ہشتم میں ہم نے علامت خ یا $\sqrt{-1}$ کی تعریف یوں کی تھی کہ یہ ربط $خ^{2} = -1$ کو پورا کرتا ہے۔ اس تعریف سے اور نیز خ کو جبر و مقابلہ کے عام ضوابط کے ماتحت لانے سے ہم ا + خ ب کی شکل کے جملات کے خواص پر بحث کر سکتے ہیں۔ ا + خ ب کو جس میں حقیقی اور خیالی مقادیر ملی ہوتی ہیں بعض اوقات ملتف اعداد سے موسوم کرتے ہیں۔ دفعات ٩٢ تا ١٠٥ کی رو سے دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر ہم کسی ملتف عدد پر جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کا عمل کریں تو جواب بالعموم خود ایک ملتف عدد ہوگا۔ نیز چونکہ کسی منطق تفاعل پر مندرجہ بالا اعمال کے سوائے کوئی اور عمل نہیں کیا جاتا اس لئے ظاہر ہے کہ کسی ملتف عدد کا کوئی منطق تفاعل بھی ملتف عدد ہوتا ہے۔ $ا^{لا + خ ما}$، لوک (لا + خ ما) وغیرہ کی شکل کے جملوں پر علم مثلث کے بغیر مفصل بحث نہیں کی جا سکتی۔ لیکن

ڈی ماٹیور[1] کے مسئلہ سے بہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ ایسے تفاعل ا + خ ب کی شکل کے ایک ملتف عدد میں تحویل ہو سکتے ہیں۔

جملہ و^(لا+خ ما) زیادہ عام شکل کے جملہ ا^(لا+خ ما) میں شامل ہے لیکن اس پر بحث کرنے کا ایک اور طریقہ قابل توجہ ہے۔

دفعہ ۲۲۰ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر لا کوئی حقیقی مقدار ہو تو

و^لا = نہا (۱ + لا/ن)^ن جبکہ ن مائل بہ لا تناہی ہو

مقدار و^(لا+خ ما) کی تعریف بھی حسبہ مساوات ذیل

و^(لا+خ ما) = نہا (۱ + (لا + خ ما)/ن)^ن جب کہ ن لا تناہی پر سے ہو سکتی ہے۔

جس میں لا اور ما حقیقی مقداریں ہیں۔

ملتف اعداد کے نظریہ کی نشو و نما پر شالمک[2] کی کتاب "ہینڈ بک آف الجبریکن انیلیسس" کے ابواب ۱۰، ۱۱ میں مفصل بحث کی گئی ہے۔

۱۳ ۵ - اب ہم اُن طریقوں کی توضیح کے لئے جو مساواتوں کے نظریہ میں اور کئی تماثلات کے ثابت کرنے میں مفید ثابت ہونگے چند مسائل اور امثلہ ذیل میں درج کرتے ہیں۔

۱۴ ۵ - اگر لا کے کسی منطق صحیح تفاعل کو لا - ا پر تقسیم کیا جائے تو بتاؤ کہ باقی کیا بچے گی۔

فرض کرو کہ ف(لا) لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہے، ف(لا) کو لا - ا پر تقسیم کرو تاوقتیکہ ایسی باقی نکل آئے جس میں لا شامل نہ ہو۔ فرض کرو کہ ق خارج قسمت اور ب باقی ہے۔

تب　ف (لا) = ق (لا - ا) + ب

چونکہ ب میں لا شامل نہیں ہے اس لئے اس کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہ ہوگی خواہ ہم لا کو کوئی قیمت دیں، لا = ا رکھو تب

ف (ا) = ق × ۰ + ب

[1] De Moivre　[2] Schlömilch

اب لا کی محدود قیمتوں کے لئے ق کی قیمت محدود ہوتی ہے

اس لئے ب = ف (ا)

نتیجہ صریح ۔ اگر ف (لا) پورا تقسیم ہو جائے لا ۔ ا پر تو ب = ۰

یعنی ف (ا) = ۰ ، پس اگر لا کا ایک منطق صحیح تفاعل صفر ہو جائے جبکہ لا = ا تو یہ لا ۔ ا پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے ۔

۱۵ ۵ ۔ دفعۂ ما قبل کا مسئلہ اس قدر ضروری ہے کہ ہم اس کا ایک اور ثبوت ذیل میں درج کرتے ہیں ، اس ثبوت میں ، مزید فائدہ یہ ہے کہ اثنائے عمل میں خارج قسمت کی شکل بھی حاصل کیجاتی ہے ۔

فرض کرو کہ تفاعل ن ابعاد کا ہے اور

$$ف_۰لا^{ن} + ف_۱لا^{ن-۱} + ف_۲لا^{ن-۲} + ف_۳لا^{ن-۳} + \dots\dots + ف_ن$$

سے تعبیر ہوتا ہے ، تب خارج قسمت (ن ۔ ۱) ابعاد کا تفاعل ہوگا ، اس کو

$$ق_۰لا^{ن-۱} + ق_۱لا^{ن-۲} + ق_۲لا^{ن-۳} + \dots\dots\dots + ق_{ن-۱}$$

سے تعبیر کرو ۔ اب اگر باقی جس میں لا شامل نہ ہو ب ہو تو ظاہر ہے کہ

$$ف_۰لا^{ن} + ف_۱لا^{ن-۱} + ف_۲لا^{ن-۲} + ف_۳لا^{ن-۳} + \dots\dots\dots + ف_ن$$

$$= (لا - ا)\left\{ق_۰لا^{ن-۱} + ق_۱لا^{ن-۲} + ق_۲لا^{ن-۳} + \dots\dots + ق_{ن-۱}\right\} + ب$$

ضرب دینے اور لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$ق_۰ = ف_۰$$

$$ق_۱ - اق_۰ = ف_۱ \quad یعنی \quad ق_۱ = اق_۰ + ف_۱$$

$$ق_۲ - اق_۱ = ف_۲ \quad یعنی \quad ق_۲ = اق_۱ + ف_۲$$

$$ق_۳ - اق_۲ = ف_۳ \quad یعنی \quad ق_۳ = اق_۲ + ف_۳$$

....

$ب - ا ق_{ن-۱} = ف_ن$ یعنی $ب = ا ق_{ن-۱} + ف_ن$

اس سے ظاہر ہے کہ خارج قسمت کے متواتر سر اس طرح بنتے ہیں۔ خارج قسمت کی رقم ماقبل کے سر کو ا سے ضرب دو اور مقسوم میں اگلی رقم کا جو سر ہے اس کو اس حاصل ضرب میں جمع کر دو۔ خارج قسمت کی متواتر رقوم اور باقی کے بنانے کا عمل ذیل کی ترتیب سے واضح ہوسکتا ہے:-

$ف_۰$	$ف_۱$	$ف_۲$	$ف_۳$	......	$ف_{ن-۱}$	$ف_ن$
	$ا ق_۰$	$ا ق_۱$	$ا ق_۲$		$ا ق_{ن-۲}$	$ا ق_{ن-۱}$
$ق_۰$	$ق_۱$	$ق_۲$	$ق_۳$		$ق_{ن-۱}$	$ب$

پس $ب = ا ق_{ن-۱} + ف_ن = ا (ا ق_{ن-۲} + ف_{ن-۱}) + ف_ن = ...$

$= ف_۰ ا^{ن} + ف_۱ ا^{ن-۱} + ف_۲ ا^{ن-۲} + ... + ف_ن$

اگر مقسوم علیہ $لا - ا$ ہو تو بھی یہ طریقہ استعمال ہوسکتا ہے لیکن اس صورت میں ضارب ا کی بجائے $- ا$ ہوگا۔

مثال - اگر $۳ لا^۷ - لا^۶ + ۳۱ لا^۴ + ۲۱ لا + ۵$ کو $لا + ۲$ پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت اور باقی معلوم کرو۔

یہاں ضارب -۲ ہے، لہٰذا

۳	۱-	۰	۳۱	۰	۰	۲۱	۵
	۶-	۱۴	۲۸-	۶-	۱۲	۲۴-	۶
۳	۷-	۱۴	۳	۶-	۱۲	۳-	۱۱

پس خارج قسمت $۳ لا^۶ - ۷ لا^۵ + ۱۴ لا^۴ + ۳ لا^۳ - ۶ لا^۲ + ۱۲ لا - ۳$ ہے اور باقی ۱۱ ہے۔

۱۶۵۔ مشق ماقبل میں اختصار کی خاطر مختلف رقوم کے صرف سر درج کئے گئے ہیں اور

لا کی جن قوتوں کی رقمیں موجود نہیں اُن کے سروں کی بجائے صفر لکھے گئے ہیں منفردہ سروں کے استعمال کا یہ طریقہ اکثر اوقات ابتدائی جبری اعمال میں خاص طور پر جبکہ تفاعل منطق صحیح ہوں بہت سی زحمت بچانے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے ذیل میں ایک اور مثال درج کی جاتی ہے۔

مثال۔ ۳ لا⁵ - ۸ لا⁴ - ۵ لا³ + ۲۶ لا² - ۳۳ لا + ۲۶ کو لا³ - ۲ لا² - ۴ لا + ۸ پر تقسیم کرو۔

۸ - ۴ + ۲ + ۱) ۲۶ + ۳۳ - ۲۶ + ۵ - ۸ - ۳ (۳ + ۲ - ۳

۲۴ - ۱۲ + ۶ + ۳

۳۳ - ۲ + ۰ + ۲ -

۱۶ + ۸ - ۴ - ۲ -

۲۶ + ۱۰ - ۹ - ۳

۲۴ - ۱۲ + ۶ + ۳

۲ + ۵ -

پس خارج قسمت ۳ لا² + ۲ لا - ۳ ہے اور باقی - ۵ لا + ۲

یہ بات قابلِ غور ہے کہ مقسوم علیہ میں پہلی رقم کے سوائے باقی سب رقموں کی علامتیں بدل دی گئی ہیں، اِس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ عمل کی متواتر منزلوں پر ہم تفریق کے عمل کی بجائے جمع کا عمل کر سکتے ہیں۔

۷۱۵۔ ذیل کی ترتیب سے عمل اور بھی مختصر ہو جاتا ہے، اِس طریقہ کو ہارنر کا ترکیبی تقسیم کا طریقہ کہتے ہیں۔

۲۶ + ۳۳ - ۲۶ + ۵ - ۸ - ۳ | ۱

۲۴ - ۱۲ + ۶ | ۲

۱۶ + ۸ - ۴ - | ۴

۲۴ - ۱۲ + ۶ + | ۸ -

۲ + ۵ - ۰ + ۳ + ۲ - ۳

[تشریح۔ انتصابی خط کے دائیں طرف کے اعداد کا ستون مقسوم علیہ کے سروں پر مشتمل ہے جن کی علامتوں کو سوائے پہلے سر کی علامت کے بدل دیا جاتا ہے۔ دوسری

اُفقی قطار بالترتیب ۲، ۴، - ۸ کو ۳ سے جو خارج قسمت کی پہلی رقم ہے ضرب دینے سے حاصل کی جاتی ہے۔ پھر انتصابی خط کے بائیں طرف جو عددوں کا دوسرا ستون ہے اس کو جمع کرتے ہیں۔ اس سے ہمیں ۲ ملتا ہے جو خارج قسمت کی دوسری رقم کا سر ہے پھر اس محصل عدد ۲ کو انتصابی خط کے دائیں طرف کے اعداد (۲، ۴، - ۸) سے ضرب دیکر تیسری اُفقی قطار حاصل کرتے ہیں، اور تیسرے ستون کو جمع کرتے ہیں، جس سے ۳ حاصل ہوتا ہے جو خارج قسمت کی تیسری رقم کا سر ہے اور علیٰ ہذالقیاس ستونوں کو جمع کرنے سے ہمیں باقی کی رقموں کے سر حاصل ہوتے ہیں]

مثال۔ ۶ $لا^{۶}$ + ۵ $لا^{۵}$ ب - ۸ $لا^{۴}$ $ب^{۲}$ - ۶ $لا^{۳}$ $ب^{۳}$ - ۶ لا $ب^{۵}$ کو ۲ $لا^{۲}$ + ۳ لا ب - $ب^{۲}$ پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت کی چار رقمیں حاصل کرو۔

	۶ -	۶ -	۸ -	۵ +	۶	۲
		۳ +	۰ +	۹ -		۳ -
	۲ -	۰ +	۶			۰
۱ -	۰ +	۳				۱
۴ - ۰ + ۱۲						
۴ - ۰ + ۱۱ +	۴ -	۰ +	۱ -	۲ -	۳	

پس مطلوبہ خارج قسمت ۳ $لا^{۲}$ - ۲ لا ب - $ب^{۲}$ - ۴ $لا^{-۲}$ $ب^{۴}$ ہے اور باقی ۱۱ لا $ب^{۵}$ - ۴ $لا^{-۲}$ $ب^{۷}$ ہے۔

یہاں ہم مسلسل ستونوں کی رقموں کو حسب سابق جمع کرتے ہیں لیکن ہر ایک مجموعہ کو ۲ پر جو مقسوم علیہ کی پہلی رقم کا سر ہے تقسیم کرتے ہیں، جب خارج قسمت میں رقموں کی مطلوبہ تعداد حاصل ہو جاتی ہے تو باقی ماندہ ستونوں کو محض جمع کرنے سے باقی حاصل ہو جاتی ہے، جہاں موخرالذکر ستونوں کے حاصل جمع کو مقسوم علیہ کی پہلی رقم میں ۲ پر تقسیم نہیں کیا جاتا۔

طالب علم منفردہ سروں کے طریقہ سے تقسیم کامل کرکے اس نتیجہ کی آسانی سے تصدیق کرسکتا ہے۔

۵۱۸۔ دفعہ ۵۱۴ کا اصول جبریہ متماثلات کے ثابت کرنے میں نہایت

کارآمد ہوتا ہے، لیکن اس کی کوئی مثال دینے سے پہلے ہم متشاکل اور متبادل تفاعیل کے متعلق چند امور کا ذکر کر دینا مناسب سمجھتے ہیں۔

اگر ایک تفاعل ایسا ہو کہ اس کے متغیرات کے کسی زوج کو ایک دوسرے سے بدلنے سے تفاعل مذکور میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو تو یہ تفاعل اپنے متغیرات کے لحاظ سے متشاکل کہلاتا ہے۔ مثلاً لا + ما + ی، لا ما + ما ی + ی لا، لا^{3} + ما^{3} + ی^{3} - لا ما ی بالترتیب پہلے دوسرے تیسرے درجہ کے متشاکل تفاعل ہیں۔

یہ بات قابل غور ہے کہ درجہ اول کا تفاعل متشاکل صرف م(لا + ما + ی) کی شکل کا ہو سکتا ہے جہاں م بے تعلق ہو لا، ما، ی سے۔

۵۱۹۔ متشاکل تفاعیل کی تعریف سے ہی ظاہر ہے کہ وہ متشاکل جملوں کا مجموعہ، فرق، حاصل ضرب اور خارج قسمت سب متشاکل ہونگے۔ اس اصول کو ذہن میں رکھنے سے جبریہ عمل کی صحت کو جانچنے کے لئے بعض اوقات بڑی آسانی ہوتی ہے اور بعض صورتوں میں ہم طویل عملوں کی زحمت سے بچ جاتے ہیں۔

مثلاً ہم جانتے ہیں کہ (لا + ما + ی)^{3} کی تفصیل درجۂ سوم کا ایک متجانس جملہ ہوگی اور اس لئے اس کی شکل لا^{3} + ما^{3} + ی^{3} + ا (لا^{2} ما + ما^{2} ی + لا ما^{2} + ما ی^{2} + ی لا^{2} + ی^{2} لا) + ب لا ما ی ہوگی جہاں ا، ب ایسی مقادیر ہیں جو لا، ما، ی کے تابع نہیں ہیں۔

رکھو ی = ۰، تب ا = ۳ کیونکہ ا، (لا + ما)^{3} کی تفصیل میں لا^{2} ما کا سر ہے، پھر لا = ما = ی = ۱ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے ۲۷ = ۳ + (۳ × ۶) + ب یعنی ب = ۶

پس (لا + ما + ی)^{3} = لا^{3} + ما^{3} + ی^{3} + ۳ لا^{2} ما + ۳ لا ما^{2} + ۳ ما^{2} ی + ۳ ی ما^{2}
+ ۳ ی^{2} لا + ۳ ی لا^{2} + ۶ لا ما ی

۵۲۰۔ اگر ایک تفاعل ایسا ہو کہ اس کے متغیرات کے کسی زوج کو باہم بدلنے سے تفاعل کی علامت بدل جائے لیکن اس کی عددی قیمت نہ بدلے تو یہ

تفاعل اپنے متغیرات کے لحاظ سے متبادل کہلاتا ہے۔ مثلاً لا - ما اور

ا^{2}(ب - ج) + ب^{2}(ج - ا) + ج^{2}(ا - ب)

متبادل تفاعل ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ کوئی خطی متبادل تفاعل ایسا نہیں ہوسکتا جس میں دو سے زیادہ متغیر ہوں۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ کسی متشاکل تفاعل اور متبادل تفاعل کا حاصلِ ضرب ایک متبادل تفاعل ہوتا ہے۔

۵۲۱۔ متشاکل اور متبادل تفاعل صرف ایک رقم لکھنے اور اس رقم کے ماقبل علامت Σ جو حاصل جمع کا اختصار ہے ثبت کرنے سے تعبیر کئے جا سکتے ہیں۔ مثلاً Σ ا سے مراد ان تمام رقوم کا حاصل جمع ہے جو ا کے نمونہ کی ہیں، Σ اب سے مراد ان تمام رقوم کا حاصل جمع ہے جو اب کے نمونہ کی ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ مثلاً اگر تفاعل میں چار حروف ا، ب، ج، د ہوں تو

Σ ا = ا + ب + ج + د

Σ اب = اب + اج + اد + ب ج + ب د + ج د

علیٰ ہذالقیاس

اسی طرح سے اگر کسی تفاعل میں تین حروف ا، ب، ج ہوں تو

Σ ا^{2}(ب + ج) = ا^{2}(ب + ج) + ب^{2}(ج + ا) + ج^{2}(ا + ب)

اور Σ ا^{2}ب ج = ا^{2}ب ج + ب^{2}ج ا + ج^{2}ا ب وغیرہ وغیرہ

یہ بات قابل توجہ ہے کہ جب حروف کی تعداد تین ہو تو Σ ا^{2}ب تین رقموں پر نہیں بلکہ چھ رقموں پر مشتمل ہے، یعنی

Σ ا^{2}ب = ا^{2}ب + ا^{2}ج + ب^{2}ج + ب^{2}ا + ج^{2}ا + ج^{2}ب

علامت Σ حروف کے دو یا زیادہ جٹوں کے لحاظ سے جمع کے عمل کو تعبیر کرنے کے لئے بھی استعمال ہو سکتی ہے۔ مثلاً

Σ مای (ب - ج) = مای (ب - ج) + می لا (ج - ا) + لالا (ا - ب)

۵۲۲ - مندرجہ بالا علامت کی مدد سے ہم متشاکل جملات کی قوتوں یا حاصل ضربوں کو نہایت مجمل شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں - مثلاً

(ا + ب + ج)^{3} = Σ ا^{3} + ۳ Σ ا^{2}ب + ۶ ا ب ج

(ا + ب + ج + د)^{3} = Σ ا^{3} + ۳ Σ ا^{2}ب + ۶ Σ ا ب ج

(ا + ب + ج)^{4} = Σ ا^{4} + ۴ Σ ا^{3}ب + ۶ Σ ا^{2}ب^{2} + ۱۲ Σ ا^{2}ب ج

Σ ا × Σ ا^{2} = Σ ا^{3} + Σ ا^{2}ب

مثال ۱ - ثابت کرو کہ

(ا + ب)^{5} - ا^{5} - ب^{5} = ۵ ا ب (ا + ب) (ا^{2} + ا ب + ب^{2})

دائیں طرف کے جملہ کو ج سے تعبیر کرو تب ج ، ا کا ایک ایسا تفاعل ہے جو ا = ۰ رکھنے سے معدوم ہو جاتا ہے - پس ا ، ج کا ایک جزو ضربی ہے ، اسی طرح سے ب ، ج کا ایک اور جزو ضربی ہے ، نیز اگر ا = - ب رکھا جائے تو ج صفر ہو جاتا ہے لہٰذا (ا + ب) ایک جزو ضربی ہے ج کا - اس لئے ج میں جملہ ا ب (ا + ب) بطور جزو ضربی شامل ہے - باقی ماندہ جزو ضربی دو ابعاد کا ہوگا اور چونکہ یہ ا اور ب کے لحاظ سے متشاکل ہے اس لئے اس جزو ضربی کی شکل اَ ا^{2} + بَ ا ب + اَ ب^{2} ہوگی -

پس (ا + ب)^{5} - ا^{5} - ب^{5} = ا ب (ا + ب) (اَ ا^{2} + بَ ا ب + اَ ب^{2}) -

جہاں اَ اور بَ منحصر نہیں ہیں ا اور ب پر -

ا = ۱ ، ب = ۱ رکھنے سے ۱۵ = ۲ اَ + بَ

ا = ۲ ، ب = - ۱ رکھنے سے ۱۵ = ۵ اَ - ۲ بَ

حل کرنے سے اَ = ۵ ، بَ = ۵ ، لہٰذا مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے -

مثال ۲ - (ب^{3} + ج^{3}) (ب - ج) + (ج^{3} + ا^{3}) (ج - ا) + (ا^{3} + ب^{3}) (ا - ب) کے اجزائے ضربی معلوم کرو -

جملہ بالا کو ع سے تعبیر کرو ، تب ع ، ا کا ایک تفاعل ہے جو ا = ب رکھنے سے

معدوم ہوجاتا ہے، پس اس کا ایک جزوِ ضربی (ا - ب) ہے [دیکھو دفعہ ۵۱۴]
اسی طرح سے (ب - ج) اور (ج - ا) بھی اس کے اجزائے ضربی ہیں یعنی ع میں (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب) بطور جزوِ ضربی کے شامل ہوتا ہے۔

نیز چونکہ ع چوتھے درجہ کا ہے، اس لئے باقی جزوِ ضربی پہلے درجہ کا ہوگا اور چونکہ ع ایک متشاکل تفاعل ہے ا، ب، ج کا اس لئے آخر الذکر جزوِ ضربی م(ا + ب + ج) کی شکل کا ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۵۱۸]

∴ ع = م (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)(ا + ب + ج)۔ م کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہم ا، ب، ج کو کوئی ایسی قیمت دے سکتے ہیں جو ہمیں آسان ترین معلوم ہو، ا = ۱، ب = ۰، ج = ۲ رکھنے سے م = ۱ اور اس سے ہمیں مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوجاتا ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ۔

$$(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})^{5} - \text{لا}^{5} - \text{ما}^{5} - \text{ی}^{5} = ۵(\text{ما} + \text{ی})(\text{ی} + \text{لا})(\text{لا} + \text{ما})(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} + \text{لا ما} + \text{لا ی} + \text{ما ی})$$

بائیں جانب کے جملہ کو ع سے تعبیر کرو، تب ع معدوم ہوجاتا ہے جب ما = - ی، پس (ما + ی) ایک جزوِ ضربی ہے ع کا، اسی طرح سے (ی + لا) اور (لا + ما) بھی اجزائے ضربی ہیں۔ لہٰذا (لا + ما)(ما + ی)(ی + لا) جزوِ ضربی ہے ع کا، نیز چونکہ ع پانچویں درجہ کا جملہ ہے، اس لئے باقی جزوِ ضربی دوسرے درجہ کا ہوگا اور چونکہ ع بلحاظ لا، ما، ی کے متشاکل ہے، اسلئے موخر الذکر جزوِ ضربی کی شکل یہ ہوگی۔

$$\text{ا}(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}) + \text{ب}(\text{لا ما} + \text{ما ی} + \text{ی لا})$$

لا = ما = ی = ۱ رکھنے سے ۲ = ا + ب

لا = ۲، ما = ۱، ی = ۰ رکھنے سے ۳۵ = ۵ ا + ۲ ب

حل کرنے سے ا = ب = ۵

پس مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

۵۲۳۔ حوالہ کے لئے ذیل میں ہم ایک فہرست ایسی مساواتِ متماثلہ کی درج کرتے ہیں جو جبریہ جملوں کی تحویل میں کارآمد ہوتی ہیں ان میں سے اکثر ابتدائی الجبرا کے باب ۲۹ میں درج کی جا چکی ہیں۔

$\sum$ ب ج (ب − ج) = − (ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)

$\sum$ ا^{2}(ب − ج) = − (ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)

$\sum$ ا(ب^{2} − ج^{2}) = (ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)

$\sum$ ا^{3}(ب − ج) = − (ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)(ا + ب + ج)

ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} − ۳ ا ب ج = (ا + ب + ج)(ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} − ب ج − ج ا − ا ب)

آخری متماثلہ ذیل کی شکل میں بھی لکھی جا سکتی ہے:-

ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} − ۳ ا ب ج = $\frac{1}{2}$(ا + ب + ج){(ب − ج)^{2} + (ج − ا)^{2} + (ا − ب)^{2}}

(ب − ج)^{3} + (ج − ا)^{3} + (ا − ب)^{3} = ۳(ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)

(ا + ب + ج)^{3} − ا^{3} − ب^{3} − ج^{3} = ۳(ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

$\sum$ ب ج (ب + ج) + ۲ ا ب ج = (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

$\sum$ ا^{2}(ب + ج) + ۲ ا ب ج = (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

(ا + ب + ج)(ب ج + ج ا + ا ب) − ا ب ج = (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

۲ ب^{2} ج^{2} + ۲ ج^{2} ا^{2} + ۲ ا^{2} ب^{2} − ا^{4} − ب^{4} − ج^{4}

= (ا + ب + ج)(ب + ج − ا)(ج + ا − ب)(ا + ب − ج)

امثلہ نمبری ۳۴ (ا)

۱- معلوم کرو کہ ۳ لا^{5} + ۱۱ لا^{4} + ۹۰ لا^{2} − ۱۹ لا + ۵۳ کو لا + ۵ پر تقسیم کرنے سے باقی کیا بچے گی۔

۲ - بتاؤ کہ ا اور ب کس مساوات سے مربوط ہوں کہ $۲لا^۳ - ۷لا^۲ + الا + ب$ پورا تقسیم ہو جائے $لا - ۳$ پر -

۳ - خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جب، $لا^۵ - ۵لا^۴ + ۹لا^۳ - ۶لا^۲ - ۱۶لا + ۱۳$ کو $لا^۲ - ۳لا + ۲$ پر تقسیم کیا جائے -

۴ - اگر $لا^۵ - ۲لا^۴ - ۴لا^۳ + ۱۹لا^۲ - ۳۱لا + ۱۲ + ا$ کا ایک جزوِ ضربی $لا^۲ - ۷لا + ۵$ ہو تو ا کی قیمت معلوم کرو -

۵ - $\frac{۱}{لا^۴ - ۵لا^۳ + ۷لا^۲ + لا - ۸}$ کو لا کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں چار رقموں تک پھیلاؤ اور باقی معلوم کرو -

جملات ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کرو:-

۶ - $ا(ب - ج)^۳ + ب(ج - ا)^۳ + ج(ا - ب)^۳$

۷ - $ا^۴(ب^۲ - ج^۲) + ب^۴(ج^۲ - ا^۲) + ج^۴(ا^۲ - ب^۲)$

۸ - $(ا + ب + ج)^۳ - (ب + ج - ا)^۳ - (ج + ا - ب)^۳ - (ا + ب - ج)^۳$

۹ - $ا(ب - ج)^۲ + ب(ج - ا)^۲ + ج(ا - ب)^۲ + ۸ابج$

۱۰ - $ا(ب^۴ - ج^۴) + ب(ج^۴ - ا^۴) + ج(ا^۴ - ب^۴)$

۱۱ - $(ب ج + ج ا + ا ب)^۳ - ب^۳ج^۳ - ج^۳ا^۳ - ا^۳ب^۳$

۱۲ - $(ا + ب + ج)^۴ - (ب + ج)^۴ - (ج + ا)^۴ - (ا + ب)^۴ + ا^۴ + ب^۴ + ج^۴$

۱۳ - $(ا + ب + ج)^۵ - (ب + ج - ا)^۵ - (ج + ا - ب)^۵ - (ا + ب - ج)^۵$

۱۴ - $(لا - ا)^۳(ب - ج)^۳ + (لا - ب)^۳(ج - ا)^۳ + (لا - ج)^۳(ا - ب)^۳$

ذیل کی متماثلات کو ثابت کرو -

۱۵- $\sum(ب+ج-۲ا)^{۳} = ۳(ب+ج-۲ا)(ج+ا-۲ب)(ا+ب-۲ج)$

۱۶- $\frac{ا(ب-ج)^{۲}}{(ج-ا)(ا-ب)} + \frac{ب(ج-ا)^{۲}}{(ا-ب)(ب-ج)} + \frac{ج(ا-ب)^{۲}}{(ب-ج)(ج-ا)} = ا+ب+ج$

۱۷- $\frac{۲ا}{ا+ب} + \frac{۲ب}{ب+ج} + \frac{۲ج}{ج+ا} + \frac{(ب-ج)(ج-ا)(ا-ب)}{(ب+ج)(ج+ا)(ا+ب)} = ۳$

۱۸- $\sum ا^{۲}(ب+ج) - \sum ا^{۳} - ۲ابج = (ب+ج-ا)(ج+ا-ب)(ا+ب-ج)$

۱۹- $\frac{ا^{۳}(ب+ج)}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ب^{۳}(ج+ا)}{(ب-ج)(ب-ا)} + \frac{ج^{۳}(ا+ب)}{(ج-ا)(ج-ب)} = ب ج + ج ا + ا ب$

۲۰- $۴\sum(ب-ج)(ب+ج-۲ا)^{۲} = ۹\sum(ب-ج)(ب+ج-ا)^{۲}$

۲۱- $(ما+ی)^{۲}(ی+لا)^{۲}(لا+ما)^{۲} = \sum لا^{۴}(ما+ی)^{۲} + ۲(\sum ما ی)^{۳} - ۲لا^{۲}ما^{۲}ی^{۲}$

۲۲- $\sum(اب-ج^{۲})(اج-ب^{۲}) = (\sum ب ج)(\sum ب ج - \sum ا^{۲})$

۲۳- $ا ب ج(\sum ا)^{۳} - (\sum ب ج)^{۳} = ا ب ج \sum ا^{۳} - \sum ب^{۳}ج^{۳}$

$= (ا^{۲}-ب ج)(ب^{۲}-ج ا)(ج^{۲}-ا ب)$

۲۴- $\sum(ب-ج)^{۳}(ب+ج-۲ا) = ۰$ اور اس سے مستنبط کرو کہ

$\sum(بہ-جہ)(بہ+جہ-۲عہ)^{۳} = ۰$

۲۵- $(ب+ج)^{۳}+(ج+ا)^{۳}+(ا+ب)^{۳} - ۳(ب+ج)(ج+ا)(ا+ب)$

$= ۲(ا^{۳}+ب^{۳}+ج^{۳} - ۳ا ب ج)$

۲۶- اگر $لا = ب+ج-ا$، $ما = ج+ا-ب$ اور $ی = ا+ب-ج$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^3 + \text{ما}^3 + \text{ی}^3 - 3\,\text{لا ما ی} = 4\,(\text{ا}^3 + \text{ب}^3 + \text{ج}^3 - 3\,\text{ا ب ج})$$

۲۷ - ثابت کرو کہ $\text{ا}^3 + \text{ب}^3 + \text{ج}^3 - 3\,\text{ا ب ج}$ کی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا اگر ہم ا، ب، ج کی بجائے بالترتیب س − ا، س − ب، س − ج رکھیں جہاں $3\,\text{س} = 2\,(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})$

جملات ذیل کی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۸ - $$\frac{\text{ا}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})(\text{لا}-\text{ا})} + \frac{\text{ب}}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})} + \frac{\text{ج}}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج})}$$

۲۹ - $$\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})} + \frac{\text{ب}^2 - \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})} + \frac{\text{ج}^2 - \text{ا}^2 - \text{ب}^2}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})}$$

۳۰ - $$\frac{(\text{ا}+\text{ف})(\text{ا}+\text{ق})}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})(\text{ا}+\text{لا})} + \frac{(\text{ب}+\text{ف})(\text{ب}+\text{ق})}{(\text{ب}-\text{ج})(\text{ب}-\text{ا})(\text{ب}+\text{لا})} + \frac{(\text{ج}+\text{ف})(\text{ج}+\text{ق})}{(\text{ج}-\text{ا})(\text{ج}-\text{ب})(\text{ج}+\text{لا})}$$

۳۱ - $$\sum \frac{\text{ب ج د}}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})(\text{ا}-\text{د})}$$

۳۲ - $$\sum \frac{\text{ا}^2}{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ا}-\text{ج})(\text{ا}-\text{د})}$$

۳۳ - اگر $\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = \text{س}$ اور $\text{لا ما ی} = \text{ف}^2$ تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{ف}}{\text{ما س}} - \frac{\text{ما}}{\text{ف}}\right)\left(\frac{\text{ف}}{\text{ی س}} - \frac{\text{ی}}{\text{ف}}\right) + \left(\frac{\text{ف}}{\text{ی س}} - \frac{\text{ی}}{\text{ف}}\right)\left(\frac{\text{ف}}{\text{لا س}} - \frac{\text{لا}}{\text{ف}}\right) + \left(\frac{\text{ف}}{\text{لا س}} - \frac{\text{لا}}{\text{ف}}\right)\left(\frac{\text{ف}}{\text{ما س}} - \frac{\text{ما}}{\text{ف}}\right) = \frac{4}{\text{س}}$$

متفرق متماثلات

۴۲۵ - بہت سی متماثلات ۱ کے جذر الکعبوں کے خواص کے استعمال سے نہایت آسانی سے ثابت کی جا سکتی ہیں۔ ان جذروں کو حسب معمول ۱، سہ، سہ² سے تعبیر کیا جائیگا۔

مثال۔ ثابت کرو کہ

$$(\text{لا}+\text{ا})^{7}-\text{لا}^{7}-\text{ا}^{7}=7\,\text{لا}\,\text{ا}(\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}^{2}+\text{لا}\,\text{ا}+\text{ا}^{2})^{2}$$

دائیں طرف کا جملہ ع معدوم ہو جاتا ہے اگر لا = ۰، ا = ۰، لا + ا = ۰؛ لہٰذا لا ا (لا + ا) اس کا جزو ضربی ہے۔

لا = سہ ا رکھنے سے

$$\text{ع}=\{(1+\text{سہ})^{7}-\text{سہ}^{7}-1\}\text{ا}^{7}=\{(-\text{سہ}^{2})^{7}-\text{سہ}^{7}-1\}\text{ا}^{7}$$
$$=(-\text{سہ}^{2}-\text{سہ}-1)\,\text{ا}^{7}=0$$

پس ظاہر ہے کہ ع میں ایک جزو ضربی (لا − سہ ا) شامل ہے، اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اس میں لا − سہ² ا بطور جزو ضربی شامل ہے، اس لئے ع، (لا − سہ ا)(لا − سہ² ا) پر تقسیم ہو سکتا ہے یعنی لا² + لا ا + ا² پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

مزید براں چونکہ ع سات ابعاد کا جملہ ہے اور لا ا (لا + ا)(لا² + لا ا + ا²) پانچ ابعاد کا ہے، اس لئے باقی جزو ضربی ل(لا² + ا²) + ب لا ا کی شکل کا ہوگا۔ یعنی

$$(\text{لا}+\text{ا})^{7}-\text{لا}^{7}-\text{ا}^{7}=\text{لا}\,\text{ا}(\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}^{2}+\text{لا}\,\text{ا}+\text{ا}^{2})(\text{ل}\,\text{لا}^{2}+\text{ب}\,\text{لا}\,\text{ا}+\text{ل}\,\text{ا}^{2})$$

لا = ۱، ا = ۱ رکھنے سے $\quad 21=2\,\text{ل}+\text{ب}$

لا = ۲، ا = −۱ رکھنے سے $\quad 21=5\,\text{ل}-2\,\text{ب}$

حل کرنے سے $\quad \text{ل}=7,\ \text{ب}=7$

$$\therefore (\text{لا}+\text{ا})^{7}-\text{لا}^{7}-\text{ا}^{7}=7\,\text{لا}\,\text{ا}(\text{لا}+\text{ا})(\text{لا}^{2}+\text{لا}\,\text{ا}+\text{ا}^{2})^{2}$$

۵۲۵۔ ابتدائی الجبرا سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{ا}^{3}+\text{ب}^{3}+\text{ج}^{3}-3\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}=(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}+\text{ج}^{2}-\text{ا}\,\text{ب}-\text{ب}\,\text{ج}-\text{ج}\,\text{ا})$$

نیز دفعہ ۱۱۰ مشق ۳ کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}+\text{ج}^{2}-\text{ا}\,\text{ب}-\text{ب}\,\text{ج}-\text{ج}\,\text{ا}=(\text{ا}+\text{سہ}\,\text{ب}+\text{سہ}^{2}\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ}^{2}\text{ب}+\text{سہ}\,\text{ج})$$

پس جملہ ا³ + ب³ + ج³ − ۳ ا ب ج تین خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{ا}^{3}+\text{ب}^{3}+\text{ج}^{3}-3\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}=(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ}\,\text{ب}+\text{سہ}^{2}\text{ج})(\text{ا}+\text{سہ}^{2}\text{ب}+\text{سہ}\,\text{ج})$$

مثال۔ ثابت کرو کہ

ا^{3} + ب^{3} + ج^{3} − ۳ اب ج اور لا^{3} + ما^{3} + ی^{3} − ۳ لا ما ی کے حاصل ضرب کو
لا$'^{3}$ + ما$'^{3}$ + ے^{3} − ۳ لا ما ے کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

حاصل ضرب مذکورہ = (ا + ب + ج)(ا + سہ ب + سہ^{2} ج)(ا + سہ^{2} ب + سہ ج)
× (لا + ما + ی)(لا + سہ ما + سہ^{2} ی)(لا + سہ^{2} ما + سہ ی)

ان چھ اجزائے ضربی میں سے دو دو کے زوج

(ا + ب + ج)(لا + ما + ی)،

(ا + سہ ب + سہ^{2} ج)(لا + سہ^{2} ما + سہ ی) اور (ا + سہ^{2} ب + سہ ج)(لا + سہ ما + سہ^{2} ی)

لینے سے ہمیں ذیل کے تین جزوی حاصل ضرب حاصل ہوتے ہیں:۔

(لا$'$ + ما$'$ + ے)، (لا$'$ + سہ ما$'$ + سہ^{2} ے)، (لا$'$ + سہ^{2} ما$'$ + سہ ے)

جہاں لا$'$ = ا لا + ب ما + ج ی ، ما$'$ = ب لا + ج ما + ا ی

ے = ج لا + ا ما + ب ی

پس پورا حاصل ضرب = (لا$'$ + ما$'$ + ے)(لا$'$ + سہ ما$'$ + سہ^{2} ے)(لا$'$ + سہ^{2} ما$'$ + سہ ے)

= لا$'^{3}$ + ما$'^{3}$ + ے^{3} − ۳ لا$'$ ما$'$ ے

۵۲۶ ۔ اُن جملات کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے جن میں مقادیر ا، ب، ج شامل ہوں جبکہ یہ مقادیر مساوات ا + ب + ج = ۰ سے مربوط ہوں ہم ذیل کے اندراجات سے کام لے سکتے ہیں:۔

ا = ھ + ک، ب = سہ ھ + سہ^{2} ک، ج = سہ^{2} ھ + سہ ک

لیکن اگر ا، ب اور ج تشاکل طور پر شامل ہوں تو ذیل کی مثال کا طریقہ قابل ترجیح ہوتا ہے:۔

اگر ا + ب + ج = ۰ تو ثابت کرو کہ

۶(ا^{5} + ب^{5} + ج^{5}) = ۵(ا^{3} + ب^{3} + ج^{3})(ا^{2} + ب^{2} + ج^{2})

یہ مساوات متماثلاً درست ہے (ا + ا لا)(ا + ب لا)(ا + ج لا)

= ۱ + ف لا + ق لا^{2} + ر لا^{3}

جہاں ف = ا + ب + ج ، ق = اب + ب ج + ج ا ، ر = ا ب ج

پس شرط مفروضہ یعنی ا + ب + ج = ۰ کو استعمال کرنے سے

(۱ + ا لا)(۱ + ب لا)(۱ + ج لا) = ۱ + ق لا^{2} + ر لا^{3}

دونوں جانب لوگارتم لینے اور لا^{ن} کے سروں کو مساوی کرنے سے

$\frac{(-1)^{ن-1}}{ن}$ (ا^{ن} + ب^{ن} + ج^{ن}) = لا^{ن} کا سر لوک(۱ + ق لا^{2} + ر لا^{3}) کی تفصیل میں

= لا^{ن} کا سر [(ق لا^{2} + ر لا^{3}) − $\frac{1}{2}$(ق لا^{2} + ر لا^{3})^{2} + $\frac{1}{3}$(ق لا^{2} + ر لا^{3})^{3} − ......] میں

ن = ۲ ، ۳ ، ۵ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

− $\frac{ا^{2} + ب^{2} + ج^{2}}{2}$ = ق ، $\frac{ا^{3} + ب^{3} + ج^{3}}{3}$ = ر ، $\frac{ا^{5} + ب^{5} + ج^{5}}{5}$ = − ق ر

جس سے $\frac{ا^{5} + ب^{5} + ج^{5}}{5}$ = $\frac{ا^{3} + ب^{3} + ج^{3}}{3}$ × $\frac{ا^{2} + ب^{2} + ج^{2}}{2}$

اور مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

اگر ا = بہ − جہ ، ب = جہ − عہ ، ج = عہ − بہ تو شرطِ مذکورہ بالا پوری ہوتی ہے۔

پس عہ ، بہ اور جہ کی تمام قیمتوں کے لئے ذیل کی مساوات متماثل طور پر صحیح ہے۔

۶ {(بہ − جہ)^{5} + (جہ − عہ)^{5} + (عہ − بہ)^{5}}

= ۵ {(بہ − جہ)^{3} + (جہ − عہ)^{3} + (عہ − بہ)^{3}}{(بہ − جہ)^{2} + (جہ − عہ)^{2} + (عہ − بہ)^{2}}

یعنی (بہ − جہ)^{5} + (جہ − عہ)^{5} + (عہ − بہ)^{5} = ۵(بہ − جہ)(جہ − عہ)(عہ − بہ)

(عہ^{2} + بہ^{2} + جہ^{2} − بہ جہ − جہ عہ − عہ بہ)

دفعہ ۲۲۵ مشق ۳ سے مقابلہ کرو۔

امثلہ ۴۳ (ب)

۱۔ اگر (ا + ب + ج)^{۳} = ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} تو ثابت کرو کہ (ا + ب + ج)$^{۲ن+۱}$
= ا$^{۲ن+۱}$ + ب$^{۲ن+۱}$ + ج$^{۲ن+۱}$ جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ (ا + سہ ب + سہ^{۲} ج)^{۳} + (ا + سہ^{۲} ب + سہ ج)^{۳}
= (۲ ا − ب − ج)(۲ ب − ج − ا)(۲ ج − ا − ب)

۳۔ ثابت کرو کہ اگر ن کوئی طاق مثبت صحیح عدد ہو جو ۳ کا کوئی ضعف نہ ہو تو (لا + ما)^{ن} − لا^{ن} − ما^{ن}
تقسیم ہو سکتا ہے لا ما (لا^{۲} + لا ما + ما^{۲}) پر

۴۔ ثابت کرو کہ ا^{۳}(ب ی − ج ما)^{۳} + ب^{۳}(ج لا − ا ی)^{۳} + ج^{۳}(ا ما − ب لا)^{۳}
= ۳ ا ب ج (ب ی − ج ما)(ج لا − ا ی)(ا ما − ب لا)

۵۔ اس جملہ کی قیمت معلوم کرو۔
(ب − ج)(ج − ا)(ا − ب) + (ب − سہ ج)(ج − سہ ا)(ا − سہ ب) + (ب − سہ^{۲} ج)
(ج − سہ^{۲} ا)(ا − سہ^{۲} ب)

۶۔ ثابت کرو کہ (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} − ب ج − ج ا − ا ب)(لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} − ما ی − ی لا − لا ما) کو
لا^{۲} + ما^{۲} + ے^{۲} − لا ما − ما ے − لا ے کی شکل میں لایا جا سکتا ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ (ا^{۲} + ا ب + ب^{۲})(لا^{۲} + لا ما + ما^{۲}) کو
لا$'^{۲}$ + لا$'$ ما$'$ + ما$'^{۲}$ کی شکل میں لایا جا سکتا ہے۔ لا$'$، ما$'$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

ثابت کرو کہ

۸۔ Σ(ا^{۲} + ۲ ب ج)^{۳} − ۳(ا^{۲} + ۲ ب ج)(ب^{۲} + ۲ ج ا)(ج^{۲} + ۲ ا ب)
= (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} − ۳ ا ب ج)^{۲}

۹۔ Σ(ا^{۲} − ب ج)^{۳} − ۳(ا^{۲} − ب ج)(ب^{۲} − ج ا)(ج^{۲} − ا ب)
= (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} + ۳ ا ب ج)^{۲}

۱۰۔ (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})^{۳} + ۲(ب ج + ج ا + ا ب)^{۳} − ۳(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})(ب ج + ج ا + ا ب)^{۲}
= (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} − ۳ ا ب ج)^{۲}

اگر $ا + ب + ج = ۰$ تو سوالات ۱۱ تا ۲۱ کی مساوات ثابت کرو۔

۱۱- $۲(ا^{۴} + ب^{۴} + ج^{۴}) = (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})^{۲}$

۱۲- $ا^{۵} + ب^{۵} + ج^{۵} = -۵\,ا\,ب\,ج\,(ب\,ج + ج\,ا + ا\,ب)$

۱۳- $ا^{۶} + ب^{۶} + ج^{۶} = ۳ا^{۲}ب^{۲}ج^{۲} - ۲(ب\,ج + ج\,ا + ا\,ب)^{۳}$

۱۴- $۳(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})(ا^{۵} + ب^{۵} + ج^{۵}) = ۵(ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳})(ا^{۴} + ب^{۴} + ج^{۴})$

۱۵- $$\frac{ا^{۷} + ب^{۷} + ج^{۷}}{۷} = \frac{ا^{۵} + ب^{۵} + ج^{۵}}{۵} \times \frac{ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲}}{۲}$$

۱۶- $$\left(\frac{ب - ج}{ا} + \frac{ج - ا}{ب} + \frac{ا - ب}{ج}\right)\left(\frac{ا}{ب - ج} + \frac{ب}{ج - ا} + \frac{ج}{ا - ب}\right) = ۹$$

۱۷- $(ب^{۲}ج + ج^{۲}ا + ا^{۲}ب - ۳\,ا\,ب\,ج)(ب\,ج^{۲} + ج\,ا^{۲} + ا\,ب^{۲} - ۳\,ا\,ب\,ج)$

$= (ب\,ج + ج\,ا + ا\,ب)^{۳} + ۲۷ا^{۲}ب^{۲}ج^{۲}$

۱۸- $۲۵\{(ما - ی)^{۷} + (ی - لا)^{۷} + (لا - ما)^{۷}\}\{(ما - ی)^{۳} + (ی - لا)^{۳} + (لا - ما)^{۳}\}$

$= ۲۱\{(ما - ی)^{۵} + (ی - لا)^{۵} + (لا - ما)^{۵}\}^{۲}$

۱۹- $\{(ما - ی)^{۲} + (ی - لا)^{۲} + (لا - ما)^{۲}\}^{۳} - ۵۴(ما - ی)^{۲}(ی - لا)^{۲}(لا - ما)^{۲}$

$= ۲(ما + ی - ۲لا)^{۲}(ی + لا - ۲ما)^{۲}(لا + ما - ۲ی)^{۲}$

۲۰- $(ب - ج)^{۶} + (ج - ا)^{۶} + (ا - ب)^{۶} - ۳(ب - ج)^{۲}(ج - ا)^{۲}(ا - ب)^{۲}$

$= ۲(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} - ب\,ج - ج\,ا - ا\,ب)^{۳}$

۲۱- $(ب - ج)^{۷} + (ج - ا)^{۷} + (ا - ب)^{۷}$

$= ۷(ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} - ب\,ج - ج\,ا - ا\,ب)^{۲}$

۲۲- اگر $ا + ب + ج = ۰$ اور $لا + ما + ی = ۰$ تو ثابت کرو کہ

۴ (ا لا + ب ما + ج ی)^{۳} − ۳(ا لا + ب ما + ج ی)(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})(لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲})

− ۲(ب − ج)(ج − ا)(ا − ب)(ما − ی)(ی − لا)(لا − ما) = ۵۴ ا ب ج لا ما ی

اگر ا + ب + ج + د = ۰ تو ثابت کرو کہ

۲۳ ـ (ا^{۵} + ب^{۵} + ج^{۵} + د^{۵}) / ۵ = (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} + د^{۳}) / ۳ × (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} + د^{۲}) / ۲

۲۴ ـ (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} + د^{۳})^{۲} = ۹(ب ج د + ج د ا + د ا ب + ا ب ج)^{۲}

= ۹(ب ج − ا د)(ج ا − ب د)(ا ب − ج د)

۲۵ ـ اگر ۳ س$_{۱}$ = ا + ب + ج اور ۳ س$_{۲}^{۲}$ = ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} تو ثابت کرو کہ

∑(س$_{۱}$ − ب)(س$_{۱}$ − ج)(س$_{۲}^{۲}$ − ا^{۲}) + ۵ ا ب ج س$_{۱}$ = (س$_{۱}^{۲}$ − س$_{۲}^{۲}$)(۴ س$_{۱}^{۲}$ + س$_{۲}^{۲}$)

۲۶ ـ ثابت کرو کہ (لا^{۳} + ۶ لا^{۲} ما + ۳ لا ما^{۲} − ما^{۳})^{۳} + (ما^{۳} + ۶ لا ما^{۲} + ۳ لا^{۲} ما − لا^{۳})^{۳}

= ۲۷ لا ما (لا + ما)(لا^{۲} + لا ما + ما^{۲})^{۳}

۲۷ ـ ثابت کرو کہ ∑ ا^{۶} / ((ا − ب)(ا − ج)(ا − د))

= ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} + د^{۳} + ا ب + ا ج + ا د + ب ج + ب د + ج د

۲۸ ـ ذیل کے جملہ کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو:

۲ ا^{۲} ب^{۲} ج^{۲} + (ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳}) ا ب ج + ب^{۳} ج^{۳} + ج^{۳} ا^{۳} + ا^{۳} ب^{۳}

اسقاط

۵۲۷ ـ باب سی وسوم میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ خطی مساواتوں کے ایک نظام کا حاصل اسقاط فوراً ایک مقطعہ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے ۔ عمل اسقاط کے اُن عام طریقوں پر جن کا اطلاق ہر درجہ کی مساواتوں پر ہوسکے مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں مفصل بحث کی گئی ہے ۔ طالب علم

کو چاہیئے کہ بالخصوص ڈاکٹر سالمن کی کتاب Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra کے ابواب چہارم و ششم کا اور برن سائیڈ اور پنٹین کے نظریۂ مساواتات باب ہشتم کا مطالعہ کرے۔

اگرچہ یہ طریقے نظری طور پر بالکل مکمل ہیں مگر عملی طور پر ہمیشہ سہولت بخش ثابت نہیں ہوتے۔ اس لئے ہم پہلے عمل اسقاط کے عام نظریہ کی مجمل تشریح کرینگے اور پھر اُن قاعدوں کی توضیح کے لئے جو عملی طور پر زیادہ مفید ہیں چند مثالیں حل کریں گے۔

۵۲۸ - پہلے دو مساواتوں میں سے ایک نامعلوم مقدار کے اسقاط پر غور کرو۔

فرض کرو کہ مساواتیں ف (لا) = ۰ اور فہ (لا) = ۰ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ اگر ممکن ہو تو یہ مساواتیں ایسی شکل میں تحویل کر دی گئی ہیں جس میں ف (لا) اور فہ (لا) دونوں لا کے منطق صحیح تفاعل ہیں۔ چونکہ یہ دونوں تفاعل ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں، اس لئے لا کی کوئی نہ کوئی ایسی قیمت ضرور ہوگی جو دونوں مساواتوں کو پورا کرے۔ پس حاصل اسقاط اُس شرط کو تعبیر کرتا ہے جو کہ اِن مساواتوں کے سروں میں ہونی چاہیئے تاکہ اِن مساواتوں کی ایک اصل مشترک ہو۔

فرض کرو کہ لا = عہ، لا = بہ، لا = جہ، ..... مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں ہیں، تب مقادیر فہ (عہ)، فہ (بہ)، فہ (جہ)، .... میں سے کم از کم ایک مقدار ضرور صفر کے مساوی ہوگی، پس حاصل اسقاط مطلوب

فہ (عہ) فہ (بہ) فہ (جہ)، .... = ۰ ہے۔

دائیں طرف کا جملہ مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلوں کا ایک متشاکل تفاعل ہے اور اس کی قیمت معلوم کرنے کے طریقے نظریۂ معادلات کی کتابوں میں درج ہیں۔

۵۲۹ - اب ہم عمل اسقاط کے تین عام طریقوں کی تشریح کرینگے۔ ہمارے مقاصد کے لئے صرف ایک آسان مثال حل کرنا کافی ہے لیکن ہم دیکھینگے کہ ہر صورت میں اس عمل کا اطلاق ہر درجہ کی مساوات پر ہو سکتا ہے۔

ذیل کی مثال میں جو اصول تمثیلاً بیان کیا گیا ہے اُس کو ٹیسلر نے دریافت کیا تھا۔

مثال۔ ذیل کی مساواتوں میں سے لا کو ساقط کرو

ا لا^3 + ب لا^2 + ج لا + د = ۰ ، ف لا^2 + گ لا + ھ = ۰

فرض کرو کہ

دونوں مساواتوں کی مشترک اصل کے جواب میں جزوِ ضربی لا + ک ہے اور فرض کرو کہ

ا لا^3 + ب لا^2 + ج لا + د = (لا + ک) (ا لا^2 + ل لا + م)

اور ف لا^2 + گ لا + ھ = (لا + ک) (ف لا + ن)

جہاں ک، ل، م، ن نامعلوم مقداریں ہیں۔

اِن مساواتوں سے متماثل طور پر

(ا لا^3 + ب لا^2 + ج لا + د) (ف لا + ن) = (ا لا^2 + ل لا + م) (ف لا^2 + گ لا + ھ)

لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

ف ل − ا ن + ا گ − ب ف = ۰

گ ل + ف م − ب ن + ا ھ − ج ف = ۰

ھ ل + گ م − ج ن − د ف = ۰

ھ م − د ن = ۰

ان مساواتوں میں سے ل، م، ن کو ساقط کرنے سے ذیل کا مقطعہ حاصل ہوتا ہے

ف	۰	ا	ا گ − ب ف
گ	ف	ب	ا ھ − ج ف
ھ	گ	ج	− د ف
۰	ھ	د	۰

= ۰

۵۳۰ - مُعادلات ف (لا) = ۰ اور فہ (لا) = ۰ کا حاصل اسقاط سل وسٹر (Sylvester) کے افراقی طریقۂ اسقاط سے ایک مقطعہ کی شکل میں بآسانی معلوم ہوسکتا ہے۔ ہم گزشتہ مثال ہی کو حل کرینگے۔

مثال - مساواتات ا لا^{3} + ب لا^{2} + ج لا + د = ۰
ف لا^{2} + گ لا + ھ = ۰

میں سے لا کو ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو لا سے اور دوسری مساوات کو بالترتیب لا اور لا^{2} سے ضرب دو۔ اس طرح سے ہمیں پانچ مساواتیں حاصل ہونگی جن میں سے ہم چار مقادیر لا^{4}، لا^{3}، لا^{2} اور لا کو ساقط کر سکتے ہیں جن کو مختلف متغیر خیال کیا جاسکتا ہے۔ یہ مساواتیں حسب ذیل ہیں:-

ا لا^{3} + ب لا^{2} + ج لا + د = ۰

ا لا^{4} + ب لا^{3} + ج لا^{2} + د لا = ۰

ف لا^{2} + گ لا + ھ = ۰

ف لا^{3} + گ لا^{2} + ھ لا = ۰

ف لا^{4} + گ لا^{3} + ھ لا^{2} = ۰

پس حاصل اسقاط مطلوبہ یہ ہے:-

۰	ا	ب	ج	د
ا	ب	ج	د	۰
۰	۰	ف	گ	ھ
۰	ف	گ	ھ	۰
ف	گ	ھ	۰	۰

= ۰

۵۳۱ - ذیل میں جو طریقہ مندرج کیا گیا ہے اسکا اصول بیزاؤٹ (Bezout) نے دریافت کیا تھا۔ اس طریقہ سے ہم حاصلِ اسقاط کو گزشتہ طریقوں کی نسبت مقابلۃً چھوٹے درجے کے مقطعہ میں ظاہر کر سکتے ہیں، اس لحاظ سے یہ طریقہ گزشتہ دفعہ کے دونوں طریقوں پر فوقیت رکھتا

ہے، ہم پھر وہی مثال لینگے جو پہلے حل کی گئی ہے اور عملِ اسقاط کے لئے کوشی[1] کا طریقِ عمل درج کریں گے۔

مثال۔ معادلات $\text{ا}\,\text{لا}^3 + \text{ب}\,\text{لا}^2 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{د} = 0$

اور $\text{ف}\,\text{لا}^2 + \text{گ}\,\text{لا} + \text{ھ} = 0$

میں سے لا کو ساقط کرو۔

ان مساواتوں سے $\dfrac{\text{ا}}{\text{ف}} = \dfrac{\text{ب}\,\text{لا}^2 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{د}}{\text{گ}\,\text{لا}^2 + \text{ھ}\,\text{لا}}$

$$\frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{\text{ف}\,\text{لا} + \text{گ}} = \frac{\text{ج}\,\text{لا} + \text{د}}{\text{ھ}\,\text{لا}}$$

جس سے $(\text{اگ} - \text{ب ف})\,\text{لا}^2 + (\text{ا ھ} - \text{ج ف})\,\text{لا} - \text{د ف} = 0$

اور $(\text{ا ھ} - \text{ج ف})\,\text{لا}^2 + (\text{ب ھ} - \text{ج گ} - \text{د ف})\,\text{لا} - \text{د گ} = 0$

ان دونوں مساواتوں کو $\text{ف}\,\text{لا}^2 + \text{گ}\,\text{لا} + \text{ھ} = 0$ کے ساتھ ملانے سے اور لا^2 اور لا کو مختلف متغیر خیال کرنے سے

$$\begin{vmatrix} \text{ف} & \text{گ} & \text{ھ} \\ \text{اگ} - \text{ب ف} & \text{ا ھ} - \text{ج ف} & -\text{د ف} \\ \text{ا ھ} - \text{ج ف} & \text{ب ھ} - \text{ج گ} - \text{د ف} & -\text{د گ} \end{vmatrix} = 0$$

۵۳۲۔ اگر ہمارے پاس دو مساواتیں $\text{فہ}_1(\text{لا}،\text{ما}) = 0$ اور $\text{فہ}_2(\text{لا}،\text{ما}) = 0$ کی شکل کی ہوں تو ہم ما کو گزشتہ طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے ساقط کر سکتے ہیں۔ اس صورت میں حاصل اسقاط لا کا ایک تفاعل ہوگا۔

اگر ہمارے پاس تین مساواتیں ان شکلوں

$\text{فہ}_1(\text{لا}،\text{ما}،\text{ی}) = 0$، $\text{فہ}_2(\text{لا}،\text{ما}،\text{ی}) = 0$، $\text{فہ}_3(\text{لا}،\text{ما}،\text{ی}) = 0$

کی ہوں تو پہلی اور دوسری مساواتوں سے ی کو ساقط کرنے سے اور پھر دوسری اور تیسری مساواتوں سے ی کو ساقط کرنے سے ہمیں دو مساواتیں اس شکل

[1] Cauchy

$$سا(لا، ما) = ۰ \quad اور \quad سا_۱(لا، ما) = ۰$$

کی ملتی ہیں - اگر ہم اِن مساواتوں سے ما کو ساقط کریں تو ہمیں ایک حاصل ف (لا) = ۰ کی شکل کا ملیگا -

اس قسم کے استدلال سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ہم ن + ۱ مساواتوں میں سے ن متغیروں کو ساقط کر سکتے ہیں -

۳۴۳ - عمل اسقاط کے متعلق جو عام طریقے اوپر بیان ہوئے اُن سے اکثر اوقات استفادہ کیا جا سکتا ہے لیکن اس طرح سے جو حاصل اسقاط ملینگے وہ شاذونادر ہی سادہ ترین شکل میں ہونگے - اکثر اوقات مساواتوں کو دیکھنے سے ہی خود بخود اسقاط کے کسی خاص طریقہ کا پتا چل جاتا ہے اس کی تشریح ذیل میں کی جاتی ہے :-

مثال ۱ - ذیل کی مساواتوں

$$ل لا + م ما = ا، \quad م لا - ل ما = ب، \quad ل^۲ + م^۲ = ۱$$

سے ل اور م کو ساقط کرو -

پہلی دو مساواتوں کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$ل^۲ لا^۲ + م^۲ لا^۲ + م^۲ ما^۲ + ل^۲ ما^۲ = ا^۲ + ب^۲$$

یعنی $(ل^۲ + م^۲)(لا^۲ + ما^۲) = ا^۲ + ب^۲$

پس حاصل اسقاط مطلوبہ $لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ + ب^۲$

اگر ل = جم طہ اور م = جب طہ تو تیسری مساوات متماثل طور پر پوری ہوتی ہے

یعنی لا جم طہ + ما جب طہ = ا، لا جب طہ - ما جم طہ = ب کا حاصل اسقاط

$$لا^۲ + ما^۲ = ا^۲ + ب^۲ \text{ ہے -}$$

مثال ۲ - مساوات $ما^۲ + ی^۲ = ا ما ی$، $ی^۲ + لا^۲ = ب ی لا$، $لا^۲ + ما^۲ = ج لا ما$ سے لا، ما، ی ساقط کرو -

ان مساواتوں سے $\frac{ما}{ی} + \frac{ی}{ما} = ا$، $\frac{ی}{لا} + \frac{لا}{ی} = ب$، $\frac{لا}{ما} + \frac{ما}{لا} = ج$

ان تینوں مساواتوں کو ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$۲ + \frac{ما^۲}{ی^۲} + \frac{ی^۲}{ما^۲} + \frac{ی^۲}{لا^۲} + \frac{لا^۲}{ی^۲} + \frac{لا^۲}{ما^۲} + \frac{ما^۲}{لا^۲} = ا ب ج$$

پس $۲ + (ا^۲ - ۲) + (ب^۲ - ۲) + (ج^۲ - ۲) = ا ب ج$

$\therefore ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ - ۴ = ا ب ج$

مثال ۳۔ معادلات $لا^۲ - ما^۲ = ف لا - ق ما$، $۴ لا ما = ق لا + ف ما$، $لا^۲ + ما^۲ = ۱$ سے لا، ما کو ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو لا سے اور دوسری کو ما سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

$$لا^۳ + ۳ لا ما^۲ = ف (لا^۲ + ما^۲)$$

اس لئے تیسری مساوات سے

$$ف = لا^۳ + ۳ لا ما^۲$$

اسی طرح سے $ق = ۳ لا^۲ ما + ما^۳$

پس $ف + ق = (لا + ما)^۳$ اور $ف - ق = (لا - ما)^۳$

$\therefore (ف + ق)^{\frac{۲}{۳}} + (ف - ق)^{\frac{۲}{۳}} = (لا + ما)^۲ + (لا - ما)^۲$

$$= ۲ (لا^۲ + ما^۲)$$

$\therefore (ف + ق)^{\frac{۲}{۳}} + (ف - ق)^{\frac{۲}{۳}} = ۲$

مثال ۴۔ معادلات $\frac{ما}{ی} - \frac{ی}{ما} = ا$، $\frac{ی}{لا} - \frac{لا}{ی} = ب$، $\frac{لا}{ما} - \frac{ما}{لا} = ج$ سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

ان مساواتوں سے ا + ب + ج = [لا(ما² - ی²) + ما(ی² - لا²) + ی(لا² - ما²)] / لا ما ی

= (ما - ی)(ی - لا)(لا - ما) / لا ما ی

اگر ہم لا کی علامت بدلیں تو ب اور ج کی علامتیں بدل جاتی ہیں لیکن ا کی علامت نہیں بدلتی۔

پس ا - ب - ج = (ما - ی)(ی + لا)(لا + ما) / لا ما ی

اسی طرح سے ب - ج - ا = (ما + ی)(ی - لا)(لا + ما) / لا ما ی

اور ج - ا - ب = (ما + ی)(ی + لا)(لا - ما) / لا ما ی

∴ (ا + ب + ج)(ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج)

= - (ما² - ی²)²(ی² - لا²)²(لا² - ما²)² / لا² ما² ی²

= - (ما/ی - ی/ما)²(ی/لا - لا/ی)²(لا/ما - ما/لا)² = - ا² ب² ج²

∴ ۲ ب² ج² + ۲ ج² ا² + ۲ ا² ب² - ا⁴ - ب⁴ - ج⁴ + ا² ب² ج² = ۰

امثلہ ۴۳ (ج)

۱۔ معادلات م² لا - م ما + ا = ۰، م ما + لا = ۰ سے م کو ساقط کرو۔

۲۔ معادلات م² لا - م ما + ا = ۰، ن² لا - ن ما + ا = ۰، م ن + ۱ = ۰ میں سے م اور ن کو ساقط کرو۔

۳۔ معادلات م لا - ن ما = ا(م² - ن²)، ن لا + م ما = ۲ ا م ن، م² + ن² = ۱ میں سے م اور ن کو ساقط کرو۔

۴- معادلات ف + ق + ر = ۰، ا(ق ر + ر ف + ف ق) = ۲ ا - لا
ا ف ق ر = ما ، ق ر = - ۱
میں سے ف، ق، ر کو ساقط کرو۔

۵- معادلات ا لا^{۲} - ۲ ا^{۲} لا + ۱ = ۰ ، ا^{۲} + لا^{۲} - ۳ ا لا = ۰ میں سے لا کو ساقط کرو۔

۶- معادلات ما + م لا = ا (۱ + م)، م ما - لا = ا (۱ - م) میں سے م کو ساقط کرو۔

۷- معادلات ما ی = ا^{۲}، ی لا = ب^{۲} ، لا ما = ج^{۲}، لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = د^{۲} میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

۸- معادلات لا (ف + ق) = ما، (ف - ق) = ک (۱ + ف ق)
لا ف ق = ا میں سے ف، ق کو ساقط کرو۔

۹- معادلات لا - ما = ا، لا^{۲} - ما^{۲} = ب^{۲}، لا^{۳} - ما^{۳} = ج^{۳} میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۰- مساواتات لا + ما = ا، لا^{۲} + ما^{۲} = ب^{۲}، لا^{۴} + ما^{۴} = ج^{۴} میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۱- معادلات ذیل لا = ب ما + ج ی + د ء، ما = ج ی + د ء + ا لا
ی = د ء + ا لا + ب ما ، ء = ا لا + ب ما + ج ی میں سے
لا، ما، ی، ء کو ساقط کرو۔

۱۲- معادلات ذیل لا + ما + ی = ۰ ، لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = ا^{۲}
لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} = ب^{۳} ، لا^{۵} + ما^{۵} + ی^{۵} = ج^{۵}
میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

۱۳- معادلات ذیل میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

لا/ما + ما/ی + ی/لا = ا، ی/ما + لا/ی + ما/لا = ب، (لا/ما + ما/ی)(ما/ی + ی/لا)(ی/لا + لا/ما) = ج

۱۴۔ مساواتات ذیل میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

$$\frac{لا^{2}(ما+ی)}{ا^{3}} = \frac{ما^{2}(ی+لا)}{ب^{3}} = \frac{ی^{2}(لا+ما)}{ج^{3}} = \frac{لا\,ما\,ی}{ا\,ب\,ج} = 1$$

۱۵۔ مساواتات $4(لا^{2}+ما^{2}) = ا\,لا + ب\,ما$، $2(لا^{2}-ما^{2}) = ا\,لا - ب\,ما$، $لا\,ما = ج^{2}$ میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۶۔ مساواتات ذیل میں لا، ما، ی کو ساقط کرو

$(ما+ی)^{2} = 4ا^{2}\,ما\,ی$، $(ی+لا)^{2} = 4ب^{2}\,ی\,لا$، $(لا+ما)^{2} = 4ج^{2}\,لا\,ما$

۱۷۔ معادلات ذیل $(لا+ما-ی)(لا-ما+ی) = ا\,ما\,ی$، $(ما+ی-لا)(ما-ی+لا) = ب\,ی\,لا$، $(ی+لا-ما)(ی-لا+ما) = ج\,لا\,ما$ میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

۱۸۔ معادلات ذیل $لا^{2}ما = ا$، $لا(لا+ما) = ب$، $2لا+ما = ج$ میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ $ا\,لا^{2}+ب\,ما^{2}+ج\,ی^{2} = ا\,لا+ب\,ما+ج\,ی = ما\,ی+ی\,لا+لا\,ما = 0$ کا حاصل اسقاط $(ا+ب+ج)^{3} - 4(ب+ج)(ج+ا)(ا+ب) + 5\,ا\,ب\,ج = 0$ ہے۔

۲۰۔ معادلات $ا\,لا^{2}+ب\,ما^{2} = ا\,لا+ب\,ما = \frac{لا\,ما}{لا+ما} = ج$ میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ $ا\,لا+ما\,ی = ب\,ج$، $ب\,ما+ی\,لا = ج\,ا$، $ج\,ی+لا\,ما = ا\,ب$ اور $لا\,ما\,ی = ا\,ب\,ج$ کا حاصل اسقاط $ب^{3}ج^{3}+ج^{3}ا^{3}+ا^{3}ب^{3} = 5\,ا^{2}ب^{2}ج^{2}$ ہے

۲۲۔ $لا^{2}+ما^{2}+ی^{2} = لا+ما+ی = 1$ اور $\frac{ا}{لا}(لا-ف) = \frac{ب}{ما}(ما-ق) = \frac{ج}{ی}(ی-ر)$ سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

۲۳۔ بیزاؤٹ (Bezout) کے طریقہ کو استعمال کرکے معادلات $ا\,لا^{3}+ب\,لا^{2}ما+ج\,لا\,ما^{2}+د\,ما^{3} = 0$ اور $اَ\,لا^{3}+بَ\,لا^{2}ما+جَ\,لا\,ما^{2}+دَ\,ما^{3} = 0$ میں سے لا/ما کو ساقط کرو۔

پینتیسواں باب

نظریۂ معادلات

۵۳۴- باب ہٰذا میں ہم مساوات درجۂ دوم کے سروں اور اصلوں کے چند باہمی روابط ثابت کر چکے ہیں۔ یہاں ہم پہلے نؔ ویں درجہ کی مساواتوں کی صورت میں اسی قسم کے روابط معلوم کرینگے اور پھر مساواتوں کے عام نظریہ کے چند ابتدائی خواص پر بحث کرینگے۔

۵۳۵- فرض کرو کہ $ف_۰ لا^{ن} + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + ... + ف_{ن-۱} لا + ف_ن$، لا کا ایک ن ابعاد کا منطق صحیح تفاعل ہے، اس کو ف(لا) سے تعبیر کرو، تب ف(لا) = ۰ نؔ ویں درجہ کی منطق صحیح مساوات کا ایک عام نمونہ ہے۔ اس کی سب رقموں کو $ف_۰$ پر تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومیت میں کسی طرح ہارج ہوئے بغیر مساوات

$$لا^{ن} + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + ... + ف_{ن-۱} لا + ف_ن = ۰$$

کو کسی درجہ کی ایک منطق صحیح مساوات کے نمونہ کے طور پر لیا جا سکتا ہے۔ اگر اس کے برعکس نہ بیان کیا گیا ہو تو سروں $ف_۱$، $ف_۲$، .... $ف_ن$ کو ہمیشہ منطق تصور کیا جائیگا۔

۵۳۶- لا کی کوئی قیمت جس سے ف(لا) صفر ہو جائے مساوات ف(لا) = ۰ کی اصل کہلاتی ہے۔

دفعہ ۵۱۴ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ جب ف(لا) کو لا - ا پر تقسیم کیا جائے تو باقی ف(ا) بچتی ہے، پس اگر ف(لا)، لا - ا پر پورا تقسیم ہو جائے اور باقی کچھ نہ بچے تو مساوات ف(لا) = ۰ کی ایک اصل ا ہوگی۔

۵۳۷- ہم یہاں یہ تسلیم کریں گے کہ ف(لا) = ۰ کی شکل کی ہر ایک مساوات کی ایک اصل ضرور ہے، خواہ یہ اصل حقیقی ہو یا خیالی۔ اس مسئلہ کا ثبوت نظریۂ

مساوات کی کتابوں میں مل سکتا ہے اور کتاب ہذا کی حدود سے باہر ہے۔

۳۸۵۔ ن ویں درجہ کی ہر مساوات کی ن اصلیں ہوتی ہیں اس سے زیادہ نہیں ہو سکتیں۔

مساوات مفروضہ کو ف(لا) = ۰ سے تعبیر کرو جہاں

ف(لا) = فب لا^{ن} + ف$_1$ لا$^{ن-1}$ + ف$_2$ لا$^{ن-2}$ + ... + فن

اب مساوات ف(لا) = ۰ کی ایک اصل (خیالی یا حقیقی) ہے، فرض کرو کہ یہ اصل ا$_1$ ہے، تب ف(لا) پورا تقسیم ہو سکتا ہے لا - ا$_1$ پر، یعنی

ف(لا) = (لا - ا$_1$) ف$_1$(لا)

جہاں ف$_1$(لا)، ن-۱ ویں ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے، اب پھر مساوات ف$_1$(لا) = ۰ کی ایک حقیقی یا خیالی اصل ہے، اس اصل کو ا$_2$ سے تعبیر کرو، تب ف$_1$(لا) لا - ا$_2$ پر پورا تقسیم ہو جائیگا۔ یعنی

ف$_1$(لا) = (لا - ا$_2$) ف$_2$(لا)

جہاں ف$_2$(لا)، ن-۲، ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے

لہذا ف(لا) = (لا - ا$_1$)(لا - ا$_2$) ف$_2$(لا)

اسی طرح سے ہمیں دفعہ ۳۰۹ کی مانند حاصل ہوتا ہے:

ف(لا) = فب(لا - ا$_1$)(لا - ا$_2$) .... (لا - ا$_ن$)

پس مساوات ف(لا) = ۰ کی ن اصلیں ہیں کیونکہ ف(لا) معدوم ہو جاتا ہے جبکہ لا کی قیمت ا$_1$، ا$_2$، ا$_3$ ...... ا$_ن$ میں سے کسی ایک کے مساوی ہو۔ نیز مساوات بالا کی اصلیں ن سے زیادہ نہیں ہو سکتیں کیونکہ اگر مقادیر ا$_1$، ا$_2$، ا$_3$ .... ا$_ن$ کے علاوہ لا کی کوئی اور قیمت ہو تو بائیں جانب کے

سب اجزائے ضربی میں سے کوئی بھی صفر نہیں ہوگا اور اس لئے لا کی اُس قیمت کے لئے ف (لا) صفر نہیں ہوگا۔

اوپر کی تحقیقات میں ممکن ہے کہ مقادیر $ا_1$، $ا_2$، $ا_3$ ..... ان میں سے بعض باہم مساوی ہوں، تاہم اس صورت میں بھی ہم یہی سمجھیں گے کہ مساوات کی ن، اصلیں ہیں اگرچہ یہ سب اصلیں مختلف نہیں ہیں۔

۳۹۵۔ کسی مساوات کی اصلوں اور سروں کے باہمی روابط کی تحقیق کرو۔

فرض کرو کہ مساوات $لا^ن + ف_1 لا^{ن-1} + ف_2 لا^{ن-2} + ... + ف_{ن-1} لا + ف_ن = 0$

ہے اور اس کی اصلیں ا، ب، ج، ..... ک ہیں تب ہمیں متماثل طور پر حاصل ہوتا ہے:

$$لا^ن + ف_1 لا^{ن-1} + ف_2 لا^{ن-2} + ... + ف_{ن-1} لا + ف_ن = (لا - ا)(لا - ب)(لا - ج)....(لا - ک)$$

پس دفعہ ۷۵ ا حصہ اوّل کی ترقیم کے موافق

$$لا^ن + ف_1 لا^{ن-1} + ف_2 لا^{ن-2} + ... + ف_{ن-1} لا + ف_ن$$

$$= لا^ن - ص_1 لا^{ن-1} + ص_2 لا^{ن-2} - ص_3 لا^{ن-3} + ... (-1)^{ن-1} ص_{ن-1} لا + (-1)^ن ص_ن$$

اس مساواتِ متماثلہ میں لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

$- ف_1 = ص_1 =$ اصلوں کا مجموعہ

$ف_2 = ص_2 =$ اصلوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ دو دو اصلوں کو اکٹھا لینے سے

$- ف_3 = ص_3 =$ اصلوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تین تین اصلوں کو اکٹھا لینے سے

.. ..

$(-1)^ن ف_ن = ص_ن =$ اصلوں کا حاصل ضرب

اگر $لا^ن$ کا سر ف٠ ہو تو ہر ایک رقم کو ف٠ پر تقسیم کرنے سے مساوات بالا ہو جاتی ہے:

$$لا^{ن} + \frac{ف_{1}}{ف_{0}} لا^{ن-1} + \frac{ف_{2}}{ف_{0}} لا^{ن-2} + \ldots\ldots + \frac{ف_{ن-1}}{ف_{0}} لا + \frac{ف_{ن}}{ف_{0}} = 0$$

اور دفعہ ۵۲۱ کی ترقیم کی رُو سے

$$\sum ا = -\frac{ف_{1}}{ف_{0}} ، \sum اب = \frac{ف_{2}}{ف_{0}} ، \sum اب ج = -\frac{ف_{3}}{ف_{0}} ، \ldots\ldots$$

$$اب ج \ldots\ldots ک = (-1)^{ن} \frac{ف_{ن}}{ف_{0}}$$

مثال ۱۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

لا + ا م + ا^{2} ی = ا^{3} ، لا + ب م + ب^{2} ی = ب^{3} ۔ لا + ج م + ج^{2} ی = ج^{3}

ان مساواتوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا، ب، ج مقدارت کی قیمتیں ہیں جو کہ مساوات

ت^{3} − ی ت^{2} − م ت − لا = ۰

کو پورا کرتی ہیں۔

اسلئے ی = ا + ب + ج ، م = −(ب ج + ج ا + ا ب)، لا = ا ب ج

مثال ۲۔ اگر مساوات لا^{3} + ف$_{1}$ لا^{2} + ف$_{2}$ لا + ف$_{3}$ = ۰ کی اصلیں ا، ب، ج ہوں تو ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں ا^{2}، ب^{2}، ج^{2} ہوں۔

مساوات مطلوبہ یہ ہے (م − ا^{2})(م − ب^{2})(م − ج^{2}) = ۰

یا (لا^{2} − ا^{2})(لا^{2} − ب^{2})(لا^{2} − ج^{2}) = ۰ اگر م = لا^{2}

یعنی (لا − ا)(لا − ب)(لا − ج)(لا + ا)(لا + ب)(لا + ج) = ۰

لیکن (لا − ا)(لا − ب)(لا − ج) = لا^{3} + ف$_{1}$ لا^{2} + ف$_{2}$ لا + ف$_{3}$

اسلئے (لا + ا)(لا + ب)(لا + ج) = لا^{3} − ف$_{1}$ لا^{2} + ف$_{2}$ لا − ف$_{3}$

پس مساوات مطلوبہ یہ ہے :-

$$(\text{لا}^3+\text{فہ}_1\text{لا}^2+\text{فہ}_2\text{لا}+\text{فہ}_3)(\text{لا}^3-\text{فہ}_1\text{لا}^2+\text{فہ}_2\text{لا}-\text{فہ}_3)=0$$

$$\text{یا}\quad(\text{لا}^3+\text{فہ}_2\text{لا})^2-(\text{فہ}_1\text{لا}^2+\text{فہ}_3)^2=0$$

$$\text{یا}\quad\text{لا}^6+(2\text{فہ}_2-\text{فہ}_1^2)\text{لا}^4+(\text{فہ}_2^2-2\text{فہ}_1\text{فہ}_3)\text{لا}^2-\text{فہ}_3^2=0$$

اور اگر ہم لا^2 کی بجائے ما رکھیں تو

$$\text{ما}^3+(2\text{فہ}_2-\text{فہ}_1^2)\text{ما}^2+(\text{فہ}_2^2-2\text{فہ}_1\text{فہ}_3)\text{ما}-\text{فہ}_3^2=0$$

۴۵ ـــ شاید طالب علم یہ خیال کرے کہ دفعۂ ماقبل کے روابط ہر مفروضہ مساوات کے حل کرنے میں مدد دے سکتے ہیں کیونکہ روابط کی تعداد اصلوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہو جائیگا کہ دراصل ایسا نہیں ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہلے مقادیر ا، ب، ج، ..... ک میں سے ن ـ ۱ مقادیر کو ساقط کرتے ہیں اور اس طرح سے باقیماندہ ایک مقدار کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ایک مساوات حاصل کرتے ہیں۔ تب چونکہ یہ مقادیر ہر مساوات میں متماثل طور پر شامل ہوتی ہیں، اس لئے ظاہر ہے کہ محصلہ مساوات میں ہر صورت میں معروضی ہونگے۔
اس لئے یہ مساوات دراصل ابتدائی مساوات ہی ہو گی جبکہ اصلوں ا، ب، ج ...... ک میں سے کسی ایک اصل کو لا کی بجائے لکھا جائے
ہم مثال کے طور پر مساوات ذیل پر غور کرتے ہیں:۔

$$\text{لا}^3+\text{فہ}_1\text{لا}^2+\text{فہ}_2\text{لا}+\text{فہ}_3=0$$

فرض کرو کہ اس کی اصلیں ا، ب، ج ہیں، تب

$$\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}=-\text{فہ}_1$$
$$\text{اب}+\text{اج}+\text{ب ج}=\text{فہ}_2$$
$$\text{اب ج}=-\text{فہ}_3$$

ان مساواتوں کو بالترتیب $ا^{۲}$، $-ا$، ۱ سے ضرب دو اور جمع کرو۔

$$تب \quad ا^{۳} = ف_{۱} ا^{۲} - ف_{۲} ا - ف_{۳}$$

$$یعنی \quad ا^{۳} + ف_{۱} ا^{۲} - ف_{۲} ا + ف_{۳} = ۰$$

اور یہ ابتدائی مساوات ہی ہے جس میں لا کے بجائے ا لکھا گیا ہے۔ اسقاط کا مندرجہ بالا طریقہ بالکل عام ہے اور ہر درجہ کی مساوات پر اس کا اطلاق ہو سکتا ہے۔

۵۴۱ - اگر ایک مساوات کی دو یا زیادہ اصلیں کسی مخصوص ربط کے ذریعہ مربوط ہوں تو دفعہ ۵۳۹ کے خواص کی مدد سے ہم بعض اوقات مکمل حل معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات $۴لا^{۳} - ۲۴لا^{۲} + ۲۳لا + ۱۸ = ۰$ کے حل معلوم کرو جبکہ اس کی اصلیں سلسلۂ حسابیہ میں ہوں۔

اصلوں کو ا - ب، ا، ا + ب سے تعبیر کرو، تب اصلوں کا مجموعہ ۳ا ہے، اصلوں کا حاصل ضرب دو دو اصلوں کو اکٹھا لینے سے $۳ا^{۲} - ب^{۲}$ ہے اور اصلوں کا حاصل ضرب $ا(ا^{۲} - ب^{۲})$ ہے، پس ہمیں ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$۳ا = ۶ \ ، \quad ۳ا^{۲} - ب^{۲} = \frac{۲۳}{۴} \ ، \quad ا(ا^{۲} - ب^{۲}) = -\frac{۹}{۲}$$

پہلی مساوات سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ا = ۲، دوسری سے $ب = \pm \frac{۵}{۲}$ اور چونکہ یہ قیمتیں تیسری مساوات کو پورا کرتی ہیں، اس لئے یہ مساواتیں باہم مطابق ہیں
پس مطلوبہ اصلیں $-\frac{۱}{۲}$، ۲، $\frac{۹}{۲}$ ہیں۔

مثال ۲۔ مساوات $۲۴لا^{۳} - ۱۴لا^{۲} - ۶۳لا + ۴۵ = ۰$ کو حل کرو جبکہ اس کی ایک اصل دوسری سے دو چند ہو۔

اصلوں کو ا، ۲ا، ب سے تعبیر کرو، تب ظاہر ہے کہ

$$۳ا + ب = \frac{۷}{۱۲} \ ، \quad ۲ا^{۲} + ۳اب = -\frac{۲۱}{۸} \ ، \quad ۲ا^{۲}ب = -\frac{۱۵}{۸}$$

پہلی دو مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے:-

$$۸ ا^{۲} - ۲ ا - ۳ = ۰$$

$$\therefore ا = \frac{۳}{۴} \text{ یا } -\frac{۱}{۲} \text{ اور } ب = -\frac{۵}{۳} \text{ یا } \frac{۲۵}{۱۲}$$

آزمایش سے معلوم ہوگا کہ قیمتیں $ا = -\frac{۱}{۲}$ ، $ب = \frac{۲۵}{۱۲}$ تیسری مساوات $۲ ا^{۲} ب = -\frac{۱۵}{۸}$ کو پورا نہیں کرتیں، اس لئے ہمارے پاس صرف یہ دو قیمتیں

$$ا = \frac{۳}{۴} \text{ اور } ب = -\frac{۵}{۳}$$

رہ جاتی ہیں۔ لہٰذا مطلوبہ اصلیں $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۳}{۲}$ ، $-\frac{۵}{۳}$ ہیں۔

۴۲۵۔ اگرچہ یہ ممکن ہے کہ ہم دفعہ ۹۳۵ کے روابط سے کسی مساوات کی اصلیں معلوم نہ کرسکیں لیکن ہم ان روابط کو اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں استعمال کرسکتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات $لا^{۳} - ف لا^{۲} + ق لا - ر = ۰$ کی اصلوں کے مربعوں اور مکعبوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں ا، ب اور ج ہیں، تب

$$ا + ب + ج = ف \quad \text{اور} \quad ب ج + ج ا + ا ب = ق$$

$$\text{اب } ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} = (ا + ب + ج)^{۲} - ۲(ب ج + ج ا + ا ب)$$

$$= ف^{۲} - ۲ ق$$

نیز مساوات مفروضہ میں لا کی بجائے بالترتیب ا، ب، ج لکھنے اور جمع کرنے سے

$$ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} - ف(ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲}) + ق(ا + ب + ج) - ۳ ر = ۰$$

$$\therefore ا^{۳} + ب^{۳} + ج^{۳} = ف(ف^{۲} - ۲ ق) - ف ق + ۳ ر$$

$$= ف^{۳} - ۳ ف ق + ۳ ر$$

مثال ۲۔ اگر مساوات $لا^{۴} + ف لا^{۳} + ق لا^{۲} + ر لا + س = ۰$ کی اصلیں ا، ب، ج، د ہوں تو $\sum ا^{۲} ب$ کی قیمت معلوم کرو

$$\text{یہاں } ا + ب + ج + د = -ف \qquad (۱)$$

$$ا ب + ا ج + ا د + ب ج + ب د + ج د = ق \qquad (۲)$$

$$ا ب ج + ا ب د + ا ج د + ب ج د = -ر \qquad (۳)$$

ان مساواتوں سے $-ف ق = \sum ا^{۲} ب + ۳(ا ب ج + ا ب د + ا ج د + ب ج د)$

= $\sum$ ا^{2}ب − ۳ر

∴ $\sum$ ا^{2}ب = ف ق − ۳ر

امثلہ نمبری ۳۵ (ا)

دو مساواتیں بناؤ جن کی اصلیں یہ ہیں:-

۱− $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$، ± ۲$\sqrt{۳}$ ۲− ۰، ۱، ۲، ۳، −۲، −۳، −۴

۳− ۲، ۲، −۲، −۲، ۵۰۰ ۴− ا+ب، ا−ب، −ا+ب، −ا−ب

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

۵− لا^۴ − ۱۶ لا^۳ + ۸۶ لا^۲ − ۱۷۶ لا + ۱۰۵ = ۰ جبکہ دو اصلیں ۱ اور ۷ ہوں

۶− ۴ لا^۴ + ۱۶ لا^۳ − ۹ لا − ۳۶ = ۰ جبکہ دو اصلوں کا مجموعہ صفر ہو

۷− ۴ لا^۴ + ۲۰ لا^۳ − ۲۳ لا^۲ + ۶ = ۰ جبکہ دو اصلیں مساوی ہوں

۸− ۳ لا^۴ − ۲۶ لا^۳ + ۵۲ لا^۲ − ۲۴ = ۰ جبکہ اصلیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں

۹− ۲ لا^۴ − لا^۳ − ۲۲ لا^۲ − ۲۴ = ۰ جبکہ دو اصلیں بہ نسبت ۳ : ۴ باہم ہوں

۱۰− ۲۴ لا^۴ + ۲۶ لا^۳ + ۹ لا − ۹ = ۰ جبکہ ایک اصل دوسری اصل سے دگنی ہو

۱۱− ۸ لا^۴ − ۲ لا^۳ − ۲۷ لا^۲ + ۶ لا + ۹ = ۰ جبکہ دو اصلیں مساوی اور مختلف العلامت ہوں

۱۲− ۴۵ لا^۴ − ۳۹ لا^۳ − ۲۶ لا^۲ + ۱۶ = ۰ جبکہ اصلیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں

۱۳− ۳۲ لا^۴ − ۴۸ لا^۳ + ۲۲ لا − ۳ = ۰ جبکہ اصلیں سلسلۂ حسابیہ میں ہوں

۱۴− ۶ لا^۴ − ۲۹ لا^۳ + ۴۰ لا^۲ − ۷ لا − ۱۲ = ۰ جبکہ دو اصلوں کا حاصل ضرب ۲ کے مساوی ہو-

۱۵− لا^۴ − ۲ لا^۳ − ۲۱ لا^۲ + ۲۲ لا + ۴۰ = ۰ جبکہ اصلیں سلسلۂ حسابیہ میں ہوں

۱۶− ۲۷ لا^۴ − ۱۹۵ لا^۳ + ۴۹۴ لا^۲ − ۵۲۰ لا + ۱۹۲ = ۰ جبکہ اصلیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں-

۱۷− ۱۸ لا^۳ + ۸۱ لا^۲ + ۱۲۱ لا + ۶۰ = ۰ جبکہ ایک اصل باقی دو اصلوں کے مجموعہ کے نصف کے مساوی ہو-

۱۸− اگر ا، ب، ج مساوات لا^۳ − ف لا^۲ + ق لا − ر = ۰ کی اصلیں ہوں تو

(۱) $\frac{۱}{ا^۲}$ + $\frac{۱}{ب^۲}$ + $\frac{۱}{ج^۲}$ (۲) $\frac{۱}{ب^۲ ج^۲}$ + $\frac{۱}{ج^۲ ا^۲}$ + $\frac{۱}{ا^۲ ب^۲}$

کی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۹ - اگر ا، ب، ج مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی اصلیں ہوں تو

(۱) $(ب - ج)^۲ + (ج - ا)^۲ + (ا - ب)^۲$ (۲) $(ب + ج)^{-۱} + (ج + ا)^{-۱} + (ا + ب)^{-۱}$

۲۰ - مساوات $لا^۴ + ق لا^۲ + ر لا + س = ۰$ کی اصلوں کے مربعوں اور مکعبوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

۲۱ - مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی اصلوں کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۵۴۳ - حقیقی سروں والی مساوات میں خیالی اصلوں کے زوج واقع ہوتے ہیں۔

فرض کروکہ $ف(لا) = ۰$ حقیقی سروں والی ایک مساوات ہے اور اس کی ایک خیالی اصل $ا + خ ب$ ہے، ہم ثابت کریں گے کہ $ا - خ ب$ بھی اس کی ایک اصل ہوگی۔

اِن دو اصلوں کے متناظر $ف(لا)$ کا جزوِ ضربی یہ ہے:-

$$(لا - ا - خ ب)(لا - ا + خ ب) \text{ یا } (لا - ا)^۲ + ب^۲$$

$ف(لا)$ کو $(لا - ا)^۲ + ب^۲$ پر تقسیم کرو اور فرض کروکہ خارج قسمت ق ہے اور باقی (اگر کوئی ہے تو) $بَ لا + بً$ ہے

$$\text{تب } ف(لا) = ق\{(لا - ا)^۲ + ب^۲\} + بَ لا + بً$$

اِس مساوات متماثلہ میں $لا = ا + خ ب$ رکھو، تب $ف(لا)$ حسب معطیات معدوم ہو جاتا ہے، نیز $(لا - ا)^۲ + ب^۲ = ۰$ اِسلئے $بَ(ا + خ ب) + بً = ۰$

حقیقی اور خیالی حصّوں کو مساوی کرنے سے

$$بَ ا + بً = ۰ \quad \text{اور} \quad بَ ب = ۰$$

لیکن معطیات کی رُو سے ب صفر نہیں ہے

ب = ۰ اور ب = ۰

پس ف (لا) پورا تقسیم ہو جاتا ہے (لا - ا)^۲ + ب^۲ پر یعنی
(لا - ا - خ ب) (لا - ا + خ ب) پر
لہٰذا لا = ا - خ ب بھی ایک اصل ہے۔

۵۴۴ - دفعۂ ماقبل میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی دو خیالی اصلیں ا ± خ ب ہوں تو (لا - ا)^۲ + ب^۲ جملہ ف (لا) کا ایک جزوِ ضربی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ا ± خ ب، ج ± خ د، ع ± خ گ، ... مساوات ف (لا) = ۰ کی خیالی اصلیں ہیں اور ان خیالی اصلوں کے متناظر درجہ دوم کے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب فہ (لا) ہے، تب

فہ (لا) = {(لا - ا)^۲ + ب^۲} {(لا - ج)^۲ + د^۲} {(لا - ع)^۲ + گ^۲} ......

اب لا کی ہر حقیقی قیمت کے لئے ان اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جزو ضربی مثبت ہے، پس لا کی حقیقی قیمتوں کے لئے فہ (لا) ہمیشہ مثبت ہے۔

۵۴۵ - دفعہ ۵۴۳ کی مانند ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منطق سروں کی کسی مساوات میں اصم اصلوں کے زوج واقع ہوتے ہیں یعنی اگر ا + √ب ایک اصل ہو تو ا - √ب بھی ایک اصل ہوگی۔

مثال ۱ - مساوات ۶ لا^۴ - ۱۳ لا^۳ - ۳۵ لا^۲ - لا + ۳ = ۰ کی ایک اصل ۲ - √۳ ہے، مساوات کو حل کرو۔

چونکہ ۲ - √۳ ایک اصل ہے اس لئے ۲ + √۳ بھی ایک اصل ہوگی اور اصلوں کے اس زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزوِ ضربی لا^۲ - ۴ لا + ۱ ہے۔

نیز ۶ لا^۴ - ۱۳ لا^۳ - ۳۵ لا^۲ - لا + ۳ = (لا^۲ - ۴ لا + ۱) (۶ لا^۲ + ۱۱ لا + ۳)

پس باقی اصلیں مساوات

۶ لا^۲ + ۱۱ لا + ۳ = ۰ یا (۳ لا + ۱) (۲ لا + ۳) = ۰

سے حاصل ہوتی ہیں - لہٰذا مطلوبہ اصلیں یہ ہیں -

$$-\frac{1}{3}\,،\ -\frac{3}{2}\,،\ (2+\sqrt{3})\,،\ (2-\sqrt{3})$$

مثال ۲ ـ منطق سروں کی ایک مساوات درجہ چہارم بناؤ جس کی ایک اصل $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$ ہو۔ ظاہر ہے کہ اصلوں کا ایک زوج $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$ ، $\sqrt{2}-\sqrt{-3}$ ہوگا اور دوسرا زوج $-\sqrt{2}+\sqrt{-3}$ ، $-\sqrt{2}-\sqrt{-3}$ ہوگا۔

پہلے زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزو ضربی $\text{لا}^2-2\sqrt{2}\,\text{لا}+5$ اور دوسرے زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزو ضربی $\text{لا}^2+2\sqrt{2}\,\text{لا}+5$ ہے

پس مطلوبہ مساوات یہ ہے۔

$$(\text{لا}^2+2\sqrt{2}\,\text{لا}+5)(\text{لا}^2-2\sqrt{2}\,\text{لا}+5)=0$$

یعنی $(\text{لا}^2+5)^2-8\,\text{لا}^2=0$

یا $\text{لا}^4+2\,\text{لا}^2+25=0$

مثال ۳ ـ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{ا}^2}{\text{لا}-\text{ا}}+\frac{\text{ب}^2}{\text{لا}-\text{ب}}+\frac{\text{ج}^2}{\text{لا}-\text{ج}}+\cdots\cdots+\frac{\text{ہ}^2}{\text{لا}-\text{ہ}}=\text{ک}$$

کی کوئی خیالی اصل نہیں۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ف + خ ق ایک اصل ہے، تب ف - خ ق بھی ایک اصل ہے، لا کی بجائے یہ قیمتیں درج کرو اور پہلے نتیجہ کو دوسرے نتیجہ میں سے تفریق کرو، تب

$$\text{ق}\left\{\frac{\text{ا}^2}{(\text{ف}-\text{ا})^2+\text{ق}^2}+\frac{\text{ب}^2}{(\text{ف}-\text{ب})^2+\text{ق}^2}+\frac{\text{ج}^2}{(\text{ف}-\text{ج})^2+\text{ق}^2}+\cdots+\frac{\text{ہ}^2}{(\text{ف}-\text{ہ})^2+\text{ق}^2}\right\}=0$$

اور یہ ممکن نہیں تاوقتیکہ ق = ۰۔

۴۴۶ ـ مساوات کی بعض اصلوں کی نوعیت معلوم کرنے کے لئے یہ ہمیشہ

ضروری نہیں ہوتا کہ مساوات مذکور کو حل کیا جائے۔ ذیل کے امور کی صحت از خود واضح اور بیّن ہے۔

(۱) اگر سر سب مثبت ہوں تو مساوات کی کوئی اصل مثبت نہیں ہوسکتی مثلاً مساوات $\text{لا}^{۵} + \text{لا}^{۳} + ۲\,\text{لا} + ۱ = ۰$ کی کوئی اصل مثبت نہیں ہے۔

(۲) اگر لا کی جُفت قوتوں کے سر سب یکساں علامت کے ہوں اور طاق قوتوں کے سر سب مختلف علامتوں کے ہوں تو مساوات کی کوئی منفی اصل نہیں ہوسکتی۔ مثلاً مساوات

$$\text{لا}^{۶} + \text{لا}^{۵} - ۲\,\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} + ۷\,\text{لا} - ۵ = ۰$$

کی کوئی اصل منفی نہیں ہے۔

(۳) اگر مساوات میں لا کی صرف جُفت قوتیں ہوں اور سر سب ایک ہی علامت کے ہوں تو مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہوتی، مثلاً مساوات $۲\,\text{لا}^{۸} + ۳\,\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۲} + ۷ = ۰$ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے۔

(۴) اگر کسی مساوات میں لا کی صرف طاق قوتیں ہوں اور سب سر ایک ہی علامت کے ہوں تو مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہوتی سوائے $\text{لا} = ۰$۔ مثلاً مساوات $\text{لا}^{۹} + ۲\,\text{لا}^{۵} + ۳\,\text{لا}^{۳} + \text{لا} = ۰$ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے، سوائے $\text{لا} = ۰$ کے۔

متذکرہ بالا کُل نتیجے اگلی دفعہ کے مسئلہ میں شامل ہیں، اس مسئلہ کو ڈی کارٹ (Descarte) کی علامتوں کا قانون کہتے ہیں۔

۵۴۷۔ مساوات $\text{ف}(\text{لا}) = ۰$ کی زیادہ سے زیادہ اتنی مثبت اصلیں ہوسکتی ہیں جتنی کہ $\text{ف}(\text{لا})$ میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں اور زیادہ سے زیادہ اتنی منفی علامتیں ہوسکتی ہیں جتنی کہ $\text{ف}(-\text{لا})$ میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں

فرض کرو کہ ایک کثیرالارقام جملہ کی رقوم کی علامتیں $+ + - - + - - -$ $+ - + -$ ہیں۔ ہم یہ دیکھیں گے کہ اگر اس کثیرالارقام جملہ کو ایک جملۂ ثنائی

سے جسکی علامتیں + - ہوں ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب میں علامتوں کی تبدیلیوں کی جو تعداد ہوگی وہ ابتدائی جملۂ کثیر الارقام کی علامتوں کی تبدیلیوں سے کم از کم ایک زیادہ ہوگی -

عمل ضرب میں رقموں کی محض علامتیں درج کرنے سے

$$- \; + \; - \; + \; - \; - \; - \; + \; - \; - \; + \; +$$

$$- \; +$$

$$- \; + \; - \; + \; - \; - \; - \; + \; - \; - \; + \; +$$

$$+ \; - \; + \; - \; + \; + \; + \; - \; + \; + \; - \; -$$

$$+ \; - \; + \; - \; + \; \mp \; \mp \; - \; + \; \mp \; - \; \pm \; +$$

ابتدائی جملہ اور حاصل ضرب کی علامتوں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

(۱) ابتدائی جملہ میں جب کوئی علامت مسلسل آتی ہے تو ہر تسلسل کے جواب میں حاصل ضرب میں مشتبہ علامت ہوتی ہے

(۲) مشتبہ علامت یا مشتبہ علامتوں کے پہلے اور بعد کی علامتیں مختلف ہیں -

(۳) آخر میں علامت کی ایک مزید تبدیلی واقع ہوتی ہے -

اب سب سے زیادہ ناموافق صورت پر غور کرو، فرض کرو کہ سب مشتبہ علامتوں کی بجائے تسلسل بنادئے گئے ہیں، تب (۲) سے ظاہر ہے کہ خواہ ہم مشتبہ علامتوں کو اُوپر کی علامتوں میں تبدیل کریں یا نیچے کی علامتوں میں، دونوں صورتوں میں علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد ایک ہی ہے - اُوپر کی علامتیں لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد

$$+ \; - \; + \; - \; + \; - \; - \; - \; + \; - \; - \; + \; +$$

کی تبدیلیوں کی تعداد سے کم نہیں ہوسکتی اور علامتوں کا یہ سلسلہ وہی ہے جو ابتدائی کثیر الارقام کا سلسلہ ہے سوائے اس کے آخر میں علامت کی ایک مزید تبدیلی واقع ہوئی ہے -

پس اگر ہم فرض کریں کہ منفی اور خیالی اصلوں کے متناظر اجزائے ضربی پہلے ضرب دئے جا چکے ہیں تو ظاہر ہے کہ محصلہ جملہ کو جزو ضربی

لا − ا سے ضرب دینے سے (جو ایک مثبت اصل کو تعبیر کرتا ہے) آخری حاصل ضرب میں کم از کم ایک مزید تبدیلی علامت پیدا ہوگی۔ پس کسی مساوات کی مثبت اصلیں زیادہ سے زیادہ اتنی ہوسکتی ہیں جتنی کہ اس میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں۔

نیز مساوات ف(−لا) = ۰ کی اصلیں ف(لا) = ۰ کی اصلوں کے مساوی لیکن مختلف العلامت ہیں۔ اسلئے مساوات ف(لا) = ۰ کی منفی اصلیں ف(−لا) = ۰ کی مثبت اصلیں ہیں۔ لیکن ان مثبت اصلوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ اتنی ہوسکتی ہے جتنی کہ ف(−لا) میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں یعنی ف(لا) = ۰ کی منفی اصلوں کی تعداد ف(−لا) کی علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہوسکتی۔

مثال۔ مساوات لا^{۹} + ۵لا^{۸} − لا^{۳} + ۷لا + ۲ = ۰ پر غور کرو۔

اس میں علامتوں کی صرف دو تبدیلیاں ہیں۔ اس لئے مثبت اصلیں زیادہ سے زیادہ دو ہوسکتی ہیں۔

نیز ف(−لا) = −لا^{۹} + ۵لا^{۸} + لا^{۳} − ۷لا + ۲ = ۰

اس میں علامتوں کی صرف تین تبدیلیاں ہیں، اس لئے مفروضہ مساوات کی منفی اصلیں زیادہ سے زیادہ تین ہوسکتی ہیں۔ اس لئے لازماً مساوات زیربحث کی کم از کم چار خیالی اصلیں ہونگی۔

امثلہ نمبری ۳۵(ب)

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱۔ ۳لا^{۴} − ۱۰لا^{۳} + ۴لا^{۲} − لا − ۶ = ۰ جبکہ ایک اصل $\frac{۱ + \sqrt{-۳}}{۲}$ ہو

۲۔ ۶لا^{۵} − ۱۳لا^{۳} − ۳۵لا^{۲} − لا + ۳ = ۰ جبکہ ایک اصل ۲ − $\sqrt{۳}$ ہو

۳۔ لا^{۴} + ۴لا^{۳} + ۵لا^{۲} + ۲لا − ۲ = ۰ جبکہ ایک اصل −۱ + $\sqrt{-۱}$ ہو

۴۔ لا^{4} + ۴ لا^{3} + ۶ لا^{2} + ۴ لا + ۵ = ۰ جبکہ ایک اصل $\sqrt{-1}$ ہو

۵۔ مساوات لا^{5} - لا^{4} + ۸ لا^{2} - ۹ لا - ۱۵ = ۰ جبکہ ایک اصل $\sqrt{3}$ ہو اور

دوسری $1 - 2\sqrt{-1}$ کم سے کم ابعاد کی ایک ایسی مساوات بناؤ جسکے سر ناطق ہوں اور جسکی اصلوں میں سے ایک اصل یہ ہو:-

۶ - $\sqrt{3} + \sqrt{-2}$		۷ - $-\sqrt{-1} + \sqrt{5}$

۸ - $-\sqrt{2} - \sqrt{-2}$		۹ - $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

۱۰ - ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ ہوں $\pm 4\sqrt{3}$ ، $5 \pm 2\sqrt{-1}$

۱۱ - ایک مساوات بناؤ جس کی اصلیں یہ ہوں $1 \pm \sqrt{-2}$ ، $2 \pm \sqrt{-3}$

۱۲ - آٹھویں درجہ کی ایک منطق سروں والی مساوات بناؤ جس کی ایک اصل $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{-1}$ ہو

۱۳ - مساوات ۳ لا^{4} + ۱۲ لا^{2} + ۵ لا - ۴ = ۰ کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو-

۱۴ - ثابت کرو کہ ۲ لا^{7} - لا^{4} + ۴ لا^{3} - ۵ = ۰ کی کم از کم چار خیالی اصلیں ہیں -

۱۵ - مساوات لا^{10} - ۴ لا^{6} + لا^{4} - ۲ لا - ۳ = ۰ کی اصلوں کی بابت کیا نتیجہ نکالا جاسکتا ہے۔

۱۶ - مساوات لا^{9} - لا^{5} + لا^{4} + لا^{2} + ۱ = ۰ کی خیالی اصلوں کی تعداد کم از کم کیا ہوسکتی ہے

۱۷ - وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات لا^{3} - ف لا^{2} + ق لا - ر = ۰ کی

(۱) دو اصلیں مساوی اور مختلف العلامت ہوں

(۲) اصلیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں

۱۸ - اگر مساوات لا^{4} + ف لا^{3} + ق لا^{2} + ر لا + س = ۰ کی اصلیں سلسلۂ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ ف^{3} - ۴ ف ق + ۸ ر = ۰ اور اگر یہ سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں

تو ثابت کرو کہ ف^{۲} س = ر^{۲}

۱۹- اگر مساوات لا^{ن} - ۱ = ۰ کی اصلیں ۱، عہ، بہ، جہ، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

(۱ - عہ)(۱ - بہ)(۱ - جہ) ... = ن

اگر مساوات لا^{۳} - ف لا^{۲} + ق لا - ر = ۰ کی اصلیں ا، ب، ج ہوں تو ذیل کی مقادیر کی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۰- Σ ا^{۲} ب^{۲} ۲۱- (ب + ج)(ج + ا)(ا + ب)

۲۲- Σ (ب/ج + ج/ب)   ۲۳- Σ ا^{۲} ب

اگر مساوات لا^{۴} + ف لا^{۳} - ق لا^{۲} + ر لا + س = ۰ کی اصلیں ا، ب، ج، د ہوں تو ذیل کی مقادیر کی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۴- Σ ا^{۲} ب ج   ۲۵- Σ ا^{۴}

۴۰۵- فا(لا + ھ) کی قیمت معلوم کرو جہاں فا(لا)، لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہے

فرض کرو کہ فا(لا) = ف. لا^{ن} + ف$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ف$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ...

+ ف$_{ن-۱}$ لا + ف$_{ن}$، تب

فا(لا + ھ) = ف. (لا + ھ)^{ن} + ف$_{۱}$ (لا + ھ)$^{ن-۱}$ + ف$_{۲}$ (لا + ھ)$^{ن-۲}$ + ...

... + ف$_{ن-۱}$ (لا + ھ) + ف$_{ن}$

سب رقموں کو بذریعہ مسئلہ ثنائی پھیلانے اور جواب کو ھ کی صعودی قوتوں کی ترتیب میں لکھنے سے

فا(لا + ھ) = ف. لا^{ن} + ف$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ف$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ف$_{ن-۱}$ لا + ف$_{ن}$

$$+\text{ھ}\left\{\text{ن ف}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}+(\text{ن}-۱)\text{ف}_۱\text{لا}^{\text{ن}-۲}+(\text{ن}-۲)\text{ف}_۲\text{لا}^{\text{ن}-۳}+\ldots\ldots+\text{ف}_{\text{ن}-۱}\right\}$$

$$+\frac{\text{ھ}^۲}{\underline{|۲}}\left\{\text{ن}(\text{ن}-۱)\text{ف}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}+(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\text{ف}_۱\text{لا}^{\text{ن}-۳}+\ldots\ldots+۲\,\text{ف}_{\text{ن}-۲}\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\left\{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots\ldots۲\times۱\,\text{ف}\right\}$$

اِس نتیجہ کو بالعموم اِس شکل میں لکھا جاتا ہے

$$\text{فا}(\text{لا}+\text{ھ})=\text{فا}(\text{لا})+\text{ھ}\,\text{فا}'(\text{لا})+\frac{\text{ھ}^۲}{\underline{|۲}}\text{فا}''(\text{لا})+\frac{\text{ھ}^۳}{\underline{|۳}}\text{فا}'''(\text{لا})+\ldots\ldots+\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\text{فا}^{\text{ن}}(\text{لا})$$

اور تفاعیل $\text{فا}'(\text{لا})$، $\text{فا}''(\text{لا})$، $\text{فا}'''(\text{لا})$ ... $\text{فا}^{\text{ن}}(\text{لا})$ کو $\text{فا}(\text{لا})$ کے پہلا، دوسرا، تیسرا، ...... ن، واں تفاعل کہتے ہیں۔

وہ طالب علم جو احصائے تفرقات کے معمولی اصولوں سے واقف ہے اُس سے مخفی نہیں کہ $\text{فا}(\text{لا}+\text{ھ})$ کی مندرجہ بالا تفصیل ٹیلر (Taylor) کے مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے، اس لئے تفاعیل $\text{فا}'(\text{لا})$، $\text{فا}''(\text{لا})$ وغیرہ تفرق کے معمولی ضوابط کی رُو سے بآسانی لکھے جا سکتے ہیں۔ مثلاً $\text{فا}(\text{لا})$ سے $\text{فا}'(\text{لا})$ حاصل کرنے کے لئے $\text{فا}(\text{لا})$ کی ہر ایک رقم کو لا کی قوت سے ضرب دو اور قوت نما میں سے ایک کم کر دو۔

اِسی طرح مسلسل تفرق سے ہم $\text{فا}''(\text{لا})$، $\text{فا}'''(\text{لا})$ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

ھ کی بجائے - ھ لکھنے سے

$$\text{فا}(\text{لا}-\text{ھ})=\text{فا}(\text{لا})-\text{ھ}\,\text{فا}'(\text{لا})+\frac{\text{ھ}^۲}{\underline{|۲}}\text{فا}''(\text{لا})-\frac{\text{ھ}^۳}{\underline{|۳}}\text{فا}'''(\text{لا})$$

$$\ldots\ldots(-۱)^{\text{ن}}\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\text{فا}^{\text{ن}}(\text{لا})$$

تفاعل $\text{فا}(\text{لا}+\text{ھ})$، صریحاً لا اور ھ کے لحاظ سے متشاکل ہے، لہذا

$$\text{فا}(\text{لا}+\text{ھ}) = \text{فا}(\text{ھ}) + \text{لا}\,\text{فا}'(\text{ھ}) + \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}}\,\text{فا}''(\text{ھ}) + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{فا}^{\text{ن}}(\text{ھ})$$

جہاں $\text{فا}'(\text{ھ})$، $\text{فا}''(\text{ھ})$، $\text{فا}'''(\text{ھ})$ ... سے وہ نتیجے مراد ہیں جو متواتر مشتق تفاعلوں $\text{فا}'(\text{لا})$، $\text{فا}''(\text{لا})$، $\text{فا}'''(\text{لا})$ میں لا کی بجائے ھ رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

مثال۔ اگر $\text{فا}(\text{لا}) = ۲\text{لا}^{۴} - \text{لا}^{۳} - ۲\text{لا}^{۲} + ۵\text{لا} - ۱$ تو $\text{فا}(\text{لا}+۳)$ کی قیمت معلوم کرو۔

یہاں $\text{فا}(\text{لا}) = ۲\text{لا}^{۴} - \text{لا}^{۳} - ۲\text{لا}^{۲} + ۵\text{لا} - ۱$ یعنی $\text{فا}(۳) = ۱۳۱$

$$\text{فا}'(\text{لا}) = ۸\text{لا}^{۳} - ۳\text{لا}^{۲} - ۴\text{لا} + ۵ \quad \text{اور} \quad \text{فا}'(۳) = ۱۸۲$$

$$\frac{\text{فا}''(\text{لا})}{\underline{|۲}} = ۱۲\text{لا}^{۲} - ۳\text{لا} - ۲ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فا}''(۳)}{\underline{|۲}} = ۹۷$$

$$\frac{\text{فا}'''(\text{لا})}{\underline{|۳}} = ۸\text{لا} - ۱ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فا}'''(۳)}{\underline{|۳}} = ۲۳$$

$$\frac{\text{فا}^{۴}(\text{لا})}{\underline{|۴}} = ۲$$

$$\text{پس}\quad \text{فا}(\text{لا}+۳) = ۲\text{لا}^{۴} + ۲۳\text{لا}^{۳} + ۹۷\text{لا}^{۲} + ۱۸۲\text{لا} + ۱۳۱$$

مندرجہ بالا قیمت ہارنر (Horner) کے طریقے سے زیادہ آسانی سے معلوم کی جاسکتی ہے۔ یہ طریقہ ذیل میں درج کیا جاتا ہے:-

۵۴۹ - فرض کرو کہ $\text{فا}(\text{لا}) = \text{ف}_{۰}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ف}_{۱}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ف}_{۲}\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ف}_{\text{ن}-۱}\text{لا} + \text{ف}_{\text{ن}}$

رکھو $\text{لا} = \text{ما} + \text{ھ}$ اور فرض کرو کہ $\text{فا}(\text{لا})$ ہو جاتا ہے:-

$$\text{ق}_{۰}\text{ما}^{\text{ن}} + \text{ق}_{۱}\text{ما}^{\text{ن}-۱} + \text{ق}_{۲}\text{ما}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ق}_{\text{ن}-۱}\text{ما} + \text{ق}_{\text{ن}}$$

اب چونکہ $\text{ما} = \text{لا} - \text{ھ}$ اس لئے ہمیں ذیل کی مساوات متماثلہ حاصل ہوتی ہے:-

$$\text{ف}_{۰}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ف}_{۱}\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ف}_{۲}\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ف}_{\text{ن}-۱}\text{لا} + \text{ف}_{\text{ن}}$$

$$= \text{ق}_{۰}(\text{لا}-\text{ھ})^{\text{ن}} + \text{ق}_{۱}(\text{لا}-\text{ھ})^{\text{ن}-۱} + \cdots + \text{ق}_{\text{ن}-۱}(\text{لا}-\text{ھ}) + \text{ق}_{\text{ن}}$$

اس لئے ق ن باقی ہے جو فا (لا) کو لا - ھ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ نیز عملِ تقسیم سے جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے:-

$$ق_{٠}(لا - ھ)^{ن-۱} + ق_{۱}(لا - ھ)^{ن-۲} + \dots\dots + ق_{ن-۱}$$

اسی طرح سے $ق_{ن-۱}$ باقی بچتی ہے جبکہ مندرجہ بالا جملہ کو لا - ھ پر تقسیم کیا جائے اور اس عملِ تقسیم سے جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے:-

$$ق_{٠}(لا - ھ)^{ن-۲} + ق_{۱}(لا - ھ)^{ن-۳} + \dots\dots + ق_{ن-۲}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، پس $ق_{ن}$، $ق_{ن-۱}$، $ق_{ن-۲}$ .... کی قیمتیں حسب کُلیہ دفعہ ۵۱۵ نکل سکتی ہیں۔ آخری خارج قسمت $ق_{٠}$ ہے اور صریحاً $ش_{٠}$ کے مساوی ہے۔

جملہ $۲ لا^{۴} - لا^{۳} - ۲ لا^{۲} + ۵ لا - ۱$

میں لا کو لا + ۳ میں بدل دینے سے کیا حاصل ہوتا ہے۔

یہاں ہم بالتواتر لا - ۳ پر تقسیم کرتے ہیں۔

۲	۱-	۲-	۵	۱-	
	۶	۱۵	۳۹	۱۳۲	
۵	۱۳	۴۴		۱۳۳ =	$ق_{۴}$
۶	۳۳	۱۳۸			
۱۱	۴۶	۱۸۲		=	$ق_{۳}$
۶	۵۱				
۱۷	۹۷			=	$ق_{۲}$
۶					
۲۳				=	$ق_{۱}$

یا زیادہ مختصر طور پر اس طرح

۲	۱-	۲-	۵	۱-
۲	۵	۱۳	۴۴	۱۳۱
۲	۱۱	۴۶	۱۸۲	
۲	۱۷	۹۷		
۲	۲۳			
۲				

پس جوابِ مطلوبہ یہ ہے: $۲ لا^{۴} + ۲۳ لا^{۳} + ۹۷ لا^{۲} + ۱۸۲ لا + ۱۳۱$

دفعہ ۵۴۸ سے مقابلہ کرو۔

یہ ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے کہ ہارنر کا طریقہ عددی حسابات میں خاص طور پر مفید ہوتا ہے۔

۵۵۰ ۔ اگر متغیر لا، بتدریج بدل کر ا سے ب ہوجائے تو تفاعل فا(لا) بتدریج بدل کر فا(ا) سے فا(ب) ہوجاتا ہے۔

فرض کرو کہ ج اور ج + ھ، لا کی ایسی دو قیمتیں ہیں جو ا اور ب کے درمیان واقع ہیں۔ تب

$$فا(ج + ھ) - فا(ج) = ھ فاَ(ج)$$

$$+ \frac{ھ^2}{\lfloor 2} فاً(ج) + \dots\dots + \frac{ھ^ن}{\lfloor ن} فا^ن(ج)$$

اب ھ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے فا(ج + ھ) اور فا(ج) کے فرق کو ہم اتنا کم کرسکتے ہیں جتنا چاہیں، اس لئے متغیر لا میں ایک چھوٹی تبدیلی پیدا کرنے سے تفاعل فا(لا) میں ایک متناظر چھوٹی تبدیلی پیدا ہوتی ہے، پس جب لا بتدریج بدل کر ا سے ب ہوجاتا ہے تو ف(لا) بتدریج بدلکر فا(ا) سے فا(ب) ہوجاتا ہے۔

۵۵۱ ۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ ہم نے یہ ثابت نہیں کیا ہے کہ فا(لا)، فا(ا) سے بڑھ کر فا(ب) ہوجاتا ہے یا فا(ا) سے گھٹ کر فا(ب) ہوجاتا ہے بلکہ صرف یہ ثابت کیا ہے کہ یہ بغیر کسی یک لخت تبدیلی کے بتدریج فا(ا) سے بدل کر فا(ب) ہوتا ہے۔ ممکن ہے کہ یہ اس تبدیلی کے دوران میں بعض اوقات بڑھتا ہو اور بعض اوقات کم ہوتا ہو۔

جو طالبعلم ترسیم منحنیات کے طریقہ سے واقف ہے منحنی ما = فا(لا) کی خاص صورتوں میں ترسیم بنانے سے فا(لا) کی قیمت کے تدریجی تغیرات کا معائنہ کرسکتا ہے۔

۵۵۲ ۔ اگر فا(ا) اور فا(ب) مختلف العلامت ہوں تو مساوات

فا (لا) = ۰ کی ایک اصل ا اور ب کے درمیان ضرور واقع ہوگی۔

جب لا بتدریج بدل کر ا سے ب ہو جاتا ہے تو فا (لا) بتدریج بدل کر فا (ا) سے فا (ب) ہو جاتا ہے اور ایسا کرنے میں فا (ا) اور فا (ب) کی کل مابینی قیمتیں اختیار کرتا ہے لیکن چونکہ فا (ا) اور فا (ب) مختلف العلامت ہیں اس لئے قیمت صفر ضرور ان کے درمیان ہوگی یعنی ا اور ب کے درمیان لا کی کسی نہ کسی قیمت کے لئے فا (لا) ۰ ہوگا۔

اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ ا اور ب کے درمیان فا (لا) = ۰ کی صرف ایک ہی اصل ہے اور نہ ہی یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر فا (ا) اور فا (ب) کی علامت ایک ہی ہو تو مساوات فا (لا) = ۰ کی ا اور ب کے درمیان کوئی اصل نہیں ہے۔

۵۵۳ - طاق درجہ کی کسی مساوات کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے اور اس کی علامت آخری رقم کی علامت کے برعکس ہوتی ہے۔

تفاعل فا (لا) میں لا کی بجائے بالترتیب +∞، ۰، -∞ درج کرنے سے

فا (+∞) = +∞ ، فا (۰) = $ف_ن$ اور فا (-∞) = -∞

اگر $ف_ن$ مثبت ہو تو فا (لا) = ۰ کی ایک اصل ۰ اور -∞ کے درمیان ہے اور اگر $ف_ن$ منفی ہو تو فا (لا) = ۰ کی ایک اصل ۰ اور +∞ کے درمیان ہوگی۔

۵۵۴ - اگر ایک مساوات کا درجہ جفت ہو اور اس کی آخری رقم منفی ہو تو اس مساوات کی کم از کم دو اصلیں حقیقی ہونگی جن میں سے ایک مثبت ہوگی اور دوسری منفی۔

اس صورت میں فا (+∞) = +∞، فا (۰) = $ف_ن$، فا (-∞) = +∞ لیکن $ف_ن$ منفی ہے، اس لئے فا (لا) = ۰ کی ایک اصل ۰ اور +∞ کے درمیان ہے اور ایک اور اصل ۰ اور -∞ کے درمیان ہے۔

۵۵۶ - اگر ا ، ب ، ج ، ..... ک مساوات فا(لا) = ۰ کی اصلیں ہوں تو

فا(لا) = ف(لا - ا)(لا - ب)(لا - ج) .... (لا - ک)

جہاں مقادیر ا ، ب ، ج ، ... ک لازمی طور پر غیر مساوی نہیں ہیں ، اگر ان میں سے ر اصلیں ا کے مساوی ہوں ، س اصلیں ب کے مساوی اور ط اصلیں ج کے مساوی ہوں ...... تو

فا(لا) = ف(لا - ا)^ر (لا - ب)^س (لا - ج)^ط .. ....

اس صورت میں بھی یہی کہنا سہولت بخش ہے کہ مساوات فا(لا) = ۰ کی ن اصلیں ہیں جبکہ مساوی اصلوں میں سے ہر ایک کو الگ الگ خیال کیا جائے ۔

۵۵۷ - اگر مساوات فا(لا) = ۰ کی ر اصلیں ا کے مساوی ہوں تو مساوات فاَ(لا) = ۰ کی ر - ۱ اصلیں ا کے مساوی ہونگی ۔

فرض کرو کہ فہ(لا) خارج قسمت ہے جبکہ فا(لا) کو (لا - ا)^ر پر تقسیم کیا جائے تو فا(لا) = (لا - ا)^ر فہ(لا)

لا کی بجائے لا + ھ رکھو

فا(لا + ھ) = (لا - ا + ھ)^ر فہ(لا + ھ)

∴ فا(لا) + ھ فاَ(لا) + (ھ^۲/۲) فاً(لا) + ...

= {(لا - ا)^ر + ر(لا - ا)^(ر-۱) ھ + ...}{فہ(لا) + ھ فہَ(لا) + (ھ^۲/۲) فہً(لا) + ...}

∴ مساوات متماثلہ میں ھ کے سروں کو مساوی کرنے سے

فاَ(لا) = ر(لا - ا)^(ر-۱) فہ(لا) + (لا - ا)^ر فہَ(لا)

پس فاَ(لا) میں جزو ضربی لا - ا ، ر - ۱ بار شامل ہے یعنی مساوات فاَ(لا) = ۰ کی (ر - ۱) اصلیں ا کے مساوی ہیں ۔

اسی طرح سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ اگر مساوات $فا(لا) = ۰$ کی تین اصلیں ب کے مساوی ہوں تو $فا'(لا) = ۰$ کی دو اصلیں ب کے مساوی ہونگی اور علیٰ ہذا القیاس۔

۵۵۸ - مذکردہ بالا ثبوت سے ظاہر ہے کہ اگر $فا(لا)$ میں جزو ضربی $(لا - ا)^{ر}$ شامل ہو تو $فا'(لا)$ میں جزو ضربی $(لا - ا)^{ر-۱}$ شامل ہوگا۔ پس $فا(لا)$ اور $فا'(لا)$ میں جزو ضربی $(لا - ا)^{ر-۱}$ مشترک ہوگا۔ لہذا اگر $فا(لا)$ اور $فا'(لا)$ میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو تو ظاہر ہے کہ $فا(لا)$ میں کوئی جزو ضربی ایک سے زیادہ بار شامل نہیں ہے پس مساوات $فا(لا) = ۰$ کی اصلیں مساوی ہونگی اگر $فا(لا)$ اور $فا'(لا)$ میں کوئی مشترک جزو ضربی ہو اور مساوی نہیں ہونگی اگر ان میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔

۵۵۹ - دفعۂ ماقبل سے ظاہر ہے کہ مساوات $فا(لا) = ۰$ کی مساوی اصلیں حاصل کرنے کے لئے ہمیں پہلے $فا(لا)$ اور $فا'(لا)$ کا مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنا چاہیئے۔

مثال ۱ - مساوات $لا^{۴} - ۱۱لا^{۳} + ۴۴لا^{۲} - ۷۶لا + ۴۸ = ۰$ میں مساوی اصلیں ہیں، مساوات کو حل کرو۔

یہاں $فا(لا) = لا^{۴} - ۱۱لا^{۳} + ۴۴لا^{۲} - ۷۶لا + ۴۸$

$$فا'(لا) = ۴لا^{۳} - ۳۳لا^{۲} + ۸۸لا - ۷۶$$

اب ہم حسب معمول یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ $فا(لا)$ اور $فا'(لا)$ کا عادِ اعظم $لا - ۲$ ہے، اس لئے $(لا - ۲)^{۲}$ ایک جزو ضربی ہے $فا(لا)$ کا، اور

$$فا(لا) = (لا - ۲)^{۲}(لا^{۲} - ۷لا + ۱۲)$$

$$= (لا - ۲)^{۲}(لا - ۳)(لا - ۴)$$

پس اصلیں ۲، ۲، ۳ اور ۴ ہیں۔

مثال ۲ - اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ مساوات $ا لا^{۳} + ۳ب لا^{۲} + ۳ج لا + د = ۰$ کی دو اصلیں مساوی ہوں۔

اس صورت میں مساواتیں فا(لا) = ۰ اور فاَ(لا) = ۰ یعنی

ا لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د = ۰ .... (۱)

ا لا^۲ + ۲ ب لا + ج = ۰ .... (۲)

کی ایک اصل مشترک ہوگی اور شرط مطلوبہ ان مساواتوں میں سے لا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوسکتی ہے۔

(۱) کو (۲) کے ساتھ ملانے سے

ب لا^۲ + ۲ ج لا + د = ۰ .... (۳)

(۲) اور (۳) سے

لا^۲ / ۲(ب د − ج^۲) = لا / ب ج − ا د = ۱ / ۲(ا ج − ب^۲)

پس شرط مطلوبہ یہ ہے

(ب ج − ا د)^۲ = ۴ (ا ج − ب^۲)(ب د − ج^۲)

۵۹۵ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر مساوات فا(لا) = ۰ کی ر اصلیں ا کے مساوی ہوں تو مساوات فاَ(لا) = ۰ کی ر − ۱ اصلیں ا کے مساوی ہونگی۔ لیکن فاً(لا) فاَ(لا) کا پہلا مشتق تفاعل ہے۔ اس لئے مساوات فاً(لا) = ۰ کی ر − ۲ اصلیں ا کے مساوی ہونگی، اسی طرح سے فاً(لا) = ۰ کی ر − ۳ اصلیں ا کے مساوی ہونگی اور علی ہذا القیاس۔ ان امور کا لحاظ کرتے ہوئے ہم مساوات فا(لا) = ۰ کی مساوی اصلیں دفعہ ۵۹۳ کے قاعدہ کی نسبت زیادہ آسانی سے معلوم کرسکتے ہیں۔

۵۹۶ — اگر ا، ب، ج، د ..... ک مساوات فا(لا) = ۰ کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ

فاَ(لا) = فا(لا) / لا − ا + فا(لا) / لا − ب + فا(لا) / لا − ج + ... + فا(لا) / لا − ک

ظاہر ہے کہ فا(لا) = (لا − ا)(لا − ب)(لا − ج) .... (لا − ک)

لا کی بجائے لا + ھ لکھنے سے

فا(لا + ھ) = (لا − ا + ھ)(لا − ب + ھ)(لا − ج + ھ) ...... (لا − ک + ھ) ...... (۱)

لیکن فا(لا + ھ) = فا(لا) + ھ فاَ(لا) + $\frac{ھ^{۲}}{\lfloor ۲}$ فاً(لا) + ...

اس لئے فاَ(لا)، (۱) کے بائیں جانب کے رکن میں ھ کے سر کے مساوی ہے، لہٰذا دفعہ [illegible] کے بموجب

فاَ(لا) = (لا − ب)(لا − ج) ...... (لا − ک) + (لا − ا)(لا − ج) ...... (لا − ک) + ...

یعنی فاَ(لا) = $\frac{فا(لا)}{(لا - ا)} + \frac{فا(لا)}{(لا - ب)} + \frac{فا(لا)}{(لا - ج)} + \ldots\ldots + \frac{فا(لا)}{لا - ک}$

۵۶۲ ـ دفعہ ماقبل کے نتیجہ کی مدد سے ہم کسی مساوات کی اصلوں کی کسی خاص قوت کا حاصل جمع نہایت آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال ـ اگر مساوات

لا^{۵} + ف لا^{۳} + ق لا^{۲} + ت = ۰

کی اصلوں کی ک ویں قوتوں کے حاصل جمع کو ج$_{ک}$ سے تعبیر کیا جائے تو ج$_{۴}$، ج$_{۵}$، ج$_{۶}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ فا(لا) = لا^{۵} + ف لا^{۳} + ق لا^{۲} + ت

تب　فاَ(لا) = ۵ لا^{۴} + ۳ ف لا^{۲} + ۲ ق لا

اب $\frac{فا(لا)}{لا - ا}$ = لا^{۴} + (ا + ف) لا^{۳} + (ا^{۲} + ا ف) لا^{۲} + (ا^{۳} + ا ف + ق) لا + ا^{۴}

+ ا^{۲} ف + ا ق

اور ایسے ہی $\frac{فا(لا)}{لا - ب}$ ، $\frac{فا(لا)}{لا - ج}$ ، $\frac{فا(لا)}{لا - د}$ ، $\frac{فا(لا)}{لا - ع}$ کیلئے متشابہ جملات

پس جمع کرنے سے

$$۵لا^{۴} + ۴ف لا^{۳} + ۲ق لا = ۵لا^{۴} + (ج_{۱} + ۵ف)لا^{۳} + (ج_{۲} + ف ج_{۱})لا^{۲}$$
$$+ (ج_{۳} + ف ج_{۲} + ۵ق)لا + (ج_{۴} + ف ج_{۳} + ق ج_{۱})$$

سروں کو متماثل کرنے سے

$ج_{۱} + ۵ف = ۴ف$ جس سے $ج_{۱} = -ف$

$ج_{۲} + ف ج_{۱} = ۰$ جس سے $ج_{۲} = ف^{۲}$

$ج_{۳} + ف ج_{۲} + ۵ق = ۲ق$ جس سے $ج_{۳} = -ف^{۳} - ۳ق$

$ج_{۴} + ف ج_{۳} + ق ج_{۱} = ۰$ جس سے $ج_{۴} = ف^{۴} + ۴ف ق$

ک کی کسی اور قیمت کے لئے ہم $ج_{ک}$ کی قیمت حسبِ ذیل طریقہ سے معلوم کرتے ہیں۔

مساوات مذکورہ کو $لا^{ک-۵}$ سے ضرب دینے سے

$$لا^{ک} + ف لا^{ک-۱} + ق لا^{ک-۳} + ت لا^{ک-۵} = ۰$$

لا کی بجائے بالترتیب قیمتیں ا، ب، ج، د، ی رکھنے اور نتائج کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ج_{ک} + ف ج_{ک-۱} + ق ج_{ک-۳} + ت ج_{ک-۵} = ۰$$

ک = ۵ رکھو، تب $ج_{۵} + ف ج_{۴} + ق ج_{۲} + ۵ت = ۰$

جس سے $ج_{۵} = -ف^{۵} - ۵ف^{۲}ق - ۵ت$

ک = ۶ رکھو، تب $ج_{۶} + ف ج_{۵} + ق ج_{۳} + ت ج_{۱} = ۰$

جس سے $ج_{۶} = ف^{۶} + ۶ف^{۳}ق + ۳ق^{۲} + ۶ف ت$

ج$_4$ کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ک کو بالتسلسل ۴، ۳، ۲، ۱ کے مساوی فرض کرو، تب

ج$_4$ + ف ج$_3$ + ق ج$_2$ + ت ج$_1$ = ۰ جس سے ج$_1$ =

ج$_5$ + ش ج$_1$ + ۵ ق + ت ج$_2$ = ۰ جس سے ج$_2$ = − ۲ف / ت

ج$_6$ + ف ج$_5$ + ق ج$_4$ + ت ج$_3$ = ۰ جس سے ج$_3$ = ۰

ج$_7$ + ۵ف + ق ج$_2$ − ت ج$_3$ = ۰ جس سے ج$_4$ = ۲ق^2 / ت^2 − ۴ف / ت

۷۶۳ ۔ جب سر عددی ہوں تو ہم مندرجہ ذیل مثال سے طریقہ کے مطابق عمل کر سکتے ہیں۔

مثال ۔ مساوات لا^3 − ۲لا^2 + لا − ۱ = ۰ کی اصلوں کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

یہاں فا(لا) = لا^3 − ۲لا^2 + لا − ۱

فا′(لا) = ۳لا^2 − ۴لا + ۱

نیز فا′(لا) / فا(لا) = ۱/(لا − ا) + ۱/(لا − ب) + ۱/(لا − ج)

= Σ (۱/لا + ا/لا^2 + ا^2/لا^3 + ا^3/لا^4 + ...)

= ۳/لا + ج$_1$/لا^2 + ج$_2$/لا^3 + ج$_3$/لا^4 + ...

لہذا ج$_4$ اُس خارج قسمت میں جو فا′(لا) کو فا(لا) پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے ۱/لا^5 کے سر کے مساوی ہے، خارج قسمت مذکور تقسیم ترکیبی کے طریقۂ ذیل سے بآسانی حاصل ہوسکتا ہے۔

۱	۳ − ۴ + ۱
۲	۶ − ۳ + ۳
−۱	۴ − ۲ + ۲
۱	۴ − ۲ + ۲
±	۱۰ − ۵ + ۵
	۳ + ۲ + ۲ + ۵ + ۱۰ − ۳ + ۵ ......

پس خارج قسمت یہ ہے $\frac{3}{\text{لا}} + \frac{2}{\text{لا}^{2}} + \frac{2}{\text{لا}^{3}} + \frac{5}{\text{لا}^{4}} + \frac{10}{\text{لا}^{5}} + \ldots\ldots$

لہٰذا ج = ۱۰

امثلہ نمبری ۳۵ (ج)

(۱) اگر فا(لا) = $\text{لا}^{4} + 10\,\text{لا}^{3} + 39\,\text{لا}^{2} + 76\,\text{لا} + 65$ تو فا(لا − ۴) کی قیمت معلوم کرو۔

(۲) اگر فا(لا) = $\text{لا}^{4} - 12\,\text{لا}^{3} + 17\,\text{لا}^{2} - 9\,\text{لا} + 7$ تو فا(لا + ۳) کی قیمت دریافت کرو۔

(۳) اگر فا(لا) = $2\,\text{لا}^{4} - 13\,\text{لا}^{2} + 10\,\text{لا} - 19$ تو فا(لا + ۱) کی قیمت معلوم کرو۔

(۴) اگر فا(لا) = $\text{لا}^{4} + 16\,\text{لا}^{3} + 72\,\text{لا}^{2} + 64\,\text{لا} - 129$ تو فا(لا − ۴) کی قیمت معلوم کرو۔

(۵) اگر فا(لا) = $\text{ا}\,\text{لا}^{3} + \text{ب}\,\text{لا}^{2} + \text{ج}\,\text{لا} + \text{د}$ تو فا(لا + ھ) − فا(لا − ھ) کی قیمت معلوم کرو۔

(۶) ثابت کرو کہ مساوات $10\,\text{لا}^{4} - 17\,\text{لا}^{2} + \text{لا} + 6 = 0$ کی ایک اصل صفر اور −۱ کے درمیان ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ مساوات $\text{لا}^{4} - 5\,\text{لا}^{3} + 3\,\text{لا}^{2} + 35\,\text{لا} - 70 = 0$ کی ایک اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور دوسری −۲ اور −۳ کے درمیان۔

۸ - ثابت کرو کہ مساوات لا^{۴} − ۱۲ لا^{۲} + ۱۲ لا − ۳ = ۰ کی ایک اصل −۳ اور −۴ کے درمیان ہے اور دوسری ۲ اور ۳ کے درمیان -

۹ - ثابت کرو کہ مساوات لا^{۴} + ۵ لا^{۳} − ۲۰ لا^{۲} − ۱۹ لا − ۴ = ۰ کی ایک اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور دوسری −۴ اور −۵ کے درمیان -

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں مساوی ہیں، ان کو حل کرو:

۱۰ - لا^{۴} − ۹ لا^{۲} + ۴ لا + ۱۲ = ۰   ۱۱ - لا^{۴} − ۶ لا^{۳} + ۱۲ لا^{۲} − ۱۰ لا + ۳ =

۱۲ - لا^{۵} − ۱۳ لا^{۴} + ۶۷ لا^{۳} − ۱۷۱ لا^{۲} + ۲۱۶ لا − ۱۰۸ = ۰

۱۳ - لا^{۵} − لا^{۳} + ۴ لا^{۲} − ۳ لا + ۲ = ۰

۱۴ - ۸ لا^{۴} + ۴ لا^{۳} − ۱۸ لا^{۲} + ۱۱ لا − ۲ = ۰

۱۵ - لا^{۶} − ۳ لا^{۵} + ۶ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۳ لا + ۲ = ۰

۱۶ - لا^{۶} − ۲ لا^{۵} − ۴ لا^{۴} + ۱۲ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۱۸ لا + ۱۸ = ۰

۱۷ - لا^{۴} − (ا + ب) لا^{۳} − ا (ا − ب) لا^{۲} + ا^{۲} (ا + ب) لا − ا^{۳} ب = ۰

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں مساوی ہیں، ان کو حل کرو

۱۸ - ۲ لا^{۴} − ۲ لا^{۳} + لا^{۲} + ۳ لا − ۶ = ۰، ۴ لا^{۴} − ۲ لا^{۳} + ۳ لا − ۹ = ۰

۱۹ - ۴ لا^{۴} + ۱۲ لا^{۳} − لا^{۲} − ۱۵ لا = ۰، ۶ لا^{۴} + ۱۳ لا^{۳} − ۴ لا^{۲} − ۱۵ لا = ۰

۲۰ - ایسے لئے شرط معلوم کرو کہ لا^{ن} − ف لا^{۲} + ر = ۰ کی اصلیں مساوی ہوں -

۲۱ - ثابت کرو کہ مساوات لا^{۴} + ق لا^{۲} + س = ۰ کی تین اصلیں مساوی نہیں ہوسکتیں -

۲۲ - بتاؤ کہ ب کو ا سے کیا نسبت ہو کہ مساواتوں

$$ا لا^۲ + ب لا + ا = ۰ \quad \text{اور} \quad لا^۳ - ۲ لا^۲ + ۲ لا - ۱ = ۰$$

کی (۱) ایک اصل (۲) دو اصلیں مساوی ہوں۔

(۲۳) ثابت کرو کہ مساوات

$$لا^ن + ن لا^{ن-۱} + ن (ن - ۱) لا^{ن-۲} + \ldots + \underline{ن} = ۰$$

کی اصلیں مساوی نہیں ہوسکتیں۔

(۲۴) اگر مساوات $لا^۵ - ۱۰ ا^۳ لا^۲ + ب^۴ لا + ج^۵ = ۰$ کی تین اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو $ا ب^۲ - ۹ ا^۵ + ج^۵ = ۰$۔

(۲۵) اگر مساوات $لا^۴ + ا لا^۳ + ب لا^۲ + ج لا + د = ۰$ کی تین اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے ہر ایک $\frac{۶ ج - ا ب}{۳ ا^۲ - ۸ ب}$ کے مساوی ہے۔

(۲۶) اگر $لا^۵ + ق لا^۳ + ر لا^۲ + ت = ۰$ کی دو اصلیں باہم مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ اُن میں سے ایک اصل ذیل کی مساوات درجہ دوم $۱۵ ر لا^۲ - ۶ ق^۲ لا + ۲۵ ت - ۴ ق ر = ۰$ کی ایک اصل کے مساوی ہوگی۔

(۲۷) مساوات $لا^۳ - لا - ۱ = ۰$ میں $ج_۶$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۲۸) مساوات $لا^۴ - لا^۳ - ۷ لا^۲ + لا + ۶ = ۰$ میں $ج_۴$ اور $ج_۶$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

مساواتوں کی تبدیل یا استحالہ

۴۶۵۔ بعض اوقات کسی مساوات کے متعلق بحث زیادہ آسان ہو جاتی ہے اگر اس مساوات کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کرلیا جائے جسکی اصلیں اوّل الذکر مساوات کی اصلوں کے ساتھ کوئی خاص ربط رکھتی ہوں، اس قسم کی تبدیلیاں بخصوص کبھی مساوات یعنی مساوات درجہ سوم کے حل میں زیادہ مفید ہوتی ہیں

۵۶۵ - ایک مساوات کو ایک اَور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جس کی اصلیں مفروضہ مساوات کی اصلوں کے مساوی اور مخالف العلامت ہوں -

فرض کرو کہ $\text{فا}(\text{لا}) = ۰$ مساواتِ مفروضہ ہے -

لا کی بجائے $-\text{ما}$ رکھو، تب مساوات $\text{فا}(-\text{ما}) = ۰$، مساوات $\text{فا}(\text{لا}) = ۰$ کی ہر اصل سے پُوری ہوتی ہے جبکہ اس اصل کی علامت کو بدل دیا جائے، پس مساوات مطلوبہ $\text{فا}(-\text{ما}) = ۰$ ہے۔

اگر مساوات مفروضہ

$$\text{ف}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ف}_۱\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ف}_۲\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ف}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ف}_{\text{ن}} = ۰$$

ہو تو ظاہر ہے کہ مساوات مطلوبہ حسب ذیل ہوگی جو اوپر کی مساوات میں دوسری رقم سے شروع ہوکر متبادل رقوم کی علامتیں بدلنے سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\text{ف}\,\text{ما}^{\text{ن}} - \text{ف}_۱\,\text{ما}^{\text{ن}-۱} + \text{ف}_۲\,\text{ما}^{\text{ن}-۲} - \ldots\ldots + (-۱)^{\text{ن}-۱}\,\text{ف}_{\text{ن}-۱}\,\text{ما} + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{ف}_{\text{ن}} = ۰$$

۵۶۶ - ایک مساوات کو ایک اَور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جس کی اصلیں اُن حاصل ضربوں کے مساوی ہوں جو ابتدائی مساوات کی اصلوں کو ایک خاص مقدار سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں -

فرض کرو کہ $\text{فا}(\text{لا}) = ۰$ مساواتِ مفروضہ ہے اور ق مذکورہ بالا مقدارِ خاص کو تعبیر کرتا ہے، $\text{ما} = \text{ق}\,\text{لا}$ رکھو، تب $\text{لا} = \frac{\text{ما}}{\text{ق}}$ تب مساوات مطلوبہ $\text{فا}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ق}}\right) = ۰$ ہے،

اس تبدیل کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اِس کی مدد سے کسی مساوات کو اس کے کسری سروں سے پاک کیا جا سکتا ہے -

مثال - مساوات $۲\,\text{لا}^۳ - \frac{۳}{۲}\,\text{لا}^۲ - \frac{۱}{۸}\,\text{لا} + \frac{۳}{۱۶} = ۰$ میں سے اِس کے کسری سر خارج کرو -

مثال ۲ ـ اگر مساوات $لا^{۳} - ۲لا^{۲} - ۳لا - ۱ = ۰$ کی اصلیں ا، ب، ج ہوں تو $ا^{-۳} + ب^{-۳} + ج^{-۳}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

لا کی بجائے ۱/لا رکھنے سے تبدیل شدہ مساوات

لہذا [illegible] = [illegible]۴۲

۵۶۸ ـ اگر ایک مساوات ایسی ہو کہ اس میں لا کی بجائے $\frac{۱}{لا}$ رکھنے سے مساوات میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو تو اس مساوات کو مساواتِ متکافی کہتے ہیں۔

اگر مساواتِ مفروضہ

$$لا^{ن} + ف_{۱} لا^{ن-۱} + ف_{۲} لا^{ن-۲} + ... + ف_{ن-۲} لا^{۲} + ف_{ن-۱} لا + ف_{ن} = ۰$$

ہو تو اس میں لا کی بجائے $\frac{۱}{لا}$ رکھنے سے یہ مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$ف_{ن} لا^{ن} + ف_{ن-۱} لا^{ن-۱} + ف_{ن-۲} لا^{ن-۲} + ... + ف_{۲} لا^{۲} + ف_{۱} لا + ۱ = ۰$$

اگر یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہوں تو ظاہر ہے کہ

$$ف_{۱} = \frac{ف_{ن-۱}}{ف_{ن}} ، ف_{۲} = \frac{ف_{ن-۲}}{ف_{ن}} ، ..... ف_{ن-۲} = \frac{ف_{۲}}{ف_{ن}}$$

$$ف_{ن-۱} = \frac{ف_{۱}}{ف_{ن}} ، ف_{ن} = \frac{۱}{ف_{ن}}$$

سب سے آخری نتیجہ کی رُو سے ف ن = ± ۱ ، اس طرح سے ہیں دو قسم کی منکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ۔

(۱) ف ن = ۱ تو

ف = ف ن-۱ ، ف۲ = ف ن-۲ ، ف۳ = ف ن-۳ ، ....

یعنی شروع اور آخر کی طرف سے متساوی الفصل رقموں کے سر مساوی ہوتے ہیں ۔

(۲) اگر ف ن = -۱ تو

ف۱ = -ف ن-۱ ، ف۲ = -ف ن-۲ ، ف۳ = -ف ن-۳ ، .....

پس اگر مساوات ۲م ابعاد کی ہو تو ف م = -ف م یا ف م = ۰

اس صورت میں اول اور آخر سے متساوی الفصل رقمیں بلحاظ مقدار مساوی اور بلحاظ علامت مختلف ہوتی ہیں اور اگر مساوات جفت درجہ کی ہو تو وسطی رقم غائب ہوتی ہے ۔

۵۶۹ ۔ فرض کرو کہ فا (لا) = ۰ منکافی مساوات ہے ۔

اگر فا (لا) = ۰ قسم اول کی ہو اور طاق درجہ کی ہو تو اس کی ایک اصل -۱ ہوگی یعنی فا (لا) ، لا + ۱ پر تقسیم ہو جائے گا ۔ تقسیم کرنے سے اگر خارج قسمت فہ (لا) ہو تو فہ (لا) = ۰ قسم اول اور درجہ جُفت کی منکافی مساوات ہے ۔

اگر فا (لا) = ۰ قسم دوم کی مساوات ہو اور اس کا درجہ طاق ہو تو اس کی ایک اصل + ۱ ہوگی ، اس صورت میں فا (لا) ، لا - ۱ پر پورا تقسیم ہو جائے گا ۔ اور حسب سابق فہ (لا) ، قسم اول اور درجہ جُفت کی ایک منکافی مساوات ہوگی ۔

اگر فا (لا) = ۰ قسم دوم اور درجہ جُفت کی کوئی مساوات منکافی ہو تو اس کی ایک اصل +۱ اور دوسری اصل -۱ ہوگی ، اس صورت میں فا (لا) ، لا۲ - ۱ پر تقسیم ہو جائے گا اور حسب سابق فہ (لا) = ۰ قسم اوّل اور درجہ جفت

ہر ایک مساوات متکافی ہے۔

لہٰذا ہر ایک مساوات متکافی، جفت درجہ کی ہوتی ہے اور اس کی آخری رقم مثبت ہوتی ہے اور یا یہ اس شکل میں لائی جا سکتی ہے پس اس شکل کو متکافی مساواتوں کی معیاری شکل سمجھنا چاہیئے۔

۵۷۰۔ معیاری شکل کی کوئی مساوات متکافی نصف ابعاد کی مساوات کی شکل میں تبدیل کی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

$$ا لا^{۲م} + ب لا^{۲م-۱} + ج لا^{۲م-۲} + \dots + ک لا^م + \dots + ج لا^۲ + ب لا + ا = ۰$$

ہے، $لا^م$ پر تقسیم کرنے اور رقموں کو ترتیب دینے سے

$$ا\left(لا^م + \frac{۱}{لا^م}\right) + ب\left(لا^{م-۱} + \frac{۱}{لا^{م-۱}}\right) + ج\left(لا^{م-۲} + \frac{۱}{لا^{م-۲}}\right) + \dots + ک = ۰$$

$$لا^{ن+۱} + \frac{۱}{لا^{ن+۱}} = \left(لا^ن + \frac{۱}{لا^ن}\right)\left(لا + \frac{۱}{لا}\right) - \left(لا^{ن-۱} + \frac{۱}{لا^{ن-۱}}\right)$$

پس $لا + \frac{۱}{لا}$ کی بجائے ی لکھنے اور ن کو بالتواتر ۱، ۲، ۳، ... قیمتیں دینے سے

$$لا^۲ + \frac{۱}{لا^۲} = ی^۲ - ۲$$

$$لا^۳ + \frac{۱}{لا^۳} = ی(ی^۲ - ۲) - ی = ی^۳ - ۳ی$$

$$لا^۴ + \frac{۱}{لا^۴} = ی(ی^۳ - ۳ی) - (ی^۲ - ۲) = ی^۴ - ۴ی^۲ + ۲$$

اور علیٰ ہذا القیاس، اور بالعموم $لا^م + \frac{۱}{لا^م}$، ی میں م ابعاد کا جملہ ہے۔

پس مساوات ی میں م ابعاد کی ہے۔

۵۷۱۔ ایک ایسی مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں ایک مفروضہ مساوات کی اصلوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔

فرض کرو کہ $\text{فا}(\text{لا}) = 0$ مساوات مفروضہ ہے، $\text{ما} = \text{لا}^{2}$ یعنی $\text{لا} = \sqrt{\text{ما}}$ رکھو۔ پس مساوات مطلوبہ $\text{فا}(\sqrt{\text{ما}}) = 0$ حاصل ہوتی ہے

مثال - ایک مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$\text{لا}^{3} + \text{ف}_{1}\,\text{لا}^{2} + \text{ف}_{2}\,\text{لا} + \text{ف}_{3} = 0$$

کی اصلوں کے مربعوں کے برابر ہوں۔

$\text{لا} = \sqrt{\text{ما}}$ رکھنے اور تبادلہ رقوم کرنے سے

$$(\text{ما} + \text{ف}_{2})\sqrt{\text{ما}} = -(\text{ف}_{1}\,\text{ما} + \text{ف}_{3})$$

جس سے $(\text{ما}^{2} + 2\,\text{ف}_{2}\,\text{ما} + \text{ف}_{2}^{2})\,\text{ما} = \text{ف}_{1}^{2}\,\text{ما}^{2} + 2\,\text{ف}_{1}\text{ف}_{3}\,\text{ما} + \text{ف}_{3}^{2}$

یعنی $\text{ما}^{3} + (2\,\text{ف}_{2} - \text{ف}_{1}^{2})\,\text{ما}^{2} + (\text{ف}_{2}^{2} - 2\,\text{ف}_{1}\text{ف}_{3})\,\text{ما} - \text{ف}_{3}^{2} = 0$

مثال ۲ دفعہ ۵۳۹ کے حل سے مقابلہ کرو۔

۵۷۲ - ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں مفروضہ مساوات کی اصلوں سے بقدر ایک خاص مقدار کے بڑی ہوں۔

فرض کرو کہ $\text{فا}(\text{لا}) = 0$ مساوات مفروضہ ہے اور ھ مقدار معلومہ ہے $\text{ما} = \text{لا} + \text{ھ}$ یعنی $\text{لا} = \text{ما} - \text{ھ}$ رکھنے سے مساوات مطلوبہ $\text{فا}(\text{ما} - \text{ھ}) = 0$ ہو جاتی ہے۔

اسی طرح سے $\text{فا}(\text{ما} + \text{ھ}) = 0$ ایک ایسی مساوات ہے جسکی اصلیں مساوات $\text{فا}(\text{لا}) = 0$ کی اصلوں سے بقدر ھ کے چھوٹی ہیں۔

مثال - ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$3\,\text{لا}^{4} - 32\,\text{لا}^{3} + 83\,\text{لا}^{2} + 76\,\text{لا} + 21 = 0$$

کی اصلوں سے بقدر ۲ کے بڑی ہوں۔

مطلوبہ مساوات مساوات بالا میں لا کی بجائے لا - ۲ درج کرنے سے حاصل ہوگی پس ہارنر کے قاعدہ میں ہم لا + ۲ کو بطور مقسوم علیہ استعمال کرتے ہیں اور حسب ذیل

طریق سے حساب لگاتے ہیں

۴	۳۲	۸۳	۷۶	۲۱
۴	۲۴	۳۵	۶	۹
۴	۱۶	۳	۰	
۴	۸	۱۳-		
۴	۰			
۴				

پس تبدیل شدہ مساوات ۴ لا^۴ - ۱۳ لا^۲ + ۹ = ۰ یا (۴ لا^۲ - ۹)(لا^۲ - ۱) = ہے

اِس مساوات کی اصلیں $+\frac{۳}{۲}$، $-\frac{۳}{۲}$، ۱+، ۱- ہیں، پس مساوات

مفروضہ کی اصلیں $-\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۷}{۲}$، ۱-، ۳- ہیں۔

۵۷۳۔ دفعۂ ماقبل کی تبدیلی کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے ایک مساوات کی کوئی خاص رقم معدوم کی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات مفروضہ

$$ف لا^{ن} + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + \ldots + ف_{ن-۱} لا + ف_ن = ۰ \text{ ہے}$$

تب اگر ما = لا - ھ، ہیں نئی مساوات

$$ف(ما + ھ)^{ن} + ف_۱(ما + ھ)^{ن-۱} + ف_۲(ما+ھ)^{ن-۲} + \ldots + ف_ن = ۰$$

حاصل ہوئی ہے اگر اس کی رقوم کو ما کی نزولی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جائے تو یہ مساوات ہو جاتی ہے:

$$ف ما^{ن} + (ن ف ھ + ف_۱) ما^{ن-۱} + \left\{ \frac{ن(ن-۱)}{\underline{۲}} ف ھ^۲ + (ن-۱) ف_۱ ھ \right.$$

$$\left. + ف_۲ \right\} ما^{ن-۲} + \ldots\ldots\ldots = ۰$$

اگر ہم دوسری رقم کو نکالنا چاہیں تو ن ف ب ھ + ف ا = ۰ یعنی ھ = - ف ا / ن ف ب

اگر تیسری رقم کو معدوم کرنا مقصود ہو تو

$$\frac{ن(ن-۱)}{۲} ف ب ھ^۲ + (ن-۱) ف ا ھ + ف ۲ = ۰$$

جو ھ میں درجہ دوم کی ایک مساوات ہے، اسی طرح سے ہم کسی اور رقم کو نکال سکتے ہیں۔

بعض اوقات حسب مشق ذیل عمل کرنا زیادہ مفید ہوتا ہے۔

مثال۔ مساوات ف لا^۳ + ق لا^۲ + ر لا + س = ۰ میں سے دوسری رقم نکال دو

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں ع، ب، ج ہیں

یعنی ع + ب + ج = - ق / ف

تب اگر ہم ہر ایک اصل کو بقدر ق / ۳ف کے بڑھا دیں تو تبدیل شدہ مساوات میں اصلوں کا حاصل جمع - ق / ف + ق / ف کے مساوی ہوگا یعنی دوسری رقم کا سر صفر ہوگا۔

پس مساوات مفروضہ میں لا کی بجائے لا - ق / ۳ف رکھنے سے مطلوبہ تبدیلی حاصل ہوتی ہے۔

۴۵۷۔ مساوات فا (لا) = ۰ سے ہم ایک ایسی مساوات بنا سکتے ہیں جس کی اصلیں مساوات مفروضہ کی اصلوں کے ساتھ کسی خاص ربط کے ذریعہ مربوط ہوں فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ کی ایک اصل ما ہے، نیز فرض کرو کہ ربط فہ (لا، ما) = ربط مذکور کو تعبیر کرتا ہے۔ تب تبدیل شدہ مساوات یا اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ مساوات فہ (لا، ما) = ۰ کے ذریعہ لا کو ما کے

تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے اور پھر لا کی اس قیمت کو جو ما کی رقوم میں حاصل کی گئی ہے مساوات فا (لا) = ۰ میں درج کیا جائے یا مطلوبہ مساوات اس طرح حاصل ہوگی کہ ہم لا کو مساواتوں فا (لا) = ۰ اور فہ (لا، ما) = ۰ سے ساقط کرکے ما کی رقوم میں رشتہ حاصل کریں۔

مثال ۱۔ اگر مساوات لا۳ + ف لا۲ + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں ا، ب، ج ہوں تو ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں

$$ا - \frac{۱}{ب ج}، \quad ب - \frac{۱}{ج ا}، \quad ج - \frac{۱}{ا ب}$$

ہوں۔

جب مساوات مفروضہ میں لا = ا تو تبدیل شدہ مطلوبہ مساوات میں ما = $ا - \frac{۱}{ب ج}$

$$\text{لیکن } ا - \frac{۱}{ب ج} = ا - \frac{ا}{ا ب ج} = ا + \frac{ا}{ر}$$

اس لئے تبدیل شدہ مساوات

$$ما = لا + \frac{لا}{ر} \quad \text{یعنی} \quad لا = \frac{ر ما}{۱ + ر}$$

کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

پس مطلوبہ مساوات یہ

$$ر ما^۳ + ف ر (۱ + ر) ما^۲ + ق (۱ + ر)^۲ ما + (۱ + ر)^۳ = ۰ \quad \text{ہے}$$

مثال ۲۔ ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات درجہ سوم

$$لا^۳ + ق لا + ر = ۰$$

کی اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔

فرض کرو کہ مساوات درجہ سوم کی اصلیں ا، ب، ج ہیں، تب مطلوبہ مساوات کی اصلیں $(ب - ج)^۲$، $(ج - ا)^۲$، $(ا - ب)^۲$

ہونگی۔

اب $(ب - ج)^۲ = ب^۲ + ج^۲ - ۲ب ج = ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ - ا^۲ - \frac{۲ ا ب ج}{ا}$

$= (ا + ب + ج)^۲ - ۲ (ب ج + ج ا + ا ب) - ا^۲ - \frac{۲ ا ب ج}{ا}$

$= - ۲ ق - ا^۲ + \frac{۲ ر}{ا}$

نیز جب مساوات مفروضہ میں لا = ا تو تبدیل شدہ مساوات میں $ما = (ب - ج)^۲$

$$\therefore ما = - ۲ ق - لا^۲ + \frac{۲ ر}{لا}$$

لہٰذا ہمیں مساواتوں

$$لا^۳ + ق لا + ر = ۰$$

اور $$لا^۳ + (۲ ق + ما) لا - ۲ ر = ۰$$

سے لا کو ساقط کرنا چاہیئے۔

تفریق کرنے سے $(ق + ما) لا = ۳ ر$ یا $لا = \frac{۳ ر}{ق + ما}$

یہ قیمت درج کرکے اختصار کرلے سے

$$ما^۳ + ۶ ق ما^۲ + ۹ ق^۲ ما + ۲۷ ر^۲ + ۴ ق^۳ = ۰$$

نتیجہ صریح۔ اگر ا، ب، ج سب حقیقی ہوں تو $(ب - ج)^۲$، $(ج - ا)^۲$، $(ا - ب)^۲$ سب مثبت ہونگے، اس لئے $۲۷ ر^۲ + ۴ ق^۳$ منفی ہوگا۔

پس اگر مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو $۲۷ ر^۲ + ۴ ق^۳$ منفی ہوگا یعنی $(\frac{ر}{۲})^۲ + (\frac{ق}{۳})^۳$ منفی ہوگا۔

اگر $۲۷ ر^۲ + ۴ ق^۳ = ۰$ تو تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل صفر ہوگی اس لئے

ابتدائی مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی۔

اگر ۲۷ ر^{۲} + ۴ ق^{۳} مثبت ہو تو تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل منفی ہوگی (دیکھو دفعہ ۵۵۳) اس لئے ابتدائی مساوات کی دو اصلیں خیالی ہونگی کیونکہ خیالی اصلوں کا زوج ہی تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل کو منفی کرسکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۵ (د)

(۱) مساوات لا^{۳} − ۴ لا^{۲} + $\frac{۱}{۴}$ لا − $\frac{۱}{۹}$ = ۰ کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکے سر صحیح عدد ہوں اور پہلی رقم کا سر ایک ہو۔

(۲) مساوات ۳ لا^{۴} − ۵ لا^{۳} + لا^{۲} − لا + ۱ = ۰ کو ایک اور مساوات میں تبدیل کرو جسکی پہلی رقم کا سر ایک ہو۔

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۳) ۲ لا^{۴} + لا^{۳} − ۶ لا^{۲} + لا + ۲ = ۰

(۴) لا^{۴} − ۱۰ لا^{۳} + ۲۶ لا^{۲} − ۱۰ لا + ۱ = ۰

(۵) لا^{۵} − ۵ لا^{۴} + ۹ لا^{۳} − ۹ لا^{۲} + ۵ لا − ۱ = ۰

(۶) ۴ لا^{۶} − ۲۴ لا^{۵} + ۵۷ لا^{۴} − ۷۳ لا^{۳} + ۵۷ لا^{۲} − ۲۴ لا + ۴ = ۰

(۷) اگر مساوات ۳ لا^{۳} − ۲۲ لا^{۲} + ۴۸ لا − ۳۲ = ۰ کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو اس کو حل کرو۔

(۸) مساوات لا^{۳} − ۱۱ لا^{۲} + ۳۶ لا − ۳۶ = ۰ کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہیں ان اصلوں کو دریافت کرو۔

(۹) اگر مساوات لا^{۳} − ا لا^{۲} + لا − ب = ۰ کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ وسطی اصل ۳ ب کے مساوی ہے۔

(۱۰) مساوات ۴۰ لا^{۴} − ۲۲ لا^{۳} − ۲۱ لا^{۲} + ۲ لا + ۱ = ۰ کو حل کرو جبکہ اس کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں۔

ذیل کی مساواتوں میں سے دوسری رقم خارج کرو۔

(۱۱) $لا^۳ - ۶لا^۲ + ۱۰لا - ۳ = ۰$

(۱۲) $لا^۴ + ۴لا^۳ + ۲لا^۲ - ۴لا - ۲ = ۰$

(۱۳) $لا^۶ + ۵لا^۵ + ۳لا^۴ + لا^۲ + لا - ۱ = ۰$

(۱۴) $لا^۶ - ۱۲لا^۵ + ۳لا^۲ - ۱۷لا + ۳۰۰ = ۰$

(۱۵) مساوات $لا^۳ - \frac{لا}{۴} - \frac{۳}{۴} = ۰$ کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں مساوات مفروضہ کی اصلوں سے بقدر $\frac{۳}{۴}$ کے بڑی ہوں۔

(۱۶) مساوات $لا^۵ - ۴لا^۴ + ۳لا^۲ - ۴لا + ۶ = ۰$ کی اصلوں کو بقدر ۴ کے کم کرو۔

(۱۷) ایک مساوات بناؤ جسکی ہر ایک اصل مساوات $لا^۳ - ۵لا^۲ + ۶لا - ۳ = ۰$ کی ایک اصل سے بقدر ۱ کے بڑی ہو۔

(۱۸) ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$لا^۴ + لا^۳ + ۲لا^۲ + لا + ۱ = ۰$$

کی اصلوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔

(۱۹) ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات $لا^۳ + ۳لا^۲ + ۲ = ۰$ کی اصلوں کے مکعبوں کے مساوی ہوں۔

اگر ا، ب، ج مساوات $لا^۳ + ق لا + ر = ۰$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ ہوں:۔

(۲۰) $ک ا^{-۱}$، $ک ب^{-۱}$، $ک ج^{-۱}$ (۲۱) $ب^۲ج^۲$، $ج^۲ا^۲$، $ا^۲ب^۲$

(۲۲) $\frac{ب + ج}{ا^۲}$، $\frac{ج + ا}{ب^۲}$، $\frac{ا + ب}{ج^۲}$

(۲۳) (ب ج + $\frac{1}{ا}$)، (ج ا + $\frac{1}{ب}$)، (ا ب + $\frac{1}{ج}$)

(۲۴) ا (ب + ج)، ب (ج + ا)، ج (ا + ب) ؛ (۲۵) ا^۲ ب^۲ ج^۲

(۲۶) ($\frac{ب}{ج}$ + $\frac{ج}{ب}$)، ($\frac{ج}{ا}$ + $\frac{ا}{ج}$)، ($\frac{ا}{ب}$ + $\frac{ب}{ا}$)

(۲۷) ثابت کرو کہ مساوات لا^۶ + ا^۳ لا^۴ + ب^۳ لا^۲ + ا^۳ ب^۳ = ۰ کی اصلیں مساوات لا^۳ + ا لا^۲ + ب لا + ا ب = ۰ کی اصلوں کے کعبوں سے مساوی ہیں۔

(۲۸) مساوات لا^۵ - ۵ لا^۴ - ۵ لا^۳ + ۲۵ لا^۲ + ۴ لا - ۲۰ = ۰ کی اصلیں ا، - ا، ب، - ب، ج کی شکل کی ہیں، مساوات کو حل کرو۔

(۲۹) اگر لا^۳ - ۳ ف لا^۲ + ۳ ق لا + ر = ۰ کی اصلیں سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ ۲ ق^۳ = ر (۳ ف ق - ر)۔

کعبی مساواتیں

۵۷۵۔ کعبی مساوات یا مساوات درجہ سوم کی عام سے عام شکل

لا^۳ + ف لا^۲ + ق لا + ر = ۰

ہے، لیکن جیسا کہ دفعہ ۳۷۵ میں مذکور ہو چکا ہے اس مساوات کو نسبتاً سادہ شکل لا^۳ + ق لا + ر = ۰ میں مختصر کیا جا سکتا ہے۔ پس ہم مساوات درجہ سوم کی معیاری شکل کے لئے یہی مساوات لیں گے۔

۵۷۶۔ مساوات لا^۳ + ق لا + ر = ۰ کو حل کرو

فرض کرو کہ لا = ما + ی، تب

لا^۳ = ما^۳ + ی^۳ + ۳ ما ی (ما + ی) = ما^۳ + ی^۳ + ۳ ما ی لا

اور مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

$$\text{ا}^3 + \text{ی}^3 + (3\,\text{ا}\,\text{ی} + \text{ق})\,\text{لا} + \text{ر} = 0$$

اب تک ا اور ی کوئی دو مقادیر ہیں جن پر صرف یہ شرط عائد کی گئی ہے کہ اُن کا حاصل جمع مساوات مفروضہ کی اصلوں میں سے ایک کے مساوی ہے اگر مزید برآں ہم یہ فرض کریں کہ یہ مساوات ۳ ا ی + ق = ۰ کو پورا کرتی ہیں تو ان کی قیمت مکمل طور پر معلوم ہو سکتی ہے، اِس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ا}^3 + \text{ی}^3 = -\text{ر} ،\quad \text{ا}^3\,\text{ی}^3 = -\frac{\text{ق}^3}{27}$$

اِسلئے ا^3 اور ی^3، مساوات درجہ دوم

$$\text{ت}^2 + \text{ر}\,\text{ت} - \frac{\text{ق}^3}{27} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ اِس مساوات کو حل کرنے اور

$$\text{ا}^3 = -\frac{\text{ر}}{2} + \sqrt{\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{ی}^3 = -\frac{\text{ر}}{2} - \sqrt{\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}} \quad \ldots\ldots (2)$$

رکھنے سے ہمیں لا کی قیمت ربط لا = ا + ی سے حاصل ہوتی ہے،

$$\text{پس لا} = \left\{-\frac{\text{ر}}{2} + \sqrt{\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{-\frac{\text{ر}}{2} - \sqrt{\frac{\text{ر}^2}{4} + \frac{\text{ق}^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

اُوپر کا حل عام طور پر کارڈن کا حل کہلاتا ہے کیونکہ اُس نے اول مرتبہ اِس حل کو ۱۵۴۵ء میں آرس میگنا میں شائع کیا تھا۔ کارڈن نے یہ حل ٹارٹگلیا[1] سے حاصل کیا تھا لیکن قرائن سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات درجہ سوم کا حل پہلے پہل سی پیو فیرئیو نے تقریباً ۱۵۰۵ء میں

Tartaglia Ars Magna (Soipio Ferreo) ؎

دریافت کیا تھا۔ اِس مضمون پر نہایت دلچسپ اور تاریخی بحث برن سائیڈ اور پین ٹن کی کتاب نظریۂ معاولات کے آخر میں درج ہے۔

۵۵۰۔ دفعۂ ماقبل کی مساواتوں (۱) اور (۲) میں بائیں جانب جو مقادیر ہیں اُن میں سے ہر ایک مقدار کے حسب دفعہ ۱۱۰ تین جذر الکعب ہیں، پس بظاہر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ لا کی ۹ قیمتیں ہیں مگر درحقیقت ایسا نہیں ہے چونکہ ما ی $= -\frac{ق}{۳}$ اِسلئے جذر الکعبوں کے وہ زوج لینے چاہئیں جن میں سے ہر ایک کا حاصل ضرب ناطق ہو۔ لہٰذا اگر جذر الکعبوں کے کسی ایک زوج کی قیمتوں کو جو اس شرط کو پورا کرے ما، ی سے تعبیر کیا جائے تو اس شرط کو پورا کرنے والے باقی جوڑے سہ ما، سہ^{۲} ی اور سہ^{۲} ما، سہ ی ہونگے جہاں سہ اور سہ^{۲} ایک کے جذر الکعب ہیں، اسلئے مساوات کی اصلیں ما + ی، سہ ما + سہ^{۲} ی، سہ^{۲} ما + سہ ی ہیں۔

مثال۔ مساوات لا^{۳} − ۱۵ لا = ۱۲۶

ما + ی = لا رکھو، تب

ما^{۳} + ی^{۳} + (۳ ما ی − ۱۵) لا = ۱۲۶

۳ ما ی − ۱۵ = ۰ رکھو

تب ما^{۳} + ی^{۳} = ۱۲۶، نیز ما^{۳} ی^{۳} = ۱۲۵

اسلئے ما^{۳}، ی^{۳} مساواتِ ذیل کی اصلیں ہیں۔

ت^{۲} − ۱۲۶ ت + ۱۲۵ = ۰

∴ ما^{۳} = ۱۲۵ ، ی^{۳} = ۱

∴ ما = ۵ ، ی = ۱

پس ما + ی = ۵ + ۱ = ۶

سہ ما + سہ^{۲} ی = $۵ \times \frac{-۱ + \sqrt{-۳}}{۲} + \frac{-۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$

$= -۳ + ۲\sqrt{-۳}$

سہ² ما + سہ ی = -۳ - ۲ √-۳

اور اصلیں ۶، -۳ + ۲ √-۳ ، -۳ - ۲ √-۳ ہیں۔

۵۷۸۔ اب ہم اس امر کی تشریح کر دینا چاہتے ہیں کہ دفعہ ۵۷۶ میں لا کی ۹ قیمتیں کیوں حاصل ہوتی ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ما اور ی مساواتوں

ما³ + ی³ + ر = ۰ ، ما ی = - ق/۳ سے حاصل ہوتے ہیں، لیکن

دوران حل میں دوسری مساوات کو بدل کر ما³ ی³ = - ق³/۲۷ بنا دیا جاتا ہے

اور ظاہر ہے کہ موخر الذکر مساوات میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہوگی اگر ما ی = - سہ ق/۳

یا - سہ² ق/۳ ۔ پس لا کی باقی چھ قیمتیں معادلات درجہ سوم

لا³ + سہ ق لا + ر = ۰

اور لا³ + سہ² ق لا + ر = ۰

کے حل ہیں۔

۵۷۹۔ اب ہم مساوات لا³ + ق لا + ر = ۰ کی اصلوں پر زیادہ تفصیل کے ساتھ بحث کرتے ہیں۔

(۱) اگر ر²/۴ + ق³/۲۷ مثبت ہو تو ما³ اور ی³ دونوں حقیقی ہیں، فرض کرو کہ ما اور ی بالترتیب ما³ اور ی³ کے حسابی جذر المکعبوں کو تعبیر کرتے ہیں، تب مساوات مذکور کی اصلیں

ما + ی ، سہ ما + سہ² ی ، سہ² ما + سہ ی

ہیں۔ ان اصلوں میں سے پہلی اصل حقیقی ہے اور سہ اور سہ² کی قیمتیں درج کرنے سے باقی اصلیں

- (ما + ی)/۲ + (ما - ی)/۲ √-۳ ، - (ما + ی)/۲ - (ما - ی)/۲ √-۳ حاصل ہوتی ہیں۔

(۲) اگر ر²/۴ + ق³/۲۷ صفر ہو تو ما³ = ی² ، اس صورت میں ما = ی اور اصلیں
۲ ما ، ما (سہ + سہ²)، ما (سہ + سہ²) ہو جاتی ہیں یعنی ۲ ما، - ما، - ما ہیں۔

(۳) اگر ر²/۴ + ق³/۲۷ منفی ہوں تو ما³ اور ی³ ، ا + خ ب اور ا - خ ب
کی شکل کے دو خیالی جملے ہیں، فرض کرو کہ ان مقادیر کے جذر الکعب م + خ ن
اور م - خ ن ہیں، تب مساوات زیر بحث کی اصلیں یہ ہو جاتی ہیں -

م + خ ن + م - خ ن　　　یا ۲ م

(م + خ ن) سہ + (م - خ ن) سہ²　　　یا - م - ن √۳

(م + خ ن) سہ² + (م - خ ن) سہ　　　یا - م + ن √۳

اور یہ سب حقیقی مقداریں ہیں۔ لیکن چونکہ خیالی مقادیر کے جذر الکعب نکالنے کا کوئی عام جبریہ یا حسابی قاعدہ نہیں ہے (دیکھو دفعہ ۸۹) اسلئے دفعہ ۵۷۶ کا حل اس صورت میں جبکہ مساوات کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں کسی عملی فائدہ پر مشتمل نہیں ہوتا۔

اس حل کو بعض اوقات کارڈن کے حل کی ناقابل تحویل صورت کہتے ہیں۔

۵۸۰ - اس ناقابل تحویل صورت میں جسکا ابھی ذکر ہوا مساوات کے حل کی تکمیل بذریعہ علم مثلث حسب ذیل ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ حل

لا = (ا + خ ب)^{۱/۳} + (ا - خ ب)^{۱/۳}

ہے، ا = ر جم طہ ، ب = ر جب طہ رکھو یعنی ر² = ا² + ب² اور مس طہ = ب/ا

تب (ا + خ ب)^{۱/۳} = {ر (جم طہ + خ جب طہ)}^{۱/۳}

اب ڈی مائیرے[ف] کے مسئلہ کی رو سے اس جملہ کی تین قیمتیں یہ ہیں :-

ف (De Moivre)

$$ر^{\frac{1}{3}}\left(جم\frac{طہ}{3}+خ\ جب\frac{طہ}{3}\right)،\quad ر^{\frac{1}{3}}\left(جم\frac{طہ+2\pi}{3}+خ\ جب\frac{طہ+2\pi}{3}\right)$$

اور
$$ر^{\frac{1}{3}}\left(جم\frac{طہ+4\pi}{3}+خ\ جب\frac{طہ+4\pi}{3}\right)$$

جہاں $ر^{\frac{1}{3}}$، ر کے حسابی جذر الکعب کو تعبیر کرتا ہے اور طہ وہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ ہے جو مساوات مس طہ = $\frac{ب}{ا}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

$(ا - خ\ ب)^{\frac{1}{3}}$ کی تین قیمتیں نتائج بالا میں خ کی علامت کو بدلنے سے حاصل ہوتی ہیں، پس مطلوبہ اصلیں یہ ہیں:-

$$2ر^{\frac{1}{3}}\ جم\frac{طہ}{3}،\quad 2ر^{\frac{1}{3}}\ جم\frac{طہ+2\pi}{3}،\quad 2ر^{\frac{1}{3}}\ جم\frac{طہ+4\pi}{3}$$

مساوات درجہ چہارم

۵۸۱ - اب ہم مجمل طور پر بعض ایسے طریقوں پر بحث کرتے ہیں جو مساوات درجہ چہارم کا عام حل حاصل کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ ان طریقوں میں سے ہر ایک میں پہلے ہمیں ایک معاون مساوات درجہ سوم کو حل کرنا پڑتا ہے، پس ظاہر ہے کہ مساوات درجہ سوم کی مانند مساوات درجہ چہارم کا عام حل بھی کسی مفروضہ عددی مساوات کا حل فوراً لکھ لینے کے لئے موزوں نہیں۔

۵۸۲ - مساوات درجہ چہارم کا حل پہلے پہل کارڈن کے ایک شاگرد فیرارای[1] نے بطریق ذیل حاصل کیا تھا:-

مساوات درجہ چہارم کو $لا^4 + 2ف\,لا^3 + ق\,لا^2 + 2ر\,لا + س = 0$ سے تعبیر کرو۔

مساوات کے دونوں جانب $(ا\,لا + ب)^2$ جمع کردو جہاں مقادیر ا اور ب کو اس طرح منتخب کیا گیا ہے کہ مساوات بالا کی دائیں جانب کا رکن پورا

[1] Ferrari

مربع بن جاتا ہے۔ تب

لا^{۴} + ۲ف لا^{۳} + (ق + ا^{۲}) لا^{۲} + ۲(ر + اب) لا + س + ب^{۲} = (الا + ب)^{۲}

فرض کرو کہ مساوات کی دائیں جانب کا رکن (لا^{۲} + ف لا + ک)^{۲} کے مساوی ہے، تب سروں کا مقابلہ کرنے سے

ف^{۲} + ۲ک = ق + ا^{۲}، ف ک = ر + اب

ک^{۲} = س + ب^{۲}

ان مساواتوں میں سے ا اور ب کو ساقط کرنے سے

(ف ک − ر)^{۲} = (۲ک + ف^{۲} − ق)(ک^{۲} − س)

یا ۲ک^{۳} − ق ک^{۲} + ۲(ف ر − س) ک − ف^{۲} س + ق س − ر^{۲} = ۰

اس مساوات درجہ سوم سے ک کی ایک حقیقی قیمت ضرور نکل سکتی ہے [دیکھو دفعہ ۳۵۵]، اس طرح سے ا اور ب معلوم ہو جاتے ہیں۔ نیز

(لا^{۲} + ف لا + ک)^{۲} = (الا + ب)^{۲}

∴ لا^{۲} + ف لا + ک = ± (الا + ب)

اور لا کی قیمتیں درجہ دوم کی دو مساواتوں

لا^{۲} + (ف − ا) لا + (ک − ب) = ۰

لا^{۲} + (ف + ا) لا + (ک + ب) = ۰

مثال۔ مساوات لا^{۴} − ۲لا^{۳} − ۵لا^{۲} + ۱۰لا − ۳ = ۰

کو حل کرو۔

مساوات کے دونوں طرف ا^{۲}لا^{۲} + ۲اب لا + ب^{۲} جمع کرو اور فرض کرو کہ

$$لا^{۴} - ۲لا^{۳} + (ا^{۲} - ۵)لا^{۲} + ۲(اب + ۵)لا + ب^{۲} - ۳ = (لا^{۲} - لا + ک)^{۲}$$

تب سروں کو مساوی کرنے سے

$$ا^{۲} = ۲ک + ۶ \text{ ، } اب = -ک - ۵ \text{ ، } ب^{۲} = ک^{۲} + ۳$$

$$\therefore \quad (۲ک + ۶)(ک^{۲} + ۳) = (ک + ۵)^{۲}$$

$$\therefore \quad ۲ک^{۳} + ۵ک^{۲} - ۴ک - ۷ = ۰$$

آزمائش سے معلوم ہوتا ہے کہ $ک = -۱$، اس لئے $ا^{۲} = ۴$، $ب^{۲} = ۴$، $اب = -۴$

لیکن مفروضہ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$(لا^{۲} - لا + ک)^{۲} = (الا + ب)^{۲}$$

ک، ا اور ب کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں دو مساواتیں

$$لا^{۲} - لا - ۱ = \pm(۲لا - ۲)$$

حاصل ہوتی ہیں، یعنی $لا^{۲} - ۳لا + ۱ = ۰$ اور $لا^{۲} + لا - ۳ = ۰$

جن کی اصلیں $\frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ ، $\frac{-۱ \pm \sqrt{۱۳}}{۲}$ ہیں

۵۸۳ - ذیل کا حل ڈی کارٹیز نے ۱۶۳۷ء میں شائع کیا تھا - فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کا اختصار کرکے اس کو ذیل کی شکل

$$لا^{۴} + ق لا^{۲} + ر لا + س = ۰$$

میں لایا گیا ہے - اب فرض کرو کہ

$$لا^{۴} + ق لا^{۲} + ر لا + س = (لا^{۲} + ک لا + ل)(لا^{۲} - ک لا + م)$$

تب سروں کو مساوی کرنے سے

$$\text{ل} + \text{م} - \text{ک}^{۲} = \text{ق} \text{ ، } \text{ک}(\text{م} - \text{ل}) = \text{ر} \text{ ، } \text{ل}\,\text{م} = \text{س}$$

اِن مساواتوں میں سے پہلی دو سے حاصل ہوتا ہے

$$۲\text{م} = \text{ک}^{۲} + \text{ق} + \frac{\text{ر}}{\text{ک}} \text{ ، } ۲\text{ل} = \text{ک}^{۲} + \text{ق} - \frac{\text{ر}}{\text{ک}}$$

پس تیسری مساوات میں درج کرنے سے

$$(\text{ک}^{۳} + \text{ق}\,\text{ک} + \text{ر})(\text{ک}^{۳} + \text{ق}\,\text{ک} - \text{ر}) = ۴\,\text{س}\,\text{ک}^{۲}$$

$$\text{یا } \text{ک}^{۶} + ۲\,\text{ق}\,\text{ک}^{۴} + (\text{ق}^{۲} - ۴\,\text{س})\text{ک}^{۲} - \text{ر}^{۲} = ۰$$

یہ مساوات $\text{ک}^{۲}$ میں درجہ سوم کی مساوات ہے جسکی ایک اصل حقیقی اور مثبت ہے (دیکھو دفعہ ۳۵۵)، پس جب $\text{ک}^{۲}$ کی قیمت معلوم ہو تو اس سے ل اور م کی قیمتیں نکل سکتی ہیں اور مساوات درجہ چہارم کا حل درجہ دوم کی دو مساواتوں

$$\text{لا}^{۲} + \text{ک}\,\text{لا} + \text{ل} = ۰$$

$$\text{لا}^{۲} - \text{ک}\,\text{لا} + \text{م} = ۰$$

کو حل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال ۔ مساوات $\text{لا}^{۴} - ۲\text{لا}^{۲} + ۸\,\text{لا} - ۳ = ۰$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $\text{لا}^{۴} - ۲\,\text{لا}^{۲} + ۸\,\text{لا} - ۳ = (\text{لا}^{۲} + \text{ک}\,\text{لا} + \text{ل})(\text{لا}^{۲} - \text{ک}\,\text{لا} + \text{م})$

تب سروں کو مساوی کرنے سے

$$\text{ل} + \text{م} - \text{ک}^{۲} = -۲ \text{ ، } \text{ک}(\text{م} - \text{ل}) = ۸ \text{ ، } \text{ل}\,\text{م} = -۳$$

اِن سے حاصل ہوتا ہے $(\text{ک}^{۳} - ۲\text{ک} + ۸)(\text{ک}^{۳} - ۲\text{ک} - ۸) = -۱۲\,\text{ک}^{۲}$

$$\text{یا } \text{ک}^{۶} - ۴\text{ک}^{۴} + ۱۶\text{ک}^{۲} - ۶۴ = ۰$$

یہ مساوات صریحاً پوری ہوتی ہے۔ جبکہ ک^2 - ۴ = ۰ یعنی ک = ± ۲، ک کی صرف ایک قیمت پر غور کرنا کافی ہوگا، ک = ۲ رکھنے سے

م + ل = ۲ + ۲، م - ل = ۴ یعنی ل = -۱، م = ۳

پس لا^4 - ۲ لا^3 + ۸ لا - ۳ = (لا^2 + ۲ لا - ۱)(لا^2 - ۲ لا + ۳)

اس لئے لا^2 + ۲ لا - ۱ = ۰ اور لا^2 - ۲ لا + ۳ = ۰

پس اصلیں -۱ ± √۲ اور ۱ ± √-۲ ہیں

۵۸۴- چوتھے درجہ سے اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کا عام جبریہ حل اب تک دریافت نہیں ہوا اور **ایبل** کا یہ دعویٰ کہ ایسا حل معلوم کرنا ناممکن ہے ماہرانِ ریاضی کے نزدیک عام طور پر مقبول ہے، لیکن اگر کسی مساوات کے سر عددی ہوں تو تقریبی قیمت معلوم کرنے کے لئے **ھارنر** کا طریقہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اِس کی رُو سے کسی حقیقی اصل کی تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی ہے، اِس مضمون پر مفصل بحث مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں مل سکتی ہے

۵۸۵- اب ہم چند متفرق مساواتوں پر بحث کرکے اِس باب کو ختم کرنا چاہتے ہیں۔

مثال ۱- مساواتوں لا + ما + ی + ء = ۰

الا + ب ما + ج ی + د ء = ۰

ا^{2}لا + ب^{2}ما + ج^{2}ی + د^{2}ء = ۰

ا^{3}لا + ب^{3}ما + ج^{3}ی + د^{3}ء = ک

کو حل کرو۔

نیچے سے شروع ہوکر ان مساواتوں کو بالترتیب ۱، ف، ق، ر سے ضرب دو جہاں ف، ق، ر ایسی مقادیر ہیں جو تا حال نا معلوم ہیں۔ فرض کرو کہ یہ مقادیر ایسی ہیں کہ مساواتوں کے حاصل جمع میں ما، ی، ء کے سر معدوم ہو جاتے ہیں، تب

$$لا(ا^3 + ف ا^2 + ق ا + ر) = ک$$

اور ب ، ج ، د مساوات

$$ت^3 + ف ت^2 + ق ت + ر = ٠$$

کی اصلیں ہیں۔

لہذا $$ا^3 + ف ا^2 + ق ا + ر = (ا - ب)(ا - ج)(ا - د)$$

پس $$(ا - ب)(ا - ج)(ا - د) لا = ک$$

اس سے لا کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور تشاکل سے ما ، ی اور ء کی قیمتیں بھی لکھی جاسکتی ہیں۔

نتیجۂ صریح ۔ اگر مساواتیں یہ ہوں:-

$$لا + ما + ی + ء = ا$$

$$ا لا + ب ما + ج ی + د ء = ک$$

$$ا^2 لا + ب^2 ما + ج^2 ی + د^2 ء = ک^2$$

$$ا^3 لا + ب^3 ما + ج^3 ی + د^3 ء = ک^3$$

حسب سابق عمل کرنے سے

$$لا(ا^3 + ف ا^2 + ق ا + ر) = ک^3 + ف ک^2 + ق ک + ر$$

$$\therefore (ا - ب)(ا - ج)(ا - د) لا = (ک - ب)(ک - ج)(ک - د)$$

اس طرح سے لا کی قیمت معلوم ہوگئی اور ما ، ی ، ء کی قیمتیں تشاکل سے لکھی جاسکتی ہیں۔

اوپر کی مساواتوں کا حل نامعلوم سروں کے استعمال کرنے سے آسانی سے حاصل ہوجاتا ہے۔

مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ مساوات

(لا - ا)(لا - ب)(لا - ج) - ف^۲(لا - ا) - گ^۲(لا - ب) - ھ^۲(لا - ج) + ۲ ف گ ھ = ۰

کی اصلیں سب حقیقی ہیں۔

مساوات مفروضہ سے

(لا - ا) {(لا - ب)(لا - ج) - ف^۲} - {گ^۲(لا - ب) + ھ^۲(لا - ج)

- ۲ ف گ ھ} = ۰

فرض کرو کہ ف، ق مساوات درجہ دوم

(لا - ب)(لا - ج) - ف^۲ = ۰

کی اصلیں ہیں؛ نیز فرض کرو کہ ف، ق سے کم نہیں ہے۔ اس مساوات کو حل کرنے سے

۲ لا = ب + ج ± √((ب - ج)^۲ + ۴ ف^۲) . . . (۱)

اور جذر اصم کی قیمت ب سے ج سے بڑی ہے، پس ف بڑا ہے ب یا ج سے اور ق چھوٹا ہے ب یا ج سے۔

مساوات مفروضہ میں لا کی بجائے بالترتیب یہ قیمتیں

+ ∞، ف، ق، - ∞

درج کرنے سے نتائج ذیل

+ ∞، - {گ √(ف - ب) - ھ √(ف - ج)}^۲، + {گ √(ب - ق) - ھ √(ج - ق)}^۲

- ∞

حاصل ہوتے ہیں کیونکہ (ف - ب)(ف - ج) = ف^۲ = (ب - ق)(ج - ق)

پس مساوات کی تین حقیقی اصلیں ہیں جن میں سے ایک ف سے بڑی ہے دوسری ف اور ق کے درمیان ہے اور تیسری ق سے کم ہے۔

اگر ف = ق تو (۱) سے (ب - ج)^۲ + ۴ ف^۲ = ۰، اس لئے

ب = ج اور ف = ۰، اس صورت میں مساوات مفروضہ یہ ہو جاتی ہے۔

(لا - ب){(لا - ا)(لا - ب) - گ^۲ - ھ^۲} = ۰

پس سب اصلیں حقیقی ہیں۔

اگر ف مساوات کی ایک اصل ہو تو تحقیقاتِ بالا کام رہتی ہے کیونکہ اس سے صرف یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ق اور $+\infty$ کے درمیان صرف ایک اصل ہے اور وہ ف ہے۔ لیکن چونکہ حسبِ سابق ق سے کم بھی ایک حقیقی اصل ہے اس لئے تیسری اصل کو لازماً حقیقی ہونا چاہیے۔ اسی طرح سے اگر ق مساواتِ مفروضہ کی اصل ہو تو یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ تمام اصلیں حقیقی ہیں۔

یہ مساوات جس پر یہاں بحث کی گئی ہے بہت اہمیت رکھتی ہے۔ ہندسۂ مجسمات میں یہ بار بار آتی ہے اور ممیز مکعبی کے نام سے موسوم ہوتی ہے۔

۵۸۶ - علمِ ریاضی کی اکثر شاخوں میں مساواتوں کا نظامِ ذیل بکثرت استعمال ہوتا ہے۔

مثال - ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}+\text{لہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}+\text{لہ}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}+\text{لہ}} = 1$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}+\text{مہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}+\text{مہ}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}+\text{مہ}} = 1$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}+\text{نہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}+\text{نہ}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}+\text{نہ}} = 1$$

ط میں ذیل کی مساوات پر غور کرو۔

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}+\text{ط}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}+\text{ط}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}+\text{ط}} = 1 - \frac{(\text{ط}-\text{لہ})(\text{ط}-\text{مہ})(\text{ط}-\text{نہ})}{(\text{ا}+\text{ط})(\text{ب}+\text{ط})(\text{ج}+\text{ط})}$$

اور فی الحال لا، ما، ی کو معلوم مقداریں تصور کرو۔

جب اس مساوات کو کسروں سے پاک کیا جائے تو یہ ط میں درجۂ دوم کی مساوات ہوتی ہے اور معادلاتِ معلومہ کی وجہ سے ط کی تین قیمتوں ط = لہ، ط = مہ، ط = نہ سے پوری ہوتی ہے۔ پس یہ ایک مساواتِ متماثلہ ہے۔ (دیکھو دفعہ ۳۱۰)۔

لا کی قیمت معلوم کرنیکے لئے ا + طہ سے ضرب دو اور پھر ا + طہ = ۰ رکھو

اس طرح سے لا = (− ا − لہ)(− ا − مہ)(− ا − نہ) / (ب − ا)(ج − ا)

یعنی لا = (ا + لہ)(ا + مہ)(ا + نہ) / (ا − ب)(ا − ج)

تشاکل سے ما = (ب + لہ)(ب + مہ)(ب + نہ) / (ب − ج)(ب − ا)

اور ی = (ج + لہ)(ج + مہ)(ج + نہ) / (ج − ا)(ج − ب)

امثلہ نمبری ۳۵ (ع)

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱ - لا^{۳} − ۱۸لا = ۳۵ ۲ - لا^{۳} + ۷۲لا − ۱۷۲۰ = ۰

۳ - لا^{۳} + ۶۳لا − ۳۱۶ = ۰ ۴ - لا^{۳} + ۲۱لا + ۳۴۲ = ۰

۵ - ۲۸لا^{۳} − ۹لا^{۲} + ۱ = ۰ ۶ - لا^{۳} − ۱۵لا^{۲} − ۳۳لا + ۸۴۷ = ۰

۷ - ۲لا^{۳} + ۳لا^{۲} + ۳لا + ۱ = ۰

۸ - ثابت کرو کہ مساوات لا^{۳} + ۱۲لا − ۱۲ = ۰ کی حقیقی اصل ۲$\sqrt[۳]{۲}$ − $\sqrt[۳]{۴}$ ہے۔

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۹ - لا^{۴} − ۳لا^{۲} − ۴۲لا − ۴۰ = ۰

۱۰ - لا^{۴} − ۱۰لا^{۲} − ۲۰لا − ۱۶ = ۰

۱۱ - لا^{۴} + ۸لا^{۳} + ۹لا^{۲} − ۸لا − ۱۰ = ۰

۱۲ - لا^{۴} + ۲لا^{۳} − ۷لا^{۲} − ۸لا + ۱۲ = ۰

۱۳- لا^{4} - ۳ لا^{2} - ۶ لا - ۲ = ۰   ۱۴- لا^{4} - ۲ لا^{3} - ۱۲ لا^{2} + ۱۰ لا + ۳ = ۰

۱۵- ۴ لا^{4} - ۲۰ لا^{3} + ۳۳ لا^{2} - ۲۰ لا + ۴ = ۰

۱۶- لا^{5} - ۶ لا^{4} - ۱۷ لا^{3} + ۱۷ لا^{2} + ۶ لا + ۱ = ۰

۱۷- لا^{4} + ۹ لا^{3} + ۱۲ لا^{2} - ۸۰ لا - ۱۹۲ = ۰ جبکہ مساوی اصلیں ہیں۔

۱۸- ق اور ر کا باہمی ربط دریافت کرو کہ مساوات لا^{3} + ق لا + ر = ۰

ذیل کی شکل لا^{4} = (لا^{2} + ا لا + ب)^{2} میں لکھی جاسکے۔

اس سے مساوات ۸ لا^{3} - ۳۶ لا + ۲۷ = ۰ کو حل کرو۔

۱۹- اگر لا^{3} + ۳ ف لا^{2} + ۳ ق لا + ر اور لا^{2} + ۲ ف لا + ق میں ایک جزوِ

ضربی مشترک ہو تو ثابت کرو کہ

۴ (ف^{2} - ق) (ق^{2} - ف ر) - (ف ق - ر)^{2} = ۰

اگر ان میں دو اجزائے ضربی مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ

ف^{2} - ق = ۰ اور ق^{2} - ف ر = ۰

۲۰- اگر مساوات ا لا^{3} + ۳ ب لا^{2} + ۳ ج لا + د = ۰ کی دو اصلیں مساوی

ہوں تو ثابت کرو کہ اُن میں سے ہر ایک (ب ج - ا د) / ۲ (ا ج - ب^{2}) کے مساوی ہے۔

۲۱- ثابت کرو کہ مساوات لا^{4} + ف لا^{3} + ق لا^{2} + ر لا + س = ۰ کو بطور ایک

مساوات درجۂ دوم کے حل کیا جاسکتا ہے اگر ر^{2} = ف^{2} س

۲۲- مساوات لا^{6} - ۱۸ لا^{4} + ۱۶ لا^{3} + ۲۸ لا^{2} - ۳۲ لا + ۸ = ۰ کی ایک اصل
$\sqrt{6}$ - ۲ ہے، مساوات کو حل کرو،

۲۳ - اگر عہ، بہ، جہ، لہ مساوات $لا^{۴} + ق\, لا^{۲} + ر\, لا + س = ۰$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں $بہ + جہ + لہ + (بہ\, جہ\, لہ)^{-۱}$ وغیرہ وغیرہ ہوں۔

۲۴ - ثابت کرو کہ اگر مساوات $لا^{۴} - ف\, لا^{۳} + ق\, لا$ .. $لا + س = ۰$ کی دو اصلوں کا مجموعہ باقی دو اصلوں کے مجموعہ کے برابر ہو تو $ف^{۳} - ۴\, ف\, ق + ۸\, ر =$ اور اگر دو اصلوں کا حاصلِ ضرب باقی دو اصلوں کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہو تو

$ر^{۲} = ف^{۲}\, س$۔

۲۵ - مساوات $لا^{۵} - ۲۰۹\, لا + ۵۶ = ۰$ کی دو اصلیں ایسی ہیں جن کا حاصلِ ضرب ۱ ہے، یہ اصلیں معلوم کرو۔

۲۶ - مساوات $لا^{۵} - ۴۰۹\, لا + ۲۸۵ = ۰$ کی دو اصلیں معلوم کرو جن کا حاصل جمع ۵ ہے۔

۲۷ - اگر مساوات $لا^{ن} + ف_{۱}\, لا^{ن-۱} + ف_{۲}\, لا^{ن-۲} + \cdots + ف_{ن-۱}\, لا + ف_{ن} = ۰$ کی اصلیں ا، ب، ج، ...... ک ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(۱ + ا^{۲})(۱ + ب^{۲})(۱ + ج^{۲}) \cdots (۱ + ک^{۲}) = (۱ - ف_{۲} + ف_{۴} - \cdots)^{۲}$$

$$+ (ف_{۱} - ف_{۳} + ف_{۵} - \cdots)^{۲}$$

۲۸ - مساوات $لا^{۴} - ۸\, لا^{۳} + ۲۱\, لا^{۲} - ۲۰\, لا + ۵ = ۰$ کی دو اصلوں کا حاصل جمع ۴ کے مساوی ہے۔ اس کی تشریح کرو کہ اگر اسی امر کی بنا پر مساوات کو حل کرنے کی کوشش کی جائے تو عمل ناکام رہتا ہے۔

متفرق مثالیں

۱۔ اگر ایک سلسلۂ حسابیہ کی ن، ۲ن، ۳ن رقموں کے حاصل جمع بالترتیب

$ج_{۱}$، $ج_{۲}$، $ج_{۳}$ ہوں تو ثابت کرو کہ $ج_{۳} = ۳(ج_{۲} - ج_{۱})$۔

۲۔ دو عدد معلوم کرو جن کا فرق، حاصل جمع، اور حاصل ضرب نسبت ۱ : ۷ : ۲۴ میں ہوں۔

۳۔ کونسے پیمانۂ تعدد کے مطابق ۲۵ کے اعداد بدلنے سے یہ ۲ گنا ہو جاتا ہے۔

۴۔ معادلات ذیل کو حل کرو

$$(۱)\quad (لا+۲)(لا+۳)(لا-۴)(لا-۵) = ۴۴$$

$$(۲)\quad لا(ما+ی)+۲ = ۰ ،\ ما(ی-۲لا)+۲۱ = ۰ ،\ ی(۲لا-ما) = ۵$$

۵۔ ایک سلسلۂ حسابیہ کی پہلی رقم ا ہے، اگر اس کی پہلی ف رقموں کا حاصل جمع صفر ہو تو ثابت کرو کہ بعد کی ق رقموں کا حاصل جمع $-\frac{ا(ف+ق)ق}{ف-۱}$ ہوگا۔

[آر۔ ایم۔ اے وولیچ]

۶۔ معادلات ذیل کو حل کرو:

$$(۱)\quad (ا+ب)(الا+ب)(ا-بلا) = (ا^{۲}لا-ب^{۲})(ا+بلا)$$

$$(۲)\quad لا^{\frac{۱}{۲}} + (۲لا-۳)^{\frac{۱}{۲}} = \{۱۲(لا-۱)\}^{\frac{۱}{۲}}$$

[انڈیا سول سروس]

۷۔ ایک ایسا سلسلۂ حسابیہ معلوم کرو جسکی پہلی رقم ا ہو اور اس کی دوسری، دسویں اور چونتیسویں رقمیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہوں۔

۸۔ اگر عہ، بہ مساوات $لا^{۲} + ف\,لا + ق = ۰$ کی اصلیں ہوں تو $عہ^{۲} + عہ\,بہ + بہ^{۲}$ ، $عہ^{۳} + بہ^{۳}$ ، $عہ^{۴} + عہ^{۲}بہ^{۲} + بہ^{۴}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

(R. M. A. Woolwich)

۹ - اگر ۲ لا = ا + ا$^{-1}$ اور ۲ ما = ب + ب$^{-1}$ تو

لا ما + $\sqrt{(}$لا^{2} − ۱)(ما^{2} − ۱) کی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۰ - $\dfrac{(۴+\sqrt{۱۵})^{\frac{۳}{۲}}+(۴-\sqrt{۱۵})^{\frac{۳}{۲}}}{(۶+\sqrt{۳۵})^{\frac{۳}{۲}}-(۶-\sqrt{۳۵})^{\frac{۳}{۲}}}$ کی قیمت معلوم کرو

[آر۔ ایم۔ اے وولیچ]

۱۱ - اگر ا یک کے خیالی جذر الکعب عہ اور بہ ہوں تو ثابت کرو کہ

عہ^{۴} + بہ^{۴} + عہ$^{-۱}$ بہ$^{-۱}$ = ۰

۱۲ - ثابت کرو کہ کسی پیمانہ تعداد میں جسکی اصل ۴ سے زیادہ ہو عدد ۱۲۴۳۲ پورا تقسیم ہو جاتا ہے ۱۱۱ پر اور نیز ۱۲۱۱ پر۔

۱۳ - ا اور ب دونوں ایک میل کی دوڑ میں بھاگنا شروع کرتے ہیں۔ پہلی بازی میں ا، ب کو ۱۱ گز کا وقفہ دیتا ہے اور منزل مقصود پر ۵۷ سکنڈ قبل پہنچ جاتا ہے، دوسری بازی میں ا، ب کو ۸۱ سکنڈ کا وقفہ دیتا ہے اور بالآخر ۸۸ گز پیچھے رہ جاتا ہے۔ بتاؤ کہ دونوں جداگانہ کتنے وقت میں ایک میل بھاگ سکتے ہیں۔

۱۴ - مساوات لا^{۲} − ما ی = ا^{۲}، ما^{۲} − ی لا = ب^{۲}، ی^{۲} − لا ما = ج^{۲}، لا + ما + ی = ۰ میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔ [آر۔ ایم۔ اے وولیچ]

۱۵ - مساواتات ا لا^{۲} + ب لا ما + ج ما^{۲} = ب لا^{۲} + ج لا ما + د ما^{۲} = د کو حل کرو۔

۱۶ - ایک ملاح کو ایک جگہ تک جو ۴۸ میل کے فاصلہ پر واقع ہے کشتی لیجانے اور واپس آنے میں ۱۴ گھنٹے لگتے ہیں، نیز وہ یہ معلوم کرتا ہے کہ جتنے عرصہ میں وہ ۴ میل رو کے موافق جا سکتا ہے اتنے ہی عرصہ میں ۳ میل رو کے خلاف جا سکتا ہے۔ رو کی رفتار دریافت کرو۔

۱۷- (ا^2 + اب + ب ج + ج ا)(ب ج + ج ا + اب + ب^2)(ب ج + ج ا + اب + ج^2)

اور ۱ - لا + $\sqrt{\text{۲۲ لا - ۱۵ - ۸ لا}^2}$ کا جذر نکالو۔

۱۸- (۱ - ۳ لا)$^{\frac{4}{3}}$ کی تفصیل میں لا^6 کا سر معلوم کرو، نیز ($\frac{4}{3}$ لا^2 - $\frac{3}{\text{۲ لا}}$)^9

کی تفصیل میں وہ رقم معلوم کرو جس میں لا شامل نہ ہو۔

۱۹- معادلات (۱) $\frac{\text{۲لا - ۳}}{\text{لا - ۱}}$ - $\frac{\text{۳لا - ۸}}{\text{لا - ۲}}$ + $\frac{\text{لا + ۳}}{\text{لا - ۳}}$ = ۰

(۲) لا^2 - ما^2 = لا ما - اب، (لا + ما)(الا + ب ما) = ۲ اب (ا + ب)

کو حل کرو۔ [ٹرنٹی کالج کیمبرج]

۲۰- ثابت کرو کہ اگر ا (ب - ج) لا^2 + ب (ج - ا) لا ما + ج (ا - ب) ما^2

مربع کامل ہو تو مقادیر ا، ب اور ج سلسلہ موسیقیہ میں ہونگی۔

[سینٹ کیتھرین کالج کیمبرج]

۲۱- اگر (ما - ی)^2 + (ی - لا)^2 + (لا - ما)^2 = (ما + ی - ۲لا)^2 + (ی + لا - ۲ ما)^2

+ (لا + ما - ۲ی)^2 اور لا، ما، ی حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ لا = ما = ی

[سینٹ کیتھرین کالج کیمبرج]

۲۲- ۱۲ کے پیمانہ میں ۱۶۲۸۵گ۳ کا جذر نکالو اور بتاؤ کہ کونسے پیمانہ

میں کسر $\frac{1}{5}$، ۲ ز ء سے تعبیر ہوگی۔

نوٹ - "گ" اصل گیارہ کو تعبیر کرتا ہے۔

۲۳- اعداد ۱، ۲، ۳، .... ن میں سے دو دو کو ضرب دینے سے جو حاصل

ضرب حاصل ہوتے ہیں، اُن کا حاصل جمع معلوم کرو، نیز ثابت کرو کہ ان اعداد

کے مکعبوں کے حاصل جمع اور مربعوں کے حاصل جمع میں جو فرق ہے حاصل جمع

مذکور اس فرق کے نصف کے مساوی ہے۔

۲۴— ایک آدمی اور اُس کے لواحقین ایک ہفتہ میں ۲۰ ڈبل روٹیاں صرف کرتے ہیں، اگر اس کی آمدنی ۵ فیصد بڑھ جائے اور روٹی کی قیمت میں $\frac{1}{2}$ ۲ فیصد اضافہ ہو جائے تو اُسے تیرہ پنس فی ہفتہ فائدہ ہوتا ہے، لیکن اگر آمدنی کی شرح $\frac{1}{2}$ ۷ فیصدی کم ہو جائے اور روٹی کی قیمت ۱۰ فیصدی گر جائے تو اُسے فی ہفتہ $\frac{1}{2}$ ۱ پنس نقصان ہوتا ہے۔ اُس کی ہفتہ واری مزدوری اور روٹی کی قیمت دریافت کرو۔

۲۵— چار عدد سلسلۂ حسابیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع ۸۴ ہے، سروں کے عددوں کے حاصل ضرب کو وسطی عددوں کے حاصل ضرب کے ساتھ نسبت ۳۵:۲۷ ہے۔ ان عددوں کو معلوم کرو۔

۲۶— ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱)\quad ا(ب-ج)لا^{۲} + ب(ج-ا)لا + ج(ا-ب) = ۰$$

$$(۲)\quad \frac{(لا-ا)(لا-ب)}{لا-ا-ب} = \frac{(لا-ج)(لا-د)}{لا-ج-د}$$ [ریاضی ٹرائی پاس]

۲۷— اگر $\sqrt{ا-لا} + \sqrt{ب-لا} + \sqrt{ج-لا} = ۰$ تو ثابت کرو کہ

$$(ا+ب+ج+۳لا)(ا+ب+ج-لا) = ۴(ب ج + ج ا + ا ب)$$

اور اگر $\sqrt[۳]{ا} + \sqrt[۳]{ب} + \sqrt[۳]{ج} = ۰$ تو ثابت کرو کہ

$$(ا+ب+ج)^{۳} = ۲۷\, ا ب ج$$

۲۸— ایک ریل کے روانہ ہونے کے ایک گھنٹہ بعد اُس کو کوئی حادثہ پیش آتا ہے جسکی وجہ سے وہ ایک گھنٹہ تک رُک جاتی ہے اور بعد ازیں اپنی پہلی رفتار کی $\frac{۳}{۵}$ رفتار کے ساتھ چلتی ہے اور منزلِ مقصود پر وقتِ معینہ سے ۳ گھنٹے دیر میں پہنچتی ہے۔ اگر حادثہ ۵۰ میل اور آگے چل کر پیش آتا تو بقدر $\frac{1}{2}$ ۱ گھنٹے کے یہ جلدی پہنچ جاتی۔ مسافت کا طول دریافت کرو۔

۲۹ - معادلات ذیل کو حل کرو:-

۲ لا + ما = ۲ ی، ۹ ی - ۷ لا = ۶ ما، $لا^۳ + ما^۳ + ی^۳ = ۲۱۶$

[آر، ایم وولچ]

۳۰ - ایک امتحان میں ۶ پرچے دیئے گئے ہیں۔ جن میں سے ۲ ریاضی کے ہیں، بتاؤ کہ کتنی مختلف ترکیبوں سے پرچے تقسیم کئے جا سکتے ہیں بشرطیکہ ریاضی کے پرچے یکے بعد دیگرے نہ ہوں۔

۳۱ - کتنے طریقوں سے ۵ پونڈ ۴ شلنگ ۲ پنس پورے ۶۰ سکوں میں ادا کئے جا سکتے ہیں جبکہ یہ سکے مشتمل ہوں نصف کراؤن، شلنگ اور چار پنس کے سکوں پر۔

۳۲ - اگر $لا^۳ + ا لا^۲ + ۱۱ لا + ۶$ اور $لا^۳ + ب لا^۲ + ۱۴ لا + ۸$ میں $لا^۲ + ف لا + ق$ کی شکل کا جزو ضربی مشترک ہو تو ا اور ب کی قیمتیں معلوم کرو۔

[لندن یونیورسٹی]

۳۳ - ا، ب اور ج تینوں کے ایک کام کو ختم کرنے میں جو وقت صرف ہوتا ہے ا اکیلا اسی کام کو ۶ گھنٹے زیادہ میں ختم کر سکتا ہے، نیز ب اکیلا ایک گھنٹہ زیادہ میں اور ج اکیلا اس سے دگنے وقت میں کر سکتا ہے، بتاؤ تینوں ملکر کتنے عرصہ میں کام ختم کرتے ہیں۔

۳۴ - اگر مساواتوں ا لا + ب ما = ۱، $ج لا^۲ + د ما^۲ = ۱$ کا صرف ایک حل ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{ا^۲}{ج} + \frac{ب^۲}{د} = ۱$ اور $لا = \frac{ا}{ج}$، $ما = \frac{ب}{د}$

[ریاضی ٹرائی پاس]

۳۵ - $(۱ - ۲ لا + ۲ لا^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا کر پہلی پانچ رقمیں معلوم کرو۔

۳۶ - اگر $لا^۲ + ف لا + ق = ۰$ کی ایک اصل دوسری اصل کے مربع کے

مساوی ہو تو ثابت کرو کہ ف^۳ - ق (۳ ف - ۱) + ق^۲ = ۰

[پمبروک کالج، کیمبرج]

۳۷۔ مساوات لا^۴ - ۵ لا^۳ - ۶ لا - ۵ = ۰ کو حل کرو

[کوئینز کالج، آکسفورڈ]

۳۸۔ ا کی قیمت معلوم کرو جس سے کسر ذیل

$$\frac{\text{لا}^3 - 8\text{لا}^2 + 19\text{لا} - ا - 4}{\text{لا}^3 - (ا+1)\text{لا}^2 + 23\text{لا} - ا - 7}$$

قابل تحویل ہو جائے کسر مذکور کو اس کی مفرد ترین رقوم میں لاؤ۔

[ریاضی ٹرائی پاس]

۳۹۔ اگر ا، ب، ج، لا، ما، ی مقادیر حقیقی ہوں اور

$$(ا + ب + ج)^2 = 3(ب ج + ج ا + ا ب - \text{لا}^2 - \text{ما}^2 - ی^2)$$

تو ثابت کرو کہ ا = ب = ج اور لا = ۰، ما = ۰، ی = ۰ [کرائسٹ کالج کیمبرج]

۴۰۔ اگر لا کی قیمت $\frac{۱}{۲}$ کے مساوی ہو تو $(۱ - \frac{۲}{۳}\text{لا})^{-\frac{۳}{۲}}$ کی تفصیل میں بڑی سے بڑی رقم معلوم کرو۔

[ای مینول کالج کیمبرج]

۴۱۔ دو ایسے عدد معلوم کرو کہ اگر ان کے حاصل جمع کو اُن کے مربعوں کے حاصل جمع سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب ۵۰۰۰ کے مساوی ہو اور اگر اُن کے فرق کو اُنکے مربعوں کے فرق کے ساتھ ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب ۳۵۲ ہو۔

[کرائسٹ کالج، کیمبرج]

۴۲۔ اگر لا = لہ ا، ما = (لہ - ۱) ب، ی = (لہ - ۳) ج اور

$$\text{لہ} = \frac{ا^2 + ب^2 + ج^2}{ا + ب + ج}$$ تو لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ کو ا، ب، ج کی رقوم کی سادہ ترین شکل میں ظاہر کرو۔

[سڈنی کالج کیمبرج]

۴۳۔ مساوات (۱) لا^۴ + ۳ لا^۳ = ۱۶ لا^۲ + ۶۰

(۲) ما² + ی² - لا = ی² + لا² - ما = لا² + ما² - ی = ؛ کو حل کرو۔

[کارپس کالج آکسفورڈ]

۴۴ - اگر لا ، ما ، ی سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

لوک (لا + ی) + لوک (لا - ۲ ما + ی) = ۲ لوک (لا - ی)

۴۵ - ثابت کرو کہ ½ + (۳×۱)/(۴×۲) (⅓) + (۵×۳×۱)/(۶×۴×۲) (⅓)² + ۔ ۔ ۔ = [illegible]

[ایمینول کالج کیمبرج]

۴۶ - اگر (۳لا + ۲ما)/(۳ا - ۲ب) = (۳ما + ۲ی)/(۳ب - ۲ج) = (۳ی + ۲لا)/(۳ج - ۲ا) تو ثابت کرو کہ

۵ (لا + ما + ی) (۵ج + ۴ب - ۳ا) = (۹لا + ۸ما + ۱۳ی) (ا + ب + ج)

[کرائسٹ کالج کیمبرج]

۴۷ - ۱۷ حروفِ صحیح اور ۵ حروفِ علت سے ۴ حروف والے کتنے الفاظ بن سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کے بیچ میں دو مختلف حروفِ علت ہوں اور دونوں سروں پر (ایک ہی یا مختلف) حروفِ صحیح ہوں۔

۴۸ - کسی مسئلہ پر ۶۰۰ اشخاص نے رائے دی اور مسئلہ مسترد ہو گیا انہی اشخاص نے اِسی مسئلہ پر از سرِ نو رائے دی اور جتنی کثرتِ رائے سے پہلے یہ مسئلہ مسترد ہوا تھا اب اُس سے دُگنی رایوں کی کثرت سے یہ مسئلہ منظور ہو گیا۔ بعد کی کثرت کی نسبت ابتدائی کثرت کے ساتھ ۸ : ۷ ہے۔ بتاؤ کہ کتنے اشخاص نے اپنی رائے بدل لی۔

[سینٹ جون کالج۔ کیمبرج]

۴۹ - ثابت کرو کہ

لوک ((۱ + لا)^((۱ - لا)/۲) / (۱ - لا)^((۱ + لا)/۲)) = لا + ۵لا³/(۲×۳) + ۹لا⁵/(۴×۵) + ۱۳لا⁷/(۶×۷) + ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔

[[illegible] کالج کیمبرج]

۵۰ — آدمیوں کی ایک جماعت کو تین قطاروں کے ایک مجوف مربع کی شکل میں کھڑا کیا گیا اور یہ دیکھا گیا کہ اگر ۲۵ آدمی زیادہ ہوتے تو اُن کو ایک ایسے ٹھوس مربع کی شکل میں کھڑا کیا جا سکتا تھا جس کے ہر ایک ضلع میں آدمیوں کی تعداد مجوف مربع کے ہر ایک ضلع میں آدمیوں کی تعداد کے جذر سے بقدر ۲۲ کے زیادہ ہوتی آدمیوں کی تعداد معلوم کرو۔

۵۱ — مساواتاتِ ذیل کو حل کرو:-

$$(۱)\quad \sqrt[3]{(\text{ا}+\text{لا})^{2}} + ۲\sqrt[3]{(\text{ا}-\text{لا})^{2}} = ۳\sqrt[3]{(\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2})}$$

$$(۲)\quad (\text{لا}-\text{ا})^{\frac{1}{2}}(\text{لا}-\text{ب})^{\frac{1}{2}} - (\text{لا}-\text{ج})^{\frac{1}{2}}(\text{لا}-\text{د})^{\frac{1}{2}} = (\text{ا}-\text{ج})^{\frac{1}{2}}(\text{ب}-\text{د})^{\frac{1}{2}}$$

۵۲ — ثابت کرو کہ $\sqrt[3]{۴} = ۱ + \frac{۲}{۶} + \frac{۵ \times ۲}{۱۲ \times ۶} + \frac{۸ \times ۵ \times ۲}{۱۸ \times ۱۲ \times ۶} + \ldots\ldots$

[سڈنی کالج، کیمبرج]

۵۳ — $\sqrt[3]{۹(۵\text{لا}+۶)} - \sqrt[3]{۵(۶\text{لا}-۱۱)} = ۱$

[کوئینز کالج کیمبرج]

۵۴ — دو برتن ہیں جن میں سے ایک میں ا گیلن شراب ہے اور دوسرے میں ب گیلن پانی۔ ہر ایک برتن میں سے ج گیلن نکال کر دوسرے برتن میں منتقل کر دئے گئے ہیں۔ یہی عمل بار بار کیا گیا ہے، اگر ج (ا + ب) = اب تو ثابت کرو کہ پہلے عمل کے بعد ہر ایک برتن میں شراب کی مقدار وُہی رہے گی۔

۵۵ — م اور ن کا اوسطِ حسابی اور ا اور ب کا اوسطِ ہندسی دونوں $\frac{\text{م ا} + \text{ن ب}}{\text{م} + \text{ن}}$ کے مساوی ہیں، م اور ن کو ا اور ب کی رقوم میں دریافت کرو۔

۵۶ — اگر لا، ما، ی ایسے ہوں کہ اُن کا حاصل جمع مستقل ہو اور اگر (ی + لا − ۲ ما) (لا + ی − ۲ ی) ایسے بدلیں جیسے ما ی تو ثابت کرو کہ ۲ (ما + ی) ... [illegible] بدلتا ہے جیسے ما ی۔

[ای منیول کالج، کیمبرج]

۵۷ — ثابت کرو کہ اگر ن بڑا ہو ۳ سے تو

$$۱\times۲\times{}^{ن}ج_{۲} - ۲\times۳\times{}^{ن}ج_{۳} + ۳\times۴\times{}^{ن}ج_{۴} - \cdots\cdots (-۱)^{ن}(ن-۱)(ن+۱)(ن+۲) = ۲\times{}^{ن}ج_{ن}$$

[امیسنٹ کالج کیمبرج]

۵۸ — مساواتِ ذیل کو حل کرو:۔

$$(۱)\quad \sqrt{۲لا-۱} + \sqrt{۳لا-۲} = \sqrt{۴لا-۳} + \sqrt{۵لا-۴}$$

$$(۲)\quad ۴\left\{(لا^{۲}-۱۶)^{\frac{۳}{۴}} + ۸\right\} = لا^{۲} + ۱۶(لا^{۲}-۱۶)^{\frac{۱}{۴}}$$

(سینٹ جانز کالج کیمبرج)

۵۹ — ثابت کرو کہ اگر $\frac{ا-ی}{۱+ای} + \frac{ی-لا}{۱+یلا} + \frac{لا-ا}{۱+لاا} = ۰$ تو مقادیر لا، ا، ی میں سے دو باہم مساوی ہونگی۔

۶۰ — ایک قوم میں کل اشخاص کی تعداد ف ہے، ان میں سے ا فیصد لکھ پڑھ سکتے ہیں، صرف مردوں میں سے ب فیصد اور صرف عورتوں میں سے ج فیصد لکھ پڑھ سکتے ہیں، بتاؤ کہ اس قوم میں کتنے مرد اور کتنی عورتیں ہیں۔

۶۱ — اگر $لا = \left(\frac{ا}{ب}\right)^{\frac{۲اب}{ا^{۲}-ب^{۲}}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{اب}{ا^{۲}+ب^{۲}}\left(لا^{\frac{ا}{ب}} + لا^{\frac{ب}{ا}}\right)$

$$= \left(\frac{ا}{ب}\right)^{\frac{ا^{۲}+ب^{۲}}{ا^{۲}-ب^{۲}}}$$

[ایمینوئل کالج کیمبرج]

۶۲ — ثابت کرو کہ $(۱ - لا + لا^{۲} - لا^{۳})^{۲}$ کی تفصیل میں $لا^{۹}$ کا سر ایک ہے۔

۶۳ — مساوات $\frac{لا-ا}{ب} + \frac{لا-ب}{ا} = \frac{ب}{لا-ا} + \frac{ا}{لا-ب}$ کو حل کرو۔

(لندن یونیورسٹی)

۶۴ — ن رقموں کا (۱) سلسلۂ حسابیہ (۲) سلسلۂ موسیقیہ معلوم کرو۔ جن میں سے

ہر ایک کی پہلی اور آخری رقمیں بالترتیب ا اور ب ہوں، ثابت کرو کہ پہلے سلسلہ کی ر ویں رقم اور دوسرے سلسلہ کی (ن − ر + ۱) ویں رقم کا حاصلِ ضرب ا ب ہے۔

۶۵ — اگر مساوات (۱ − ق + ف^{2}/۲) لا^{2} + ف (۱ + ق) لا + ق (ق − ۱) + ف^{2}/۲ = ۰

کی اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ف^{2} = ۴ ق　　(آر، ایم اے، وولچ)

۶۶ — اگر ا^{2} + ب^{2} = ۷ ا ب تو ثابت کرو کہ

لوک {۱/۳ (ا + ب)} = ۱/۲ (لوک ا + لوک ب)　　(کوئینز کالج۔ آکسفورڈ)

۶۷ — اگر ن ایک اصل ہو مساوات

لا^{2} (ا − ا ج) − لا (ا^{2} + ج^{2}) − (ا + ا ج) = ۰

کی، اور اگر ا اور ج کے درمیان ن واسطِ موسیقی درج کئے جائیں تو ثابت کرو کہ پہلے اور آخری اوسطوں کا فرق ا ج (ا − ج) کے مساوی ہوگا۔
(واڈھم کالج۔ آکسفورڈ)

۶۸ — اگر ج$_{ن+۴}$ ۸ : پ$_{ن+۴}$ ۴ (ن−۴) = ۵۷ : ۱۶ تو ن کی قیمت معلوم کرو۔

۶۹ — ایک شخص ۶ ۱/۲ فیصدی والے سرکاری قرضہ میں کچھ رقم لگاتا ہے، اگر قیمت ۳ پونڈ کم ہوتی تو اُسے اپنی رقم پر ۱/۳ فیصد سود زیادہ ملتا۔ بتاؤ کہ قرضہ کس قیمت پر دیا گیا ہے۔

۷۰ — مساوات {(لا^{2} + لا + ۱)^{3} − (لا^{2} + ۱)^{3}} {(لا^{2} − لا + ۱)^{3} − (لا^{2} + ۱)^{3} + لا^{3}}

= ۳ {(لا^{4} + لا^{2} + ۱)^{3} − (لا^{4} + ۱)^{3} − لا^{6}} کو حل کرو۔
(مرٹن کالج۔ آکسفورڈ)

۷۱ — مساواتوں لا^{2} + ا لا + ب = ۰ اور لا ما + ل (لا + ما) + م = ۰

میں سے لا کو ساقط کرنے سے جو مساوات درجہ دوم ما میں حاصل ہوتی ہے اگر اِس مساوات کی اصلیں وہی ہوں جو لا میں ابتدائی مساوات درجہ دوم کی ہیں تو ثابت کرو کہ ﺩ = ۲ ل اور ب = م یا ب + م = ا ل

(آر، ایم، اے دوم)

۷۲ ۔ اگر یہ معلوم ہو کہ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ء اور لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳ء تو ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(۱) $۶^{لا} = \frac{۱۰}{۳} - ۶^{-لا}$ (۲) $\sqrt{۵^{لا}} + \sqrt{۵^{-لا}} = \frac{۲۹}{۱۰}$

۷۳ ۔ دو اعداد معلوم کرو جن کا حاصل جمع ۹ ہو اور جن کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع ۲۴۱۷ ہو ۔ جامعۂ لندن

۷۴ ۔ ا ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے۔ ا کے روانہ ہونے کے $۲\frac{۳}{۴}$ گھنٹے بعد ب اُسکو پکڑنے کے لئے نکلتا ہے اور پہلے گھنٹے میں $۴\frac{۱}{۲}$ میل چلتا ہے، دوسرے گھنٹے میں $۴\frac{۳}{۴}$ میل، تیسرے میں ۵ میل اور اسی طرح ہر گھنٹہ میں $\frac{۱}{۴}$ میل کے حساب سے زیادہ تیز چلتا ہے، بتاؤ کہ وہ کتنے گھنٹوں میں ا کو پکڑ لیگا۔

۷۵ ۔ ثابت کرو کہ $(\sqrt{۳}+۱)^{۲م}$ کے عین بعد جو صحیح عدد آتا ہے اُس میں جزوِ ضربی $۲^{م+۱}$ شامل ہوتا ہے۔

۷۶ ۔ طبعی اعداد کے سلسلہ کو ذیل کے گروہوں میں

۱؛ ۲، ۳، ۴؛ ۵، ۶، ۷، ۸، ۹؛ علیٰ ہذا القیاس

تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ن ویں گروہ میں جو اعداد ہونگے اُن کا مجموعہ $(ن-۱)^۳ + ن^۳$ کے مساوی ہوگا ۔

۷۷ ۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\underline{|۲}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۱\times۳}{\underline{|۳}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ + \frac{۱\times۳\times۵}{\underline{|۴}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ + \dots$

کی ن رقموں کا مجموعہ $۱ - \frac{۱\times۳\times۵\times۷\times\dots(۲ن-۱)}{۲^ن\,\underline{|ن}}$ کے مساوی ہے

(او، ایم، اے دوم)

۷۸ — ثابت کرو کہ اگر ن بالترتیب ۳م، ۳م + ۱، ۳م + ۲ کی شکل کا
ہو تو $\frac{۱ + ۲ لا}{۱ - لا + لا^۲}$ کی تفصیل میں $لا^ن$ کا سر بالترتیب $(-۱)^{\frac{ن}{۳}}$ ۳، $(-۱)^{\frac{ن - ۱}{۳}}$،
$۲ (-۱)^{\frac{ن - ۲}{۳}}$ ہوگا۔

۷۹ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱) \quad \frac{لا}{ا} = \frac{ما}{ب} = \frac{ی}{ج} = \frac{لا ما ی}{لا + ما + ی}$$

$$(۲) \quad \frac{لا}{ما} + \frac{ما}{ی} + \frac{ی}{لا} = \frac{ما}{لا} + \frac{ی}{ما} + \frac{لا}{ی} = لا + ما + ی = ۳$$

[یونیورسٹی کالج۔ آکسفورڈ]

۸۰ — اگر سلسلہ ا، لا، ما، ی، ب سلسلہ حسابیہ ہو تو لا ما ی کی قیمت $\frac{۴}{۵}$
کے مساوی ہے اور اگر یہ سلسلہ موسیقیہ ہو تو یہ $\frac{۳}{۵}$ ۳ کے مساوی ہے،
ا اور ب کو مثبت صحیح عدد مان کر ان کی قیمتیں دریافت کرو۔

۸۱ — اگر ا ما - ب لا = ج $\sqrt{(لا - ا)^۲ + (ما - ب)^۲}$ تو ثابت کرو کہ لا، ما
کی کوئی حقیقی قیمت مساوات مذکور کو پورا نہ کرے گی سوائے اس صورت کے
جبکہ $ج^۲ > ا^۲ + ب^۲$۔

۸۲ — اگر $(لا + ۱)^۲$ بڑا ہو ۵ لا - ۱ سے اور چھوٹا ہو ۷ لا - ۳ سے تو لا کی
صحیح عددی قیمت دریافت کرو۔

۸۳ — اگر ان صحیح عددوں کی تعداد جن کے لوکارتموں کا ممیز $ف_۱$ ہو $ف$ ہو
اور ان صحیح عددوں کی تعداد جن کے متکافیوں کے لوکارتموں کا ممیز $- ق_۱$ ہو
$ق$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$لوک_{۱۰} ف - لوک_{۱۰} ق = ف_۱ - ق_۱ + ۱$$

۸۴ ۔ کتنے طریقوں سے ۲۰ شلنگ ۵ آدمیوں میں اس طرح تقسیم ہو سکتے ہیں کہ کسی آدمی کو ۳ شلنگ سے کم نہ ملیں۔

۸۵ ۔ ایک شخص کی یہ خواہش ہے کہ اُس کی دونوں نابالغ لڑکیوں کو سن بلوغ پر پہنچنے پر مساوی رقوم ملیں۔ اس غرض کے لئے اُس نے یہ وصیت کی کہ بڑی لڑکی کو ایک رقم کا جو اُس نے اپنی وفات کے وقت ۸۸ ۔ ۴ فیصدی والے اسٹاک میں جمع کی اُس کا کل سود ملے اور چھوٹی لڑکی کو اس رقم کا کل سود ملے جو پہلی رقم سے بقدر ۳۵۰۰ پونڈ کم ہے اور ۶۳ پر ۳ فیصدی فی سال والے سٹاک میں اُسی وقت جمع کی گئی ہے اگر ان لڑکیوں کی عمریں اُن کے باپ کی وفات کے وقت بالترتیب ۱۷ اور ۱۴ سال کی ہوں تو بتاؤ کہ دونوں صورتوں میں کتنی رقم جمع کی گئی ہے اور ہر ایک لڑکی کو کتنی رقم ملے گی۔

۸۶ ۔ ۷ کے پیمانہ میں ایک عدد تین ہندسوں پر مشتمل ہے۔ اگر اسی عدد کو ۹ کے پیمانہ میں لکھا جائے تو اس کے عدد بلحاظ ترتیب اُلٹ جاتے ہیں، بتاؤ کہ وہ کونسا عدد ہے۔ (سینٹ جانز کالج کیمبرج)

۸۷ ۔ اگر کسی سلسلۂ حسابیہ کی م رقموں کا حاصل جمع بعد کی ن رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو اور نیز بعد کی ف رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$(\text{م}+\text{ن})\left(\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{ف}}\right)=(\text{م}+\text{ف})\left(\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{ن}}\right)$$

(سینٹ جانز کالج۔ کیمبرج)

۸۸ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{(\text{ما}-\text{ی})^2}+\frac{1}{(\text{ی}-\text{لا})^2}+\frac{1}{(\text{لا}-\text{ما})^2}=\left(\frac{1}{\text{ما}-\text{ی}}+\frac{1}{\text{ی}-\text{لا}}+\frac{1}{\text{لا}-\text{ما}}\right)^2$$

[آر۔ ایم۔ اے وولچ]

۸۹ ۔ اگر م منفی یا مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $1^{\text{م}}+3^{\text{م}}+5^{\text{م}}+\dots+(2\text{ن}-1)^{\text{م}}>\text{ن}^{\text{م}+1}$ (ایمینول کالج۔ کیمبرج)

۹۰ ـ اگر ذیل کی تین مساواتوں

$$لا^2 - ف_1 لا + ق_1 = 0 ،\quad لا^2 - ف_2 لا + ق_2 = 0 ،\quad لا^2 - ف_3 لا + ق_3 = 0$$

میں سے ہر دو مساواتوں کے زوج کی ایک اصل مشترک ہو تو ثابت کرو کہ

$$ف_1^2 + ف_2^2 + ف_3^2 + 4(ق_1 + ق_2 + ق_3) = 2(ف_2 ف_3 + ف_3 ف_1 + ف_1 ف_2)$$

۹۱ ـ ا اور ب دونوں ایک ہی رستہ پر مختلف اوقات میں ایک ہی شرح رفتار سے ہنٹنگڈن سے لنڈن کی طرف روانہ ہوئے۔ لنڈن سے ۵۰ ویں میلی پتھر پر ا بطخوں کے ایک جھنڈ سے جاملا جو دو گھنٹے میں تین میل کی رفتار سے جا رہا تھا اور اس کے دو گھنٹے بعد ایک گاڑی سے ملا جو ۴ گھنٹے میں ۹ میل کی رفتار سے جا رہی تھی۔ ب بطخوں کے اسی جھنڈ سے ۴۵ ویں میلی پتھر پر ملا اور ۳۱ ویں میلی پتھر پر پہنچنے کے عین ۴۰ منٹ پہلے گاڑی کو ملا۔ بتاؤ کہ جب ا لنڈن پہنچ گیا تو ب اس وقت کہاں تھا۔ (سینٹ جانز کالج، کیمبرج)

۹۲ ـ اگر $ا + ب + ج + د = 0$ تو ثابت کرو کہ

$$اب ج + ب ج د + ج د ا + د اب = \sqrt{(ب ج - اد)(ج ا - ب د)(اب - ج د)}$$

(آر۔ ایم۔ اے وولچ)

۹۳ ـ ایک سلسلۂ حسابیہ، سلسلۂ ہندسیہ، سلسلۂ موسیقیہ کی پہلی دو رقمیں ا اور ب ہیں، ثابت کرو کہ ان کی (ن + ۲) ویں رقمیں سلسلۂ ہندسیہ میں ہونگی

اگر $\dfrac{ب^{2ن+2} - ا^{2ن+2}}{ب ا (ب^{ن} - ا^{ن})^2} = \dfrac{ن + 1}{ن}$ (ریاضی ٹرائی پاس)

۹۴ ـ ثابت کرو کہ اگر $\dfrac{لا}{(لا - ا)(لا - ب)}$

کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو لا^ن کا سر

$\frac{ا^{ن} - ب^{ن}}{ا - ب} \times \frac{۱}{ا^{ن} ب^{ن}}$ ہوگا اور $\frac{(۱ + لا^{۲})^{ن}}{(۱ - لا)^{۳}}$ کی تفصیل میں $لا^{۲ن}$ کا سر

$۲^{ن-۱}(ن^{۲} + ۴ن + ۲)$ ہوگا۔ (اینیول کالج - کیمبرج)

۹۵ - مساواتوں $\sqrt{لا + ما} \frac{۱}{۲} + \sqrt{لا - ما} = \frac{لا^{۲} - ۱}{\sqrt{لا - ما}}$

اور $لا^{۲} + ما^{۲} : لاما = ۳۴ : ۱۵$

کو حل کرو۔ (سینٹ جانز کالج - کیمبرج)

۹۶ - جملہ $۱ + \frac{۱}{۳+} \frac{۱}{۲+} \frac{۱}{۳+} \frac{۱}{۲+} \dots$ کی قیمت درجہ دوم کے جذرِ اصم کی شکل میں معلوم کرو۔ (آر، ایم، اے، ووچ)

۹۷ - ثابت کرو کہ ہر صحیح عدد کا مکعب دو مربعوں کے فرق کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے اور کسی طاق عدد کا مکعب دو مربعوں کے فرق کی شکل میں دو طرح سے لکھا جا سکتا ہے۔ نیز کسی دو متصل صحیح عددوں کے مکعبوں کا فرق دو مربعوں کے فرق کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ (جیسس کالج، کیمبرج)

۹۸ - ذیل کے سلسلۂ لامتناہی کی قیمت معلوم کرو۔

$\frac{۱}{۳!} + \frac{۲}{۵!} + \frac{۳}{۷!} + \frac{۴}{۹!} + \dots$ (اینیول کالج - کیمبرج)

۹۹ - اگر $لا = \frac{ا}{ب+} \frac{ج}{د+} \frac{ا}{ب+} \frac{ج}{د+} \dots$

اور $ما = \frac{ج}{د+} \frac{ا}{ب+} \frac{ج}{د+} \frac{ا}{ب+} \dots$

تو ثابت کرو کہ $ب لا - د ما = ا - ج$ (کرائیسٹ کالج، کیمبرج)

۱۰۰ - ذیل کے سلسلۂ متوالی کا تفاعلِ تکوینی، ن رقموں کا حاصل جمع اور ن ویں رقم معلوم کرو۔

$1 + 5 لا + 7 لا^2 + 17 لا^3 + 31 لا^4 + \ldots\ldots$

۱۰۱ — اگر ا، ب، ج سلسلۂ موسیقیہ میں ہوں تو

(۱) $\frac{ا + ب}{2ا - ب} + \frac{ج + ب}{2ج - ب} < 4$

(۲) $ب^2(ا - ج)^2 = 2\{ج^2(ب - ا)^2 + ا^2(ج - ب)^2\}$

[پمبرک کالج، کیمبرج]

۱۰۲ — اگر ا، ب، ج تمام مقادیر حقیقی ہوں اور $لا^3 - 3 ب^2 لا + 2 ج^3$ پورا تقسیم ہو جائے $لا - ا$ پر اور نیز $لا - ب$ پر تو ثابت کرو کہ $ا = ب = ج$ یا $ا = -2ب = -2ج$

[جیسس کالج - آکسفورڈ]

۱۰۳ — ثابت کرو کہ تین متصل طاق عددوں کے مربعوں کے حاصل جمع میں جب ۱ کا اضافہ کر دیا جائے تو مجموعہ ۱۲ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے لیکن ۲۴ پر تقسیم نہیں ہوتا۔

۱۰۴ — ثابت کرو کہ اگر ا منفی ہو تو $ا لا^2 + 2 ب لا + ج$ کی بڑی سے بڑی قیمت اور اگر ا مثبت ہو تو چھوٹی سے چھوٹی قیمت $\frac{اج - ب^2}{ا}$ ہو گی۔

اگر $لا^4 + ما^4 + ی^4 + ما^2 ی^2 + ی^2 لا^2 + لا^2 ما^2 = 2 لا ما ی (لا + ما + ی)$ اور لا، ما، ی سب حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ $لا = ما = ی$

[سینٹ جانز کالج کیمبرج]

۱۰۵ — ثابت کرو کہ $\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - لا^2}}{2}}$ کی تفصیل یہ ہے

$\frac{لا}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \times \frac{لا^3}{6} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} \times \frac{لا^5}{10} + \ldots\ldots$

۱۰۶ — اگر ع، ب مساوات ہوں

$لا^2 + ف لا + ق = 0$ ، $لا^{2ن} + ف^ن لا^ن + ق^ن = 0$

کی اصلیں ہوں جہاں ن کوئی جفت صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

$\frac{ع}{ہ}$ ، $\frac{ع^۲}{ہ}$ مساوات $لا^ن + ۱ + (لا + ۱)^ن = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

[پمبروک کالج - کیمبرج]

۱۰۷ — لامتناہی کسور مسلسل

$$ا + \frac{ب}{۲ا +}\;\frac{ب}{۲ا +}\;\frac{ب}{۲ا +}\;\cdots$$

اور

$$ج + \frac{د}{۲ج +}\;\frac{د}{۲ج +}\;\frac{د}{۲ج +}\;\cdots$$

کے مربعوں کا فرق معلوم کرو۔

[کرائسٹ کالج کیمبرج]

۱۰۸ — ایک خاص رقم چند آدمیوں میں تقسیم کی گئی ہے، دوسرے آدمی کو پہلے آدمی سے ایک شلنگ زیادہ ملتا ہے، تیسرے آدمی کو دوسرے سے ۲ شلنگ زیادہ چوتھے کو تیسرے سے ۳ شلنگ زیادہ اور علیٰ ہذا القیاس، اگر پہلے آدمی کو ایک شلنگ ملے اور آخری آدمی کو ۳ پونڈ ۷ شلنگ تو آدمیوں کی تعداد اور رقم کی مقدار معلوم کرو۔

۱۰۹ — معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$(۱)\quad \frac{لا}{ا} + \frac{ما + ی}{ب + ج} = \frac{ما}{ب} + \frac{ی + لا}{ج + ا} = \frac{ی}{ج} + \frac{لا + ما}{ا + ب} = ۲$$

$$(۲)\quad \frac{لا^۲ + ما^۲}{لا\,ما} + لا^۲ + ما^۲ = ۱۳\frac{۱}{۳}\;،\quad \frac{لا\,ما}{لا^۲ + ۱} + لا\,ما = ۳\frac{۳}{۱۰}$$

۱۱۰ — اگر ا اور ب مثبت اور غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا^ن - ب^ن > ن(ا - ب)(اب)^{\frac{ن-۱}{۲}}$$

[سینٹ کیتھرینز کالج - کیمبرج]

۱۱۱ — $\frac{۵۶۳}{۴۹۲}$ کو کسر مسلسل کی شکل میں لاؤ اور اس سے لا اور ما کی وہ چھوٹی

سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو جو مساوات ۳۹۶ لا ــ ۳۶۳ ما = ۱۲ کو پورا کریں۔

۱۱۲ ــ ب اور ج ملکر ایک کام کو جتنے دن میں ختم کرتے ہیں اس سے م گنے وقت میں ا اکیلا اُسی کام کو کرسکتا ہے، ا اور ج ملکر اسی کام کو جتنے دنوں میں ختم کرسکتے ہیں ب اکیلا اُس سے ن گنے وقت میں اُسے کرسکتا ہے، اسی طرح سے ا اور ب ملکر اُس کام کو جتنے دنوں میں ختم کر سکتے ہیں اس سے ف گنے وقت میں ج اکیلا اُس کام کو ختم کر لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا، ب اور ج کو اُس کام کے جداگانہ ختم کرنے میں جتنے دن لگتے ہیں وہ اِس تناسب م + ۱ : ن + ۱ : ف + ۱ میں ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ $\frac{م}{م + ۱} + \frac{ن}{ن + ۱} + \frac{ف}{ف + ۱} = ۲$

[آر، ایم، اے۔ وولیچ]

۱۱۳ ــ ایک آبی شفاخانہ کے اخراجات کا کچھ حصہ مستقل ہے اور کچھ حصہ اسکے مقیموں کی تعداد پر موقوف ہے، ہر ایک مقیم ۶۵ پونڈ سالانہ ادا کرتا ہے اگر مقیموں کی تعداد ۵۰ ہو تو سالانہ فائدہ ۹ پونڈ فی کس ہوتا ہے، لیکن اگر تعداد ۶۰ ہو تو فائدہ ۱۰ پونڈ ۱۳ شلنگ ۴ پنس فی کس ہوتا ہے اگر مقیموں کی تعداد ۸۰ ہو تو بتاؤ کہ فی کس کتنا فائدہ ہوگا۔

۱۱۴ ــ اگر $ا^۲ ما = ۲ لا - ما$ اور $لا^۲$ بڑا نہ ہو اسے تو ثابت کرو کہ

$$۴ \left(لا^۲ + \frac{لا^۶}{۳} + \frac{لا^{۱۰}}{۵} + \ldots \right) = ما^۲ + \frac{ما^۴}{۲} + \frac{ما^۶}{۳} + \ldots$$

[پیٹرہوس۔ کیمبرج]

۱۱۵ ــ اگر $\frac{لا}{ا^۲ - ما^۲} = \frac{ما}{ا^۲ - لا^۲} = \frac{۱}{ب}$ اور $لا ما = ج^۲$ تو ثابت کرو کہ جب ا اور ج غیر مساوی ہوں تو

$$(ا^۲ - ج^۲)^۲ - ب^۲ ج^۲ = ۰ \text{ اور } ا^۲ + ج^۲ - ب^۲ = ۰$$

۱۱۶ — اگر $(۱ + لا + لا^۲)^{۳ر} = ۱ + ک_۱ لا + ک_۲ لا^۲ + \ldots$

اور $(لا - ۱)^{۳ر} = لا^{۳ر} - ج_۱ لا^{۳ر-۱} + ج_۲ لا^{۳ر-۲} - \ldots$

تو ثابت کرو کہ (۱) $۱ - ک_۱ + ک_۲ - \ldots = ۱$

اور (۲) $۱ - ک_۱ ج_۱ + ک_۲ ج_۲ - \ldots = \pm \frac{\lfloor ۳ر}{\lfloor ر \lfloor ۲ر}$

{ آر، یم، اے دوبج }

۱۱۷ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $(لا - ۱)^۲ + ۲ اب = الا + ب ما ، لا ما + اب = ب لا + اما$

(۲) $لا^۲ - ما^۲ + ی^۲ = ۶ ، ۲ ما ی - ی لا + ۲ لا ما = ۱۳ ، لا - ما + ی = ۴$

۱۱۸ — اگر ن مثبت مقادیر $ا_۱ ، ا_۲ ، ا_۳ ، \ldots \ldots ا_ن$ ہوں اور اگر ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے جذر معلوم کئے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\sqrt{ا_۱ ا_۲} + \sqrt{ا_۱ ا_۳} + \ldots < \frac{ن-۱}{۲} (ا_۱ + ا_۲ + \ldots + ا_ن)$$

اور اس سے مستنبط کرو کہ دو دو کو ضرب دینے سے جو حاصل ضرب حاصل ہوتے ہیں اُن کے جذروں کا اوسطِ حسابی اُن مقادیر کے اوسطِ حسابی سے کم ہوتا ہے۔

{ آر، ایم، اے دوبج }

۱۱۹ — اگر $ب^۲ لا^۲ + ا^۲ ما^۲ = ا^۲ ب^۲$ اور $ا^۲ + ب^۲ = لا^۲ + ما^۲ = ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$ب^۴ لا^۶ + ا^۴ ما^۶ = (ب^۲ لا^۲ + ا^۲ ما^۲)^۲$$

(انڈیا سول سروس)

۱۲۰ — اُن سلسلوں کی پہلی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو جن کی رأویں رقمیں بالترتیب (۱) $\frac{۲ر + ۱}{ر^۲ (ر+۱)^۲}$ ، (۲) $(ا + ر ب) لا^{ر-۱}$ ہوں۔

(سینٹ جونز کالج، کیمبرج)

۱۲۱ — $\frac{لا^۲+۲}{۲لا^۲+۳لا+۶}$ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۱۲۲ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $۱ + لا^۴ = ۷(۱ + لا)^۴$

(۲) $۳لاما + ۲ی = لای + ۶ما ، ۲مای + ۳لا = ۰$

۱۲۳ — ایک جزثانی کی تفصیل میں $ا_۱، ا_۲، ا_۳، ا_۴$ چار متصل سرہیں، ثابت کرو کہ

$$\frac{ا_۱}{ا_۱ + ا_۲} + \frac{ا_۳}{ا_۳ + ا_۴} = \frac{۲ا_۲}{ا_۲ + ا_۳}$$

(کوئینز کالج - کیمبرج)

۱۲۴ — $\frac{لا^۳ + ۷لا^۲ - لا - ۸}{(لا^۲+لا+۱)(لا^۲-۳لا-۱)}$ کو کسور جزوی میں تحلیل کرو، نیز اگر $\frac{۳لا - ۸}{لا^۲ - ۴لا - ۴}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو پھیلاؤ کی عام رقم معلوم کرو۔

۱۲۵ — متوالی سلسلہ $\frac{۵}{۴} - \frac{۱}{۲}لا + ۲لا^۲ + ل لا^۳ + ۵لا^۴ + ۷لا^۵ + \dots\dots$ میں پیمانۂ ربط درجہ دوم کا ایک جملہ ہے، چوتھی رقم کا نا معلوم سر اور ربط کا پیمانہ دریافت کرو، نیز سلسلہ کی رقم عامہ معلوم کرو۔

(آر، ایم، اے وولچ)

۱۲۶ — اگر لا، ما، ی غیر مساوی ہوں اور اگر

$$۲ا - ۳ما = \frac{(ی - لا)^۲}{ما} \quad \text{اور} \quad ۲ا - ۳ی = \frac{(لا - ما)^۲}{ی}$$

تو ثابت کرو کہ $۲ا - ۳لا = \frac{(ما - ی)^۲}{لا}$ اور $لا + ما + ی = ا$

(ترائی پاس)

۱۲۷ ۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

(۱) لا ما + ۲ = ۲ لا ـ لا^۲ ، لا ما ـ ۹ = ۲ ما ـ ما^۲

(۲) (ا لا)^(لوک ا) = (ب ما)^(لوک ب) ، ب^(لوک لا) = ا^(لوک ما)

۱۲۸ ۔ ذیل کے جملات کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو ۔

(۱) لا √(لا^۲ + ا^۲) ـ √(لا^۴ + ا^۴) جبکہ لا ← ∞

(۲) [√(۱ + ۲ لا) ـ √(۳ لا)] / [√(۳ + لا) ـ ۲ √لا] جبکہ لا = ۱

(لنڈن یونیورسٹی)

۱۲۹ ۔ دو عددوں کا حاصل ضرب ۱۹۲ ہے ۔ دو ان عددوں کے جو عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل ہیں اُن کے اوسط حسابیہ اور اوسط موسیقیہ کا خارج قسمت ۳ ۲۵/۴۸ ہے ۔ ان عددوں کو معلوم کرو ۔

(آر ، ایم ، اے ۔ وولچ)

۱۳۰ ۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو ۔

(۱) ∛(۱۳ لا + ۳۷) ـ ∛(۱۳ لا ـ ۳۷) = ∛۲

(۲)
ب √(۱ ـ ی^۲) + ج √(۱ ـ ما^۲) = ا
ج √(۱ ـ لا^۲) + ا √(۱ ـ ی^۲) = ب
ا √(۱ ـ ما^۲) + ب √(۱ ـ لا^۲) = ج

۱۳۱ ۔ ثابت کرو کہ لاتناہی تک ذیل کے سلسلہ

۱/(۳ |۲) ـ (۱ × ۳)/(۴^۲ |۴) + (۱ × ۳ × ۵)/(۵^۲ |۵) ـ ...... کا حاصل جمع

۲۳/۲۴ ـ ۲/۳ لوگ ۲ ہے ۔

(ریاضی ثانی پاس)

۱۳۲ــ تین ہندسوں کا ایک عدد اس قسم کا ہے کہ ہندسوں کی ترتیب الٹ دینے سے اس عدد کی قیمت دگنی ہو جاتی ہے، ثابت کرو پہلے اور آخری ہندسہ سے جو عدد بنتا ہے اس پر بھی یہی امر صادق آئیگا۔ نیز ثابت کرو کہ ایسا عدد تعدد سکے ہر تین پیمانوں میں سے صرف ایک میں حاصل ہو سکتا ہے۔

[ریاضی ٹرائی پاس]

۱۳۳ــ $\dfrac{\ldots}{(۱ - لا^{۲})(۱ - لا)}$ اور ۱ - لا + لا^{۲} کے حاصل ضرب میں لا^{۱۲} اور لا^{۶} کے سر معلوم کرو۔

(آر، ایم، اے وولیچ)

۱۳۴ــ ایک خریدار بازار کے سامنے زمین کا ایک ٹکڑا خریدنا چاہتا ہے ٹکڑے کی شکل کو ایک ایسا مستطیل ہونا چاہیے کہ اس کی پیشانی کے طول کا تین گنا اور اس کی گہرائی کا دگنا ۹۶ گز کے مساوی ہو، بتاؤ کہ وہ زیادہ سے زیادہ کتنے مربع گز زمین لے۔

[لنڈن یونیورسٹی]

۱۳۵ــ ثابت کرو کہ

(ا + ب + ج + د)^{۴} + (ا + ب - ج - د)^{۴} + (ا - ب + ج - د)^{۴} + (ا - ب - ج + د)^{۴}

- (ا + ب + ج - د)^{۴} - (ا + ب - ج + د)^{۴} - (ا - ب + ج + د)^{۴}

- (-ا + ب + ج + د)^{۴} = ۱۹۲ ا ب ج د　　[ٹرنٹی کالج، کیمبرج]

۱۳۶ــ ا، ب، ج کی ایسی قیمتیں معلوم کرو کہ ہر دو جملات

لا^{۴} + ا لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + ۱ اور لا^{۴} + ۲ ا لا^{۳} + ۲ ب لا^{۲} + ۲ ج لا + ۱

مربع کامل ہوں۔

(لنڈن یونیورسٹی)

۱۳۷ــ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $\dfrac{\sqrt[۳]{لا + م} - \sqrt[۳]{لا - م}}{\sqrt[۳]{لا + م} + \sqrt[۳]{لا - م}} = ۳$ ، لا^{۲} + م^{۲} = ۶۵

(۲) ۴√(۲لا۲ + ۱) + ۴√(۲لا۲ - ۱) = ۲ / ۴√(۳ - ۴لا۲)

۱۳۸ — ایک کسان نے ۱۰ بھیڑیں کسی خاص قیمت پر فروخت کیں اور ۵ اور بھیڑیں فی بھیڑ دس شلنگ کم پر فروخت کیں۔ دونوں رقمیں پونڈوں میں ٹھیک دو صد سوں سے لکھی جاسکتی ہیں۔ ایک بھیڑ کی قیمت معلوم کرو۔

۱۳۹ — ن رقموں تک جمع کرو۔

(۱) (۲ن-۱) + ۲(۲ن-۳) + ۳(۲ن-۵) + ...

(۲) سلسلہ ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ...... کی رقموں کے مربعے

(۳) نمبر (۲) کی طاق رقمیں　　(ٹرنٹی کالج - کیمبرج)

۱۴۰ — اگر عہ، بہ، جہ مساوات لا۳ + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو

کہ ۳(عہ۲ + بہ۲ + جہ۲)(عہ۵ + بہ۵ + جہ۵) = ۵(عہ۳ + بہ۳ + جہ۳)(عہ۴ + بہ۴ + جہ۴)

(سینٹ جانز کالج کیمبرج)

۱۴۱ — مساواتوں (۱) لا(۳ما - ۵) = ۴، ما(۲لا + ۷) = ۲۷

(۲) لا۲ + ما۲ + ی۲ = ۳۹۵، لا + ما + ی = ۱۵، لا ما ی = ۱۰۵

کو حل کرو۔　　(ٹرنٹی کالج - کیمبرج)

۱۴۲ — اگر ا، ب، ج، مساوات لا۳ + ق لا۲ + ر = ۰ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ا + ب - ج، ب + ج - ا، ج + ا - ب ہوں۔

۱۴۳ — ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو:-

(۱) ن + (ن - ۱)لا + (ن - ۲)لا۲ + ... + ۲لا^(ن-۲) + لا^(ن-۱)　　(آکسفورڈ موڈز)

(۲) ۳ - لا - ۲لا۲ - ۱۶لا۳ - ۲۸لا۴ + ۶۷۶لا۵ + ... لا نہایت

(۳) ۶ + ۹ + ۱۴ + ۲۳ + ۴۰ + ... ن رقموں تک۔　　(آکسفورڈ موڈز)

۱۴۴- ذیل کی مساواتوں میں سے لا ، ما ، ی کو ساقط کرو:-

$$\text{لا}^{-1} + \text{ما}^{-1} + \text{ی}^{-1} = \text{ا}^{-1} \quad ، \quad \text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = \text{ب}$$

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} = \text{ج}^{2} \quad ، \quad \text{لا}^{3} + \text{ما}^{3} + \text{ی}^{3} = \text{د}^{3}$$

اور ثابت کرو کہ اگر لا ، ما ، ی محدود اور نعداداً غیرمساوی ہوں تو ب ، د کے مساوی نہیں ہوسکتا- (آر ، ایم ، اے وولچ)

۱۴۵ — مساوات $۳ \text{لا}^{۲} (\text{لا}^{۲} + ۸) + ۱۶ (\text{لا}^{۳} - ۱) = ۰$ کی سب اصلیں غیر مساوی نہیں ہیں ، اصلوں کو معلوم کرو-

۱۴۶ — ایک مسافر ایک خاص مقام سے روانہ ہوکر پہلے دن ایک میل چلتا ہے ، دوسرے دن ۳ میل ، تیسرے دن ۵ میل اور علیٰ ہذالقیاس ہر روز گزشتہ دن کی نسبت ۲ میل زیادہ چلتا ہے ، اس کے روانہ ہونے کے تین دن بعد ایک اور آدمی روانہ ہوتا ہے جو پہلے دن ۱۲ میل چلتا ہے ، دوسرے دن ۱۳ میل اور علیٰ ہذالقیاس بتاؤ کہ دوسرا آدمی پہلے آدمی کو کتنے دن میں پکڑلے گا- دوسرے جواب کی تشریح کرو-

۱۴۷ — سلسلہ $\frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}$ ..... کی قیمت معلوم کرو-

۱۴۸ — مساوات $\text{لا}^{۳} + ۳ \text{ا} \text{لا}^{۲} + ۳ (\text{ا}^{۲} - \text{ب ج}) \text{لا} + \text{ا}^{۳} + \text{ب}^{۳} + \text{ج}^{۳} - ۳ \text{ا ب ج} = ۰$ کو حل کرو [انڈیا سول سروس]

۱۴۹ — اگر ن کوئی عدد مفرد ہو جو نہ ا کو پورا تقسیم کرے ، نہ ب کو اور نہ ا + ب کو تو ثابت کرو کہ $\text{ا}^{\text{ن}-۲} \text{ب} - \text{ا}^{\text{ن}-۳} \text{ب}^{۲} + \text{ا}^{\text{ن}-۴} \text{ب}^{۳} - \cdots\cdots + \text{ا} \text{ب}^{\text{ن}-۲}$ بقدر اکے ن کے ضعف سے بڑا ہے- [سینٹ جانز کالج- کیمبرج]

۱۵۰ — ایک سلسلہ کا حاصل جمع لا تناہی تک $(۱ - \text{ا ب} \text{لا}^{۲}) (۱ - \text{ا} \text{لا})^{-۲} (۱ - \text{ب} \text{لا})^{-۲}$ ہے ، اس سلسلہ کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو-

(آکسفورڈ موڈز)

۱۵۱ — اگر ا، ب، ج مساوات $\text{لا}^3 + \text{ف}\,\text{لا} + \text{ق} = 0$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو۔ جسکی اصلیں $\frac{\text{ب}^2+\text{ج}^2}{\text{ا}}$ ، $\frac{\text{ج}^2+\text{ا}^2}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2}{\text{ج}}$ ہوں۔ (ٹرنٹی کالج۔ کیمبرج)

۱۵۲ — ثابت کرو کہ $(\text{ما}+\text{ی}-2\text{لا})^4 + (\text{ی}+\text{لا}-2\text{ما})^4 + (\text{لا}+\text{ما}-2\text{ی})^4$

$$= 18(\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{مای}-\text{یلا}-\text{لاما})^2$$

(کلیہ کالج۔ کیمبرج)

۱۵۳ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $\text{لا}^3 - 30\,\text{لا} + 133 = 0$ کارڈن کے طریقہ سے

(۲) $\text{لا}^5 - 4\text{لا}^4 - 10\text{لا}^3 + 40\text{لا}^2 + 9\text{لا} - 36 = 0$ جسکی اصلیں $\pm\text{ا}$ ، $\pm\text{ب}$ ، ج کی شکل کی ہیں۔

۱۵۴ — ایک شخص کی فی گھنٹہ کام کرنے کی مقدار اس کی ایک گھنٹہ کی تنخواہ کے بالراست متناسب ہے اور جتنے گھنٹے فی روز کام کرتا ہے اس کے جذر کے بالعکس متناسب ہے۔ وہ ایک کام کو فی دن ۹ گھنٹے بحساب ایک شلنگ فی گھنٹہ کام کرکے ۶ دن میں ختم کر لیتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ اسی کام کو ۶ گھنٹے فی روز بحساب ۱ شلنگ ۶ پنس فی گھنٹہ کام کرکے کتنے دنوں میں ختم کر سکیگا۔

۱۵۵ — اگر سلسلہ $1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + 4\times5 + \dots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع $\text{ج}_{\text{ن}}$ سے تعبیر ہو اور سلسلہ $\frac{1}{1\times2\times3\times4} + \frac{1}{2\times3\times4\times5} + \frac{1}{3\times4\times5\times6} + \dots$ کی ن−۱ رقموں کا جمع $\text{ص}_{\text{ن}-1}$ سے تو ثابت کرو $18\,\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}-1} - \text{ج}_{\text{ن}} + 2 = 0$

(وڈہم کالج۔ آکسفورڈ)

۱۵۶ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو :-

(۱) $(۱۲\text{لا} - ۱)(۶\text{لا} - ۱)(۴\text{لا} - ۱)(۳\text{لا} - ۱) = ۵$

(۲) $\frac{۱}{۵}\cdot\frac{(\text{لا}+۱)(\text{لا}-۳)}{(\text{لا}+۲)(\text{لا}-۴)} + \frac{۱}{۹}\cdot\frac{(\text{لا}+۳)(\text{لا}-۵)}{(\text{لا}+۴)(\text{لا}-۶)}$

$\frac{۲}{۱۳}\cdot\frac{(\text{لا}+۵)(\text{لا}-۷)}{(\text{لا}+۶)(\text{لا}-۸)} = \frac{۹۲}{۵۸۵}$　　(سینٹ جونز کالج ۔ کیمبرج)

۱۵۷ — ایک سال کے شروع میں ایک مکان کی قیمت ۲۵۰ پونڈ ہے لیکن وقت کی بربادی کی وجہ سے ہر سال اس کی قیمت شروع سال کی قیمت کا ۱۰ فی صدی گر جاتی ہے۔ بتاؤ کہ کتنے سالوں کے بعد اس کی قیمت ۲۵ پونڈ سے کم ہو جائیگی ۔ معلوم ہے لوک$_{۱۰}$ ۳ = ۰.۴۷۷۱۲۱۳

۱۵۸ — ثابت کرو کہ ذیل کے لا تناہی سلسلے

$$۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱\times۴}{۴\times۸} + \frac{۱\times۴\times۷}{۴\times۸\times۱۲} + \frac{۱\times۴\times۷\times۱۰}{۴\times۸\times۱۲\times۱۶} + \cdots\cdots$$

$$۱ + \frac{۲}{۶} + \frac{۲\times۵}{۶\times۱۲} + \frac{۲\times۵\times۸}{۶\times۱۲\times۱۸} + \frac{۲\times۵\times۸\times۱۱}{۶\times۱۲\times۱۸\times۲۴} + \cdots\cdots$$

مساوی ہیں ۔　　(پیٹر ہاؤس ۔ کیمبرج)

۱۵۹ — ذیل کی مساوات متماثلہ کو ثابت کرو ۔

$$\left\{۱ - \frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{عہ})}{\text{عہ بہ}} - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{عہ})(\text{لا}-\text{بہ})}{\text{عہ بہ جہ}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$\cdot\left\{۱ + \frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}+\text{عہ})}{\text{عہ بہ}} + \frac{\text{لا}(\text{لا}+\text{عہ})(\text{لا}+\text{بہ})}{\text{عہ بہ جہ}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\text{عہ}^۲} + \frac{\text{لا}^۲(\text{لا}^۲-\text{عہ}^۲)}{\text{عہ}^۲\,\text{بہ}^۲} - \frac{\text{لا}^۲(\text{لا}^۲-\text{عہ}^۲)(\text{لا}^۲-\text{بہ}^۲)}{\text{عہ}^۲\,\text{بہ}^۲\,\text{جہ}^۲} + \cdots\cdots$$

(ٹرنٹی کالج ۔ کیمبرج)

۱۶۰ — اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو جو ایک سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

ن۵ − ۵ ن۳ + ۶۰ ن۲ − ۵۶ ن

۱۲۰ کا ضعف ہے۔

(ہرٹ فورڈ کالج آکسفورڈ)

۱۶۱ — ایک کام کے کرنے کے لئے چند آدمی بلائے گئے۔ اگر وہ سب ایک ساتھ کام شروع کریں تو ۲۴ گھنٹے میں کام ختم ہو جاتا ہے، لیکن وہ ایک ساتھ شروع کرنے کی بجائے مساوی وقفوں کے بعد شروع کرتے ہیں حتی کہ سب آدمی کام پر لگ جاتے ہیں اور پھر کام ختم کر دیتے ہیں۔ اگر ہر ایک کی مزدوری اس کے کام کے متناسب ہو اور پہلے آدمی کو آخری آدمی کی نسبت ۱۱ گنی مزدوری ملے تو بتاؤ کہ کتنے عرصہ میں کام ختم ہوا۔

۱۶۲ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱)　لا / (ما۲ − ۳) = ما / (لا۲ − ۳) = −۶ / (لا۲ + ما۲)

(۲)　ما۲ + ی۲ − لا (ما + ی) = ا۲
ی۲ + لا۲ − ما (ی + لا) = ب۲
لا۲ + ما۲ − ی (لا + ما) = ج۲

(پمبروک کالج۔ کیمبرج)

۱۶۳ — مساوات ذیل کو حل کرو

ا۳ (ب − ج) (لا − ب) (لا − ج) + ب۳ (ج − ا) (لا − ج) (لا − ا) + ج۳ (ا − ب) (لا − ا) (لا − ب) = ۰۔ نیز ثابت کرو کہ اگر دونوں اصلیں مساوی ہوں تو

۱ / √ا ± ۱ / √ب ± ۱ / √ج = ۰

(سینٹ جونز کالج۔ کیمبرج)

۱۶۴ — سلاسل ذیل کو جمع کرو۔

(۱)　۱ × ۲ × ۴ + ۲ × ۳ × ۵ + ۳ × ۴ × ۶ + ... ن رقموں تک

(۲) $\frac{۱^۲}{|\underline{۳}} + \frac{۲^۲}{|\underline{۴}} + \frac{۳^۲}{|\underline{۵}} + ...$ تا لا متناہی

۱۶۵ — اگر ا، ب، ج، د چار مثبت غیر مساوی مقادیر ہوں اور س = ا + ب + ج + د تو ثابت کرو کہ (س − ا)(س − ب)(س − ج)(س − د) > ۸۱ ا ب ج د　　(پیٹرہاؤس، کیمبرج)

۱۶۶ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱) $\sqrt{لا + ا} - \sqrt{ما - ا} = \frac{۵}{۲}\sqrt{ا}$ ، $\sqrt{لا - ا} - \sqrt{ما + ا} = \frac{۳}{۲}\sqrt{ا}$

(۲) $لا + ما + ی = لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = \frac{۱}{۲}(لا^۳ + ما^۳ + ی^۳) = ۳$

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۶۷ — مساواتوں ل لا + م ما + ن ی = م لا + ن ما + ل ی = ن لا + ل ما + م ی = $ک^۲(ل^۲ + م^۲ + ن^۲) = ۱$ میں ل، م، ن کو ساقط کرو۔

۱۶۸ — اختصار کرو $\frac{ا(ب + ج - ا)^۲ + ... + ... + (ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج)}{ا^۲(ب + ج - ا) + ... + ... - (ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج)}$

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۶۹ — ثابت کرو کہ جملہ

$(لا^۲ - ما ی)^۳ + (ما^۲ - ی لا)^۳ + (ی^۲ - لا ما)^۳ - ۳(لا^۲ - ما ی)(ما^۲ - ی لا)(ی^۲ - لا ما)$

مربع کامل ہے، اس کا جذر معلوم کرو۔　　(لنڈن یونیورسٹی)

۱۷۰ — ا، ب، ج تین مقام ہیں، ایک شخص ا سے ب تک پیدل چلتا ہے، ب سے ج تک گاڑی میں جاتا ہے اور ج سے ا تک گھوڑے پر جاتا ہے، اس طرح سے وہ اپنا سفر $۱۵\frac{۱}{۲}$ گھنٹے میں ختم کر لیتا ہے، اگر وہ ا سے ب تک گاڑی میں جائے، ب سے ج تک گھوڑے پر جائے، اور ج سے ا تک

پیدل چلے تو ۱۲ گھنٹے میں سفر طے ہو۔ وہ کل سفر کو پیدل ۲۲ گھنٹے میں گھوڑے پر $۸\frac{۱}{۴}$ گھنٹے میں، اور گاڑی پر ۱۱ گھنٹے میں طے کرسکتا ہے۔ نیز ایک میل پیدل، ایک میل گھوڑے پر اور ایک میل گاڑی پر سفر کرنے میں کل نصف گھنٹہ صرف ہوتا ہے اس کے سفر کرنے کی شرحیں اور ان مقامات کے درمیانی فاصلے معلوم کرو۔

۱۷۱۔ ثابت کرو کہ $ن^۷ - ۷ن^۵ + ۱۴ن^۳ - ۸ن$ پورا تقسیم ہوسکتا ہے ۸۴۰ پر جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے جو ۳ سے کم نہیں ہے۔

۱۷۲۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱)\quad \sqrt{لا^۲ + ۱۲ما} + \sqrt{ما^۲ + ۱۲لا} = ۳۳ \ ،\quad لا + ما = ۲۳$$

$$(۲)\quad \frac{ء(ما - لا)}{ی - ء} = ا \ ،\ \frac{ی(ما - لا)}{ی - ء} = ب \ ،\ \frac{ما(ء - ی)}{لا - ما} = ج \ ،\ \frac{لا(ء - ی)}{لا - ما} = د$$

۱۷۳۔ اگر ن مثبت غیر مساوی مقادیر ا، ب، ج، ...... کا حاصل جمع س ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{س}{س - ا} + \frac{س}{س - ب} + \frac{س}{س - ج} + \cdots > \frac{ن^۲}{ن - ۱}$$

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۷۴۔ ایک سوداگر نے کچھ مقدار کپاس کی خریدی، پھر اس کپاس کا تیل سے تبادلہ کرلیا اور بعد ازاں تیل کو فروخت کر ڈالا۔ اسے معلوم ہوا کہ کپاس کا وزن ہنڈرڈ ویٹوں میں، تیل کے اُن گیلنوں کی تعداد جو فی ہنڈرڈ ویٹ کپاس کے تبادلہ میں اس کو ملی اور تیل کی قیمت فروخت فی گیلن شلنگوں میں تینوں ایک توالی سلسلۂ ہندسیہ میں ہیں۔ نیز اس نے یہ محسوب کیا کہ اگر اسے ایک ہنڈرڈ ویٹ کپاس اور ملتی اور ہر ہنڈرڈ ویٹ کپاس کے تبادلہ میں ایک گیلن تیل زیادہ ملتا اور ہر گیلن تیل کی قیمت فروخت ایک شلنگ زیادہ ہوتی تو اس کو کل ۵۰۸ پونڈ ۹ شلنگ زیادہ ملتے۔ لیکن اگر اس کو ایک ہنڈرڈ ویٹ کپاس کم ملتی اور ہر ہنڈرڈ ویٹ کپاس پر ایک گیلن تیل کم ملتا اور ہر گیلن پر ایک شلنگ

قیمت کم ملتی تو اُسے ۴۸۳ پونڈ ۱۳ شلنگ کم ملتے۔ بتاؤ کہ اُسے فی الحقیقت کتنی رقم ملتی۔

۱۷۵— ثابت کرو کہ Σ (ب + ج − ا − لا)^4 (ب − ج) (ا − لا) =

۱۶ (ب − ج) (ج − ا) (ا − ب) (لا − ا) (لا − ب) (لا − ج)

(جیسس کالج۔ کیمبرج)

۱۷۶— اگر عہ، بہ، جہ مساوات لا^3 − ف لا^2 + ر = ۰ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں (بہ + جہ)/عہ، (جہ + عہ)/بہ، (عہ + بہ)/جہ ہوں۔

(آر۔ ایم۔ اے۔ وولچ)

۱۷۷— اگر ا^2 + ب^2 کی شکل کے اجزائے ضربی کی کسی تعداد کو باہم ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب دو مربعوں کے حاصل جمع کی شکل میں بیان ہوسکتا ہے

اگر یہ معلوم ہو کہ (ا^2 + ب^2) (ج^2 + د^2) (ع^2 + ف^2) (گ^2 + ہ^2) = ل^2 + م^2

تو ل اور م کی قیمت ا، ب، ج، د، ع، ف، گ، ہ کی رقوم میں معلوم کرو۔

(لنڈن یونیورسٹی)

۱۷۸— مساواتوں لا^2 + ما^2 = ۶۱، لا^3 − ما^3 = ۹۱ کو حل کرو۔

(آر، ایم، اے۔ وولچ)

۱۷۹— ایک آدمی ایک امتحان میں شریک ہوتا ہے جس میں ۴ پرچے ہیں اور ہر پرچے کے زیادہ سے زیادہ نشان م ہیں۔ ثابت کرو کہ کل ۲ م نشان حاصل کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد ⅓ (م + ۱) (۲ م^2 + ۴ م + ۳) ہے۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۸۰— اگر عہ، بہ مساوات لا^2 + ف لا + ۱ = ۰ کی اصلیں ہوں اور جہ، لہ مساوات لا^2 + ق لا + ۱ = ۰ کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ (عہ − جہ) (بہ − جہ) (عہ + لہ) (بہ + لہ) = ق^2 − ف^2

(آر، ایم، اے۔ وولچ)

۱۸۱ — ثابت کرو کہ اگر (۱ + لا)ن کی تفصیل میں لاا کا سر ام ہو تو خواہ ن کی کچھ ہی قیمت ہو ا۰ - ا۱ + ا۲ - ... + (-۱)م-۱ ام-۱

$$= (-1)^{م-1} \frac{(ن-1)(ن-2)\ldots(ن-م+1)}{\lfloor م-1}$$

(نیو کالج آکسفورڈ)

۱۸۲ — ایک عدد تین مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے، ان اجزائے ضربی کے مربعوں کا حاصل جمع ۲۳۳۴ ہے (بشمول ایک) ۷۵۶۰ عدد ایسے ہیں جو اس عدد سے کم ہیں اور بلحاظ اس کے مفرد ہیں، جن عددوں پر یہ عدد تقسیم ہو سکتا ہے (بشمول اور خود عددِ مذکور) اُن کی تعداد ۱۰۵۶۰ ہے۔ اِس عدد کو معلوم کرو۔

(کارپس کالج کیمبرج)

۱۸۳ — ایک مساوات ایسی بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$لا^{3} - الا^{2} + ب لا + ج = 0$$

کی اصلوں میں سے دو دو کے حاصل ضرب کے مساوی ہوں۔

نیز مساوات ۲ لا۵ + لا۴ + لا + ۲ = ۱۲ لا۳ + ۱۲ لا۲ کو مکمل طور پر حل کرو۔

(آر، ایم، اے، ووِلچ)

۱۸۴ — ثابت کرو کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$ن^{ن} - ن(ن-2)^{ن} + \frac{ن(ن-1)}{\lfloor 2}(ن-4)^{ن} - \ldots\ldots = 2^{ن} \lfloor ن$$

۱۸۵ — اگر $(6\sqrt{6} + 14)^{2ن+1} = ع$ اور اگر ع کے کسری حصہ کو ک سے تعبیر کیا جائے تو $ع ک = 20^{2ن+1}$

۱۸۶ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) لا + ما + ی = ۲، $لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} = 0$، $لا^{3} + ما^{3} + ی^{3} = -1$

(۲) $لا^{2} - (ما - ی)^{2} = ا^{2}$، $ما^{2} - (ی - لا)^{2} = ب^{2}$، $ی^{2} - (لا - ما)^{2} = ج^{2}$

(کرائسٹ کالج۔ کیمبرج)

۱۸۷ ـــ انگلستان کے ایک عام انتخاب میں جدت پسندوں کی تعداد انگریزی قدامت پسندوں کی تعداد سے ۵۱ زیادہ تھی اور قدامت پسندوں کی کل تعداد انگریزی جدت پسندوں کی تعداد کے دوگنے سے بقدر ۵ زیادہ تھی۔ اسکاٹ لینڈ کے قدامت پسندوں کی تعداد ویلز کے جدت پسندوں کی تعداد کے مساوی تھی، اسکاٹ لینڈ کے جدت پسندوں کی کثرت ویلز کے قدامت پسندوں کی تعداد سے دگنی تھی اور اول الذکر کی نسبت آئرلینڈ کی جدت پسند کثرت کے ساتھ ۲ : ۳ تھی۔ انگریزی قدامت پسندوں کی کثرت آئرلینڈ کے کل ممبروں کی تعداد سے بقدر ۱۰ زیادہ تھی۔ کل ممبروں کی تعداد ۶۵۲ تھی جن میں سے ۶۰ سکاٹ لینڈ نے بھیجے۔ انگلستان، سکاٹ لینڈ، آئرلینڈ اور ویلز میں سے ہر ایک کی ہر پارٹی کے ممبروں کی تعداد معلوم کرو۔

۱۸۸ ـ ثابت کرو کہ $ا^۵(ج - ب) + ب^۵(ا - ج) + ج^۵(ب - ا)$

$= (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب)(\Sigma ا^۳ + \Sigma ا^۲ ب + ا ب ج)$

۱۸۹ ـ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ا^۳ & ۳ا^۲ & ۳ا & ۱ \\ ا^۲ & ا^۲ + ۲ا & ۲ا + ۱ & ۱ \\ ا & ۲ا + ۱ & ا + ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = (ا - ۱)^۶$$

[بالیل کالج۔ آکسفورڈ]

۱۹۰ ـ اگر $\frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ج} + \frac{۱}{ا - ب} + \frac{۱}{ج - ب} = ۰$ تو

ثابت کرو کہ ا، ب، ج سلسلۂ موسیقیہ میں ہونگے سوائے اس صورت کے کہ

$ب = ا + ج$ ٹرنٹی کالج کیمبرج

۱۹۱ ـــ معادلات ذیل کو حل کرو۔

(۱) $لا^۳ - ۱۳لا^۲ + ۱۵لا + ۱۸۹ = ۰$ یہ معلوم ہے کہ ایک اصل دوسری

اصل سے بقدر ۲ کے زیادہ ہے۔

(۲) لا^{۴} − ۴ لا^{۳} + ۸ لا + ۳۵ = ۰ معلوم ہے کہ ایک اصل ۲ + √(−۳) ہے۔
(آر، ایم، اے، وولیچ)

۱۹۲ — دو عدد ا اور ب معلوم ہیں، ان سے دو اور عدد ا$_{۱}$ اور ب$_{۱}$ روابط ۳ ا$_{۱}$ = ۲ ا + ب اور ۳ ب$_{۱}$ = ا + ۲ ب کے ذریعے بنائے گئے ہیں۔ ا$_{۱}$ اور ب$_{۱}$ سے اسی طرح دو اور عدد ا$_{۲}$ ب$_{۲}$ بنائے گئے ہیں اور علیٰ ہذالقیاس ان، بن کی قیمتیں ا اور ب کی رقوم میں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر ن لامتناہی ہو تو

ان = بن

۱۹۳ — اگر لا + ما + ی + ھ = ۰ تو ثابت کرو کہ

ھ لا (ھ + لا)^{۲} + ما ی (ھ − لا)^{۲} + ھ ما (ھ + ما)^{۲} + ی لا (ھ − ما)^{۲}

+ ھ ی (ھ + ی)^{۲} + لا ما (ھ − ی)^{۲} + ۴ لا ما ی ھ = ۰

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۹۴ — اگر ا + (ب ج − ا^{۲}) / (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲}) کی قیمت میں حروف ا، ب، ج کے کسی ایک زوج کے حروف کو باہم بدل دینے سے کوئی فرق نہ آئے تو کسی اور زوج کے حروف کو باہم بدلنے سے بھی اس میں کوئی فرق نہ آئے گا۔ نیز اس کی قیمت صفر ہو جائے گی اگر ا + ب + ج = ۱ (جہاں ا ≠ ب ≠ ج) (ریاضی ٹرائی پاس)

۱۹۵ — دو مقامات ا اور ب کے درمیان ریل گاڑی کی چار سڑکیں ہیں۔ دو ریل گاڑیاں ا سے ب کی طرف ۶ بجے اور ۶ بجکر ۴۵ منٹ پر روانہ ہوتی ہیں اور دو گاڑیاں ب سے ا کی طرف بالترتیب ۷ بجکر ۱۵ منٹ اور ۸ ½ بجے روانہ ہوتی ہیں۔ اگر یہ چاروں ریل گاڑیاں (جبکہ اُن کو نقطے تصور کیا جائے) ایک ہی وقت میں ایک دوسرے کے پاس سے گزریں اور اُن کی رفتاریں بالترتیب لا$_{۱}$، لا$_{۲}$، لا$_{۳}$، لا$_{۴}$ میل فی گھنٹہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{3\,لا_2}{لا_2 - لا_1} = \frac{4م + 5\,لا_2}{لا_2 + لا_1} - \frac{4م + 10\,لا_1}{لا_1 + لا_2}$$

جہاں ا ب کا درمیانی فاصلہ میلوں میں م سے تعبیر ہوتا ہے۔
(ٹرنٹی کالج۔کیمبرج)

۱۹۶ — ثابت کرو کہ اگر تیسرے اور تیسرے سے زیادہ درجہ کی رقموں کو نظر انداز کر دیا جائے تو

$$\frac{(1-لا)^{-\frac{1}{2}} + (1-ما)^{-\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{(1-لا)(1-ما)}} = 1 + \frac{1}{2}(لا + ما) + \frac{1}{8}(3\,لا^2 + لا\,ما + 3\,ما^2)$$

(ٹرنٹی کالج۔کیمبرج)

۱۹۷ — ثابت کرو کہ سلسلہ ا، ا ـ ب، ا ـ ۲ ب، ....، ا ـ (ن ـ ۱) ب کی دو دو رقموں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع صفر ہو جاتا ہے اگر ن، ۳ م^2 ـ ۱ کی شکل کا ہو اور ۲ ا = (۳ م ـ ۲)(م + ۱) ب

۱۹۸ — اگر ن جفت ہو اور درمیان کی رقموں کا زوج عہ + بہ اور عہ ـ بہ ہو تو ثابت کرو کہ ایک سلسلہ مسابیہ کے مکعبوں کا حاصل جمع ن عہ $\{$عہ^2 + (ن^2 ـ ۱) بہ$^2\}$ ہے۔

۱۹۹ — اگر ا، ب، ج حقیقی مثبت مقادیر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ا} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{ج} < \frac{ا^8 + ب^8 + ج^8}{ا^3\,ب^3\,ج^3}$$

(ٹرنٹی کالج۔کیمبرج)

۲۰۰ — ا، ب اور ج ایک ہی وقت ایک شہر کی طرف جو ف میل فاصلہ پر واقع ہے روانہ ہوتے ہیں، ا، ل میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے پیدل چلنا شروع کرتا ہے اور ب اور ج، م میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے گاڑی پر سفر کرتے ہیں، کچھ دیر کے بعد ب گاڑی سے اتر کر ا کی رفتار سے پیدل چلنا شروع کر دیتا ہے اور ج، ا کو گاڑی میں ساتھ بٹھانے کے لئے واپس آتا ہے، پھر ا اور ج گاڑی پر بیٹھ کر عین اسی وقت شہر مذکور میں پہنچتے ہیں جس وقت ب پہنچتا ہے ثابت کرو کہ کل وقت $\frac{ف}{م} \times \frac{3م + ل}{3ل + م}$ گھنٹوں کے مساوی ہے۔

(پیٹرہاؤس۔ کیمبرج)

۲۰۱ — ایک شہر کے بازار شطرنج کے نقشہ کی شکل میں بنائے گئے ہیں۔ م بازار کا رخ شمالاً جنوباً ہے اور ن کا شرقاً غرباً۔ ایک آدمی شمال مغربی کونہ سے جنوب مشرقی کونہ تک چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ طے کر کے جانا چاہتا ہے، بتاؤ کہ وہ کتنے مختلف راستوں سے جاسکتا ہے۔　　　(آکسفورڈ ۱۹۰۲ء)

۲۰۲ — مساوات ∛(لا + ۲۷) + ∛(۵۵ − لا) = ۴ کو حل کرو۔

۲۰۳ — ثابت کرو کہ سلسلہ

اب + (ا + لا)(ب + لا) + (ا + ۲ لا)(ب + ۲ لا) + ... ۲ن رقموں تک میں آخر کی ن رقموں کے حاصل جمع اور پہلی ن رقموں کے حاصل جمع کے فرق اور آخری رقم اور پہلی رقم کے فرق کی نسبت ن² : ۲ن − ۱ ہے۔

۲۰۴ — ذیل کے سلسلوں کے ن ویں بستدق معلوم کرو:۔

(۱) ۱/۲ ، ۱/۲− ، ۱/۲− ، ۱/۲− ......

(۲) ۴/۳+ ، ۴/۳+ ، ۴/۳+ ......

۲۰۵ — ثابت کرو کہ (ا − لا)²(ما − ی)² + (ا − ما)²(ی − لا)² + (ا − ی)²(لا − ما)²

= ۲{(ا − ما)²(ا − ی)²(لا − ما)²(لا − ی)² + (ا − ی)²(ا − لا)²(ما − ی)²(ما − لا)²

+ (ا − لا)²(ا − ما)²(ی − لا)²(ی − ما)²}　　　(پیٹرہاؤس۔ کیمبرج)

۲۰۶ — اگر عہ، بہ، جہ مساوات لا³ + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں ہوں تو

(م عہ + ن)/(م عہ − ن) + (م بہ + ن)/(م بہ − ن) + (م جہ + ن)/(م جہ − ن) کی قیمت م، ن، ق، ر کی رقوم میں معلوم کرو۔

۲۰۷ — انگلستان میں ہر ۴۶ آدمیوں میں سے ایک آدمی سالانہ مرتا ہے اور ہر ۳۳ آدمیوں پر ایک آدمی سالانہ پیدا ہوتا ہے، اگر ترک وطن کا سلسلہ بند ہو جائے تو بتاؤ اسی شرح سے کتنے عرصہ میں آبادی دگنی ہو جائے گی معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ء ، لوک ۱۵۳۱ = ۳٫۱۸۴۹۷۵۲ ،

لوک ۱۵۱۸ = ۳٫۱۸۱۲۷۱۸

۲۰۸ — اگر $(1+\text{لا}+\text{لا}^2)^{\text{ن}} = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\text{لا} + \text{ا}_2\text{لا}^2 + \dots\dots$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}_\text{ر} - \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ر}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ا}_{\text{ر}-2} - \dots\dots + (-1)^{\text{ر}}\frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\text{ر}\,\lfloor\text{ن}-\text{ر}}\,\text{ا}_0 = 0$$

بشرطیکہ ر ، ۳ کا ضعف نہ ہو۔ موخرالذکر صورت میں اس کی کیا قیمت ہوگی۔

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۰۹ — ایک جماعت میں پول، ترک، یونانی، جرمن اور اٹلی کے لوگ شامل ہیں۔ پول جرمنوں کی ایک تہائی سے بقدر ایک کے کم ہیں اور اٹلی والوں کی تعداد کے نصف سے تین کم ہیں۔ ترک اور جرمن، یونانیوں اور اٹلی والوں سے ۳ زیادہ ہیں۔ جرمن اور یونانی کل جماعت کے نصف سے ایک کم ہیں۔ اٹلی والے اور یونانی کل جماعت کے $\frac{3}{7}$ کے مساوی ہیں۔ ہر قوم کے لوگوں کی تعداد معلوم کرو۔

۲۱۰ — ایک سلسلہ کی ن ویں رقم $(\text{ن}+1)\,\text{ن}^{-1}(\text{ن}+2)^{-1}(-\text{لا})^{\text{ن}+1}$ ہے، اس سلسلہ کا حاصل جمع لامتناہی تک معلوم کرو۔ (آکسفورڈ موڈز)

۲۱۱ — اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ن} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1)}{\lfloor 2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1^2)(\text{ن}^2-2^2)}{\lfloor 2\,\lfloor 3}$$

$$+(-1)^{\text{ر}}\frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1^2)(\text{ن}^2-2^2)\dots\dots(\text{ن}^2-\text{ر}^2)}{\lfloor\text{ر}\,\lfloor\text{ر}+1} + \dots\dots = (-1)^{\text{ن}+1}$$

(پمبرک کالج - کیمبرج)

۲۱۲ — ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۱) ۶، ۲۴، ۶۰، ۱۲۰، ۲۱۰، ۳۳۶، ...... ن رقموں تک

(۲) ۴ − ۹ لا + ۱۶ لا^{۲} − ۲۵ لا^{۳} + ۳۶ لا^{۴} − ۴۹ لا^{۵} + ... لا متناہی تک

(۳) $\frac{۱ \times ۳}{۲} + \frac{۳ \times ۵}{۲^{۲}} + \frac{۵ \times ۷}{۲^{۳}} + \frac{۷ \times ۹}{۲^{۴}} + ...$ تا لا متناہی

۲۱۳ — مساوات

۴لا	۶لا + ۲	۸لا + ۱
۶لا + ۲	۹لا + ۳	۱۲لا
۸لا + ۱	۱۲لا	۱۶لا + ۲

= ۰ کو حل کرو

(کنگز کالج، کیمبرج)

۲۱۴ — ثابت کرو کہ

(۱) ا^{۲}(۱ + ب^{۲}) + ب^{۲}(۱ + ج^{۲}) + ج^{۲}(۱ + ا^{۲}) > ۶ ا ب ج

(۲) ن (ا$^{ف+ق}$ + ب$^{ف+ق}$ + ج$^{ف+ق}$ + ...) > (ا^{ف} + ب^{ف} + ج^{ف} + ...)

× (ا^{ق} + ب^{ق} + ج^{ق} + ...) جہاں مقادیر ا، ب، ج، .... کی تعداد ن ہو

۲۱۵ — مساوات
ما ی = ا (ما + ی) + عہ
ی لا = ا (ی + لا) + بہ
لا ما = ا (لا + ما) + جہ
کو حل کرو

(ٹرنٹی کالج۔ کیمبرج)

۲۱۶ — اگر ن کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ جملہ

۱ (۲$^{ن-۱}$ + ۱) + ۲ (۳$^{ن-۱}$ + $\frac{۱}{۲}$) + ۳ (۴$^{ن-۱}$ + $\frac{۱}{۳}$) + ...

+ (ن − ۱) (ن$^{ن-۱}$ + $\frac{۱}{ن - ۱}$)، ن پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

(کوئینز کالج، کیمبرج)

۲۱۷ — نشانہ بازی کے ایک مقابلہ میں ایک آدمی ہر نشانہ میں ۵، ۴،

۳، ۱، ۲، ۱، ۰ نمبر حاصل کرسکتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ کتنے مختلف طریقوں سے ۶ نشانوں میں ۳۰ نمبر حاصل کرسکتا ہے۔ (پمبروک کالج۔ کیمبرج)

۲۱۸ — ثابت کرو کہ جملہ $\text{لا}^4 - \text{ب لا}^3 + \text{ج لا}^2 + \text{د لا} - \text{ع}$، ایک کامل مربع اور ایک کامل مکعب کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا اگر

$$\frac{12\,\text{ب}}{5} = \frac{9\,\text{د}}{\text{ب}} = \frac{5\,\text{ع}}{\text{ج}} = \frac{\text{د}^2}{\text{ج}^2}$$

۲۱۹ — ایک تھیلی میں ۶ سیاہ گیند ہیں اور باقی سفید گیند ہیں جن کی تعداد چھ سے کم ہے۔ تین گیند یکے بعد دیگرے نکالے گئے ہیں اور واپس نہیں رکھے گئے، یہ گیند سب کے سب سفید ہیں، ثابت کرو کہ اس کے بعد سیاہ گیند نکلنے کا قرینہ $\frac{677}{909}$ ہے۔ (جیسس کالج۔ کیمبرج)

۲۲۰ — ثابت کرو کہ پہلے ن صحیح عددوں کے مربعوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{1}{360}\,\text{ن}(\text{ن}^2-1)(4\text{ن}^2-1)(5\text{ن}+6)$ ہے۔
(کیئس کالج۔ کیمبرج)

۲۲۱ — اگر
$$\frac{\text{ع}^2(\text{ب}-\text{ج})}{\text{لا}-\text{ا}} + \frac{\text{ب}^2(\text{ج}-\text{ا})}{\text{لا}-\text{ب}} + \frac{\text{ج}^2(\text{ا}-\text{ب})}{\text{لا}-\text{ج}} = 0$$

کی اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع}(\text{ب}-\text{ج}) \pm \text{ب}(\text{ج}-\text{ا}) \pm \text{ج}(\text{ا}-\text{ب}) = 0$$

۲۲۲ — ثابت کرو کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{ن} = 2^{\text{ن}-1} - \frac{\text{ن}-2}{1} \times 2^{\text{ن}-3} + \frac{(\text{ن}-3)(\text{ن}-4)}{\lfloor 2}\, 2^{\text{ن}-5}$$
$$- \frac{(\text{ن}-4)(\text{ن}-5)(\text{ن}-6)}{\lfloor 3}\, 2^{\text{ن}-7} + \ldots\ldots$$

(کلیئر کالج۔ کیمبرج)

۲۲۳ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱) $لا^2 + ۲ ما ی = ما^2 + ۲ ی لا = ی^2 + ۲ لا ما + ۳ = ۶۰$

(۲) $لا + ما + ی = ا + ب + ج$

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} + \frac{ی}{ج} = ۳$$

$ا لا + ب ما + ج ی = ب ج + ج ا + ا ب$

(اکزامنیشن کالج کیمبرج)

۲۲۴ — ایک خطِ مستقیم پر م نقطے ہیں۔ اِن نقطوں میں سے ہر ایک نقطہ کو ایک دوسرے خطِ مستقیم پر کے ن نقطوں میں سے ہر ایک نقطہ کے ساتھ وصل کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نقاطِ مذکورہ کے علاوہ خطوطِ واصل ایک دوسرے کو $\frac{1}{۴}$ م ن (م — ۱)(ن — ۱) نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔　(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۲۵ — اگر یہ معلوم ہو کہ $ما = لا + لا^2 + لا^5$ تو لا کو اس شکل

$$ما + ا ما^2 + ب ما^3 + ج ما^4 + د ما^5 + \ldots\ldots$$

میں پھیلاؤ اور ثابت کرو کہ $ا^2 د - ۳ ا ب ج + ۲ ب^3 = - ۱$

(ویلیل کالج۔ آکسفورڈ)

۲۲۶ — ایک شخص نے تین مساوی رقمیں گھوڑے، گائے اور بکریاں خریدنے میں صرف کیں، ایک گھوڑے کی قیمت ایک گائے کی قیمت سے ایک پونڈ زیادہ ہے اور ایک بکری کی قیمت سے دو پونڈ زیادہ ہے اُس نے کل ۴۷ جانور خریدے۔ گایوں کی تعداد گھوڑوں کی تعداد سے اتنی زیادہ ہے جتنی کہ ۹ پونڈ میں بکریاں خریدی جا سکتی تھیں۔ بتاؤ کہ ہر ایک قسم کے کتنے جانور خریدے گئے۔

۲۲۷ — لوگ ۲ کو لا متناہی کسر مسلسل

$$\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{2^2}{1+}\ \frac{3^2}{1+} \ldots\ldots \frac{ن^2}{1+} \ldots\ldots$$

کی شکل میں بیان کرو۔　(آئیلر)

۲۲۸ — ایک امتحان میں ۶ پرچے دیے گئے اور ہر ایک کے زیادہ سے

زیادہ نشانات ۱۰۰ مقرر کئے گئے۔ ثابت کرو کہ جن مختلف طریقوں سے ایک طالب علم کل نشانات کا ۴۰ فیصدی حاصل کرسکتا ہے اُن کی تعداد

$$\frac{1}{5}\left\{\frac{|245}{|240} - 6\times\frac{|144}{|139} + 15\times\frac{|43}{|38}\right\}$$ ہے۔ (آکسفورڈ موڈز)

۲۲۹ — سلسلہ $\frac{لا}{2} + \frac{3\times1}{4\times2}\times\frac{لا^3}{6} + \frac{7\times5\times3\times1}{8\times6\times4\times2}\times\frac{لا^5}{10}$

$$+ \frac{11\times9\times7\times5\times3\times1}{12\times10\times8\times6\times4\times2}\frac{لا^7}{14} + \cdots\cdots$$

کے استدقاق کی جانچ کرو۔

۲۳۰ — سلسلۂ متوالی $1 + 6 + 40 + 288 + \cdots\cdots$ کا پیمانۂ ربط ان کیا رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اگر ایک ایسا سلسلہ بنایا جائے جس کی ر ویں رقم سلسلۂ بالا کی ر رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو تو موخرالذکر سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع

$$\frac{2}{3}(2^{3ن}-1) + \frac{4}{27}(3^{3ن}-1) - \frac{5ن}{21}$$ (کینس کالج۔ کیمبرج)

۲۳۱ — یہ معلوم ہے کہ کسی خاص مقام پر دوپہر کے وقت ہر تین دنوں میں سے بالاوسط دو دن سورج بادلوں کی وجہ سے غائب رہتا ہے۔ بتاؤ کہ کسی ۵ مخصوص ایام مستقبل میں سے کم از کم چار دن دوپہر کے وقت سورج کے چمکنے کا کیا امکان ہے۔ (کوئینز کالج۔ کیمبرج)

۲۳۲ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\begin{cases} لا^2 + (ا - ی)^2 = ا^2 \\ ا^2 + (ی - لا)^2 = ب^2 \\ ی^2 + (لا - ا)^2 = ج^2 \end{cases}$$

(ایمنول کالج۔ کیمبرج)

۲۳۳ — ذیل کی مساواتوں میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

$$\frac{لا^2 - لاما - لای}{ا} = \frac{ما^2 - مای - لاما}{ب} = \frac{ی^2 - لای - مای}{ج}$$

اور ا لا + ب ما + ج ی = ۰ (ریاضی ٹرائی پاس)

۲۳۴ — اگر مساوات $لا^3 + ف\,لا^2 + ق\,لا + ر = ۰$ کی دو اصلیں مساوی اور مختلف العلامت ہوں تو ثابت کرو کہ ف ق = ر

(کوئینز کالج۔ کیمبرج)

۲۳۵ — سلاسلِ ذیل کو جمع کرو:

$$(۱)\quad ۱ + ۲^2 لا + ۳^3 لا^2 + \dots\dots + ن^3 لا^{ن-۱}$$

$$(۲)\quad \frac{۲۵}{۱^2 \times ۲^2 \times ۳^2} + \frac{۵۲}{۲^2 \times ۳^2 \times ۴^2} + \dots\dots + \frac{۵ن^2 + ۱۲ن + ۸}{ن^2 (ن+۱)^2 (ن+۲)^2}$$

(ایمینول کالج۔ کیمبرج)

۲۳۶ — اگر $(۱ + ا_۳ لا^2)(۱ + ا_۳^2 لا^۸)(۱ + ا_۳^۴ لا^{۱۶})(۱ + ا_۳^{۱۶} لا^{۳۲})\dots\dots$

$$= ۱ + ا_۴ لا^2 + ا_۸ لا^۸ + ا_{۱۲} لا^{۱۲} + \dots\dots$$

تو ثابت کرو کہ $ا_{ن+۴} = ا^3 ا_{ن}$ اور $ا_{۸ن} = ا^{۲ن} ا_{۴ن}$، نیز تفصیل کی پہلی دس رقمیں معلوم کرو۔

(کارپس کالج کیمبرج)

۲۳۷ — پانی کے ایک مخزن میں ا سے ب تک کوئی رو نہیں ہے لیکن ب سے ج تک رو ہے۔ ایک آدمی رو کے موافق ا سے ج تک ۳ گھنٹوں میں کشتی لیجا سکتا ہے اور ج سے ا تک رو کے مخالف $۳\frac{۱}{۲}$ گھنٹے میں، اگر تمام راستہ میں ویسی ہی رو ہوتی جو ب سے ج تک ہے تو اس کو رو کے موافق جانے میں $۲\frac{۳}{۴}$ گھنٹے لگتے، بتاؤ کہ موخرالذکر حالات میں اس کو واپسی میں کتنا

وقت لگتا۔

۲۳۸ — ثابت کرو کہ کسر مسلسل $\frac{۳}{۲+}\ \frac{۳}{۲+}\ \frac{۳}{۲+}$ ..... کا ن واں مستدق

$$\frac{۳^{ن+۱} + ۳(-۱)^{ن+۱}}{۳^{ن+۱} - (-۱)^{ن+۱}}$$ ہے　　(ایمینول کالج - کیمبرج)

۲۳۹ — اگر مساوات $لا^{ن} + ف_۱ لا^{ن-۱} + ف_۲ لا^{ن-۲} + ... + ف_{ن} = فا(لا) = ۰$ کے تمام سر صحیح عدد ہوں اور اگر فا(۰) اور فا(۱) دونوں طاق عدد ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات کی کوئی متوافق اصل نہیں ہے۔

(لنڈن یونیورسٹی)

۲۴۰ — ثابت کرو کہ مساوات $\sqrt{ا لا + ء} + \sqrt{ب لا + ہ} + \sqrt{ج لا + چ} = ۰$

اختصار کے بعد ایک سادہ مساوات بن جاتی ہے اگر $\sqrt{ا} \pm \sqrt{ب} \pm \sqrt{ج} = ۰$

مساوات $\sqrt{۶لا^۲ - ۱۵لا - ۷} + \sqrt{۴لا^۲ - ۸لا - ۱۱} - \sqrt{۲لا^۲ - ۵لا + ۵}$

$= ۲لا - ۳$ کو حل کرو۔

۲۴۱ — ایک تھیلی میں ۳ سرخ اور ۳ سبز گیند ہیں اور ان میں سے ایک آدمی ۳ گیند علی الحساب نکالتا ہے۔ تب وہ تھیلی میں ۳ نیلے گیند ڈال دیتا ہے اور پھر علی الحساب تین نکال لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ آخر کے تینوں گیندوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کے خلاف جیتنے کے لئے عین ۸ : ۳ کی شرط لگا سکتا ہے۔

(پمبرک کالج - کیمبرج)

۲۴۲ — مساوات $لا^۳ - ۷لا^۲ + ۴لا - ۳ = ۰$ کی اصلوں کی پانچویں قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(لنڈن یونیورسٹی)

۲۴۳ — ایک سلسلۂ ہندسیہ اور ایک سلسلۂ موسیقیہ دونوں کی ف ویں رقم ا، ق ویں ب اور ر ویں رقم ج کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ

$ا(ب - ج)\ لوک\ ا + ب(ج - ا)\ لوک\ ب + ج(ا - ب)\ لوک\ ج = ۰$

۲۴۹ — ذیل کے ہر ایک سلسلہ کو ن رقموں تک جمع کرو:-

(۱) $۱ + ۰ - ۱ + ۰ + ۷ + ۲۸ + ۷۹ + \ldots\ldots$

(۲) $\frac{۲ \times ۲}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴} + \frac{۱ \times ۲^{۲}}{۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵} + \frac{۶ \times ۲^{۳}}{۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶} + \frac{۱۳ \times ۲^{۴}}{۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷} + \ldots\ldots$

(۳) $۳ + \text{لا} + ۹\,\text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳} + ۳۳\,\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۵} + ۱۲۹\,\text{لا}^{۶} + \ldots\ldots$

(پبلک امتحان آکسفورڈ)

۲۵۰ — ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

(۱)
$\text{ما}^{۲} + \text{ما ی} + \text{ی}^{۲} = \text{ا لا}$
$\text{ی}^{۲} + \text{ی لا} + \text{لا}^{۲} = \text{ا ما}$
$\text{لا}^{۲} + \text{لا ما} + \text{ما}^{۲} = \text{ا ی}$

(۲)
$\text{لا}(\text{ما} + \text{ی} - \text{لا}) = \text{ا}$
$\text{ما}(\text{ی} + \text{لا} - \text{ما}) = \text{ب}$
$\text{ی}(\text{لا} + \text{ما} - \text{ی}) = \text{ج}$

(پیٹر ہاؤس کیمبرج)

۲۵۱ — اگر $\frac{۱}{\text{ا}} + \frac{۱}{\text{ب}} + \frac{۱}{\text{ج}} = \frac{۱}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}$ اور ن کوئی طاق صحیح عدد ہو

تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{\text{ا}^{\text{ن}}} + \frac{۱}{\text{ب}^{\text{ن}}} + \frac{۱}{\text{ج}^{\text{ن}}} = \frac{۱}{\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ن}} + \text{ج}^{\text{ن}}}$

اگر $\text{ل}^{۶} - \text{م}^{۶} + ۵\,\text{ل}^{۲}\text{م}^{۲}(\text{ل}^{۲} - \text{م}^{۲}) + ۴\,\text{ل م}(۱ - \text{ل}^{۴}\text{م}^{۴}) = ۰$

تو ثابت کرو کہ $(\text{ل}^{۲} - \text{م}^{۲})^{۶} = ۱۶\,\text{ل}^{۲}\text{م}^{۲}(۱ - \text{ل}^{۶})(۱ - \text{م}^{۶})$

(پمبرک کالج - کیمبرج)

۲۵۲ — اگر $\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = ۳\,\text{ف}$ ، $\text{ما ی} + \text{ی لا} + \text{لا ما} = ۳\,\text{ق}$

$\text{لا ما ی} = \text{ر}$ تو ثابت کرو کہ

$(\text{ما} + \text{ی} - \text{لا})(\text{ی} + \text{لا} - \text{ما})(\text{لا} + \text{ما} - \text{ی}) = -۲۷\,\text{ف}^{۳} + ۳۶\,\text{ف ق} - ۸\,\text{ر}$

اور $(\text{ما} + \text{ی} - \text{لا})^{۳} + (\text{ی} + \text{لا} - \text{ما})^{۳} + (\text{لا} + \text{ما} - \text{ی})^{۳} = ۲۷\,\text{ف}^{۳} - ۲۴\,\text{ر}$

۲۵۳— $\{\text{ا}(\text{ب} + \text{ج})\text{لا}^{۲} + \text{ب}(\text{ج} + \text{ا})\text{ما}^{۲} + \text{ج}(\text{ا} + \text{ب})\text{ی}^{۲}\}^{۲} - ۴\,\text{ا ب ج}$
$(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲})(\text{ا لا}^{۲} + \text{ب ما}^{۲} + \text{ج ی}^{۲})$ کے خطی اجزائے ضربی لا، ما، ی میں معلوم کرو۔

۲۵۴— ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲}}{\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}}\right)^{\text{لا}+\text{ما}+\text{ی}} > \text{لا}^{\text{لا}}\,\text{ما}^{\text{ما}}\,\text{ی}^{\text{ی}} > \left(\frac{\text{لا} + \text{ما} + \text{ی}}{۳}\right)^{\text{لا}+\text{ما}+\text{ی}}$$

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۵۵— مساوات متماثلہ $\left\{۱ - \frac{۴\,\text{لا}}{(۱ + \text{لا})^{۲}}\right\}^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱ + \text{لا}}{۱ - \text{لا}}$ سے ثابت کرو کہ

$$\sum_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\text{ن}} (-۱)^{\text{ن}-\text{ر}} \frac{|\text{ن} + \text{ر} - ۱}{|\text{ر}\;|\text{ر} - ۱\;|\text{ن} - \text{ر}} = ۱$$

(پمبروک کالج۔ کیمبرج)

۲۵۶— ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

(۱) $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ی} = \text{ی لا} + \text{ا ما} + \text{ب} = \text{ما ی} + \text{ب لا} + \text{ا} = ۰$

(۲)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{لا} + \text{ما} + \text{ی} - \text{د} = ۱۲ \\ \text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - \text{ی}^{۲} - \text{د}^{۲} = ۶ \\ \text{لا}^{۳} + \text{ما}^{۳} - \text{ی}^{۳} + \text{د}^{۳} = ۲۱۸ \\ \text{لا ما} + \text{ی د} = ۴۵ \end{array}\right.$$

۲۵۷— اگر ف = ق تقریباً اور ن > ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(\text{ن} + ۱)\,\text{ف} + (\text{ن} - ۱)\,\text{ق}}{(\text{ن} - ۱)\,\text{ف} + (\text{ن} + ۱)\,\text{ق}} = \left(\frac{\text{ف}}{\text{ق}}\right)^{\frac{۱}{\text{ن}}}$$

اگر $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$، ۱ اعشاریہ کے ۷ ویں مقام تک ا کے مساوی ہو تو بتاؤ کہ اعشاریہ کے کون سے مقام تک یہ تقریب عام طور پر درست ہوگا۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۵۸ — ایک عورت نے ۴۵ پونڈ وزن کی چائے اور کافی خریدی۔ اگر وہ چائے کی مقدار کا $\frac{۵}{۹}$ اور کافی کی مقدار کا $\frac{۶}{۱۱}$ خریدتی تو اس کو موجودہ قیمت خرید کا $\frac{۹}{۱۱}$ ادا کرنا پڑتا۔ اگر اس نے اتنی چائے خریدی ہوتی جتنی کہ کافی خریدی ہے اور اتنی کافی خریدی ہوتی جتنی کہ چائے خریدی ہے تو اس کو ۵ شلنگ زیادہ دینے پڑتے۔ چائے کافی کی نسبت زیادہ قیمتی ہے اور ۶ پونڈ کافی کی قیمت ۲ پونڈ چائے کی قیمت سے بقدر ۵ شلنگ کے زیادہ ہے۔ چائے اور کافی کی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۵۹ — اگر پہلے ن طبعی اعداد میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو $\text{ج}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{|\underline{۳}} + \frac{۱۱}{|\underline{۴}} + \cdots + \frac{\text{ج}_{\text{ن}-۱}}{|\underline{\text{ن}}} + \cdots = \frac{۱۱}{۲۴}\,\text{و}$$

(کیئس کالج۔ کیمبرج)

۲۶۰ — اگر

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف}\,\text{ا}^۲ + ۲\,\text{ق}\,\text{اب} + \text{ر}\,\text{ب}^۲} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}\,\text{اج} + \text{ق}(\text{ب ج} - \text{ا}^۲) - \text{ر}\,\text{اب}} = \frac{\text{ر}}{\text{ف}\,\text{ج}^۲ - ۲\,\text{ق}\,\text{ج ا} + \text{ر}\,\text{ا}^۲}$$

تو ثابت کرو کہ ف، ف" ق، ق" اور ر، ر کو باہم بدل دینے سے تعادلات کی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا۔ (بیانمی ٹرائی پاس)

۲۶۱ — اگر $\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} = ۰$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{عہ}^{\text{ن}+۳} + \text{بہ}^{\text{ن}+۳} + \text{جہ}^{\text{ن}+۳} = \text{عہ بہ جہ}(\text{عہ}^{\text{ن}} + \text{بہ}^{\text{ن}} + \text{جہ}^{\text{ن}}) + \frac{۱}{۲}(\text{عہ}^۲ + \text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲)(\text{عہ}^{\text{ن}+۱} + \text{بہ}^{\text{ن}+۱} + \text{جہ}^{\text{ن}+۱})$$

(کیئس کالج۔ کیمبرج)

۲۶۲ — اگر عہ، بہ، جہ، لہ مساوات $\text{لا}^۴ + \text{ف}\,\text{لا}^۳ + \text{ق}\,\text{لا}^۲ + \text{ر}\,\text{لا} + \text{س} = ۰$ کی اصلیں ہوں تو سروں کی رقوم میں جملہ $\sum(\text{عہ} - \text{بہ})^۲(\text{جہ} - \text{لہ})^۲$ کی قیمت

معلوم کرو۔　　　(لنڈن یونیورسٹی)

۲۶۳ — ایک شخص نے کچھ فیل مرغ کچھ راج ہنس اور کچھ بطخیں خریدیں اور ہر ایک جانور کے لئے اتنے ہی شلنگ ادا کئے جتنے کہ اس قسم کے پرندوں کی تعداد ہے۔ اُس نے کل ۲۳ پرندے خریدے اور ۱۰ پونڈ ۱۱ شلنگ ادا کئے۔ بتاؤ کہ اُس نے ہر قسم کے کتنے پرندے خریدے۔

۲۶۴ — ثابت کرو کہ مساوات $(ما + ی - ۸ لا)^{\frac{1}{3}} + (ی + لا - ۸ ما)^{\frac{1}{3}} + (لا + ما - ۸ ی)^{\frac{1}{3}} = ۰$ مساوات ذیل کے مُعادل ہے:۔

$$لا (ما - ی)^2 + ما (ی - لا)^2 + ی (لا - ما)^2 = ۰$$

(... کیمبرج)

۲۶۵ — اگر مساوات $\frac{ا}{لا + ا} + \frac{ب}{لا + ب} = \frac{ج}{لا + ج} + \frac{د}{لا + د}$ کی اصلوں میں سے ۲ اصلیں باہم مساوی ہوں تو یا مقادیر ا اور ب میں سے کوئی ایک مقادیر ج اور د میں سے ایک مقدار کے مساوی ہے یا $\frac{1}{ا} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{ج} + \frac{1}{د}$،
نیز ثابت کرو کہ اس صورت میں اصلیں [illegible]
$-\frac{۲ ا ب}{ا + ب}$ کے مساوی ہونگی۔　　　(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۶۶ — مُعادلات ذیل کو حل کرو:

(۱) $لا + ما + ی = ا ب ، لا^{-1} + ما^{-1} + ی^{-1} = ا^{-1} ب ، لا ما ی = ا^3$

(۲) $ا ما ی + ب ما + ج ی = ب ی لا + ج ی + ا لا = ج لا ما + ا لا$
$+ ب ما = ا + ب + ج$

(پبلک امتحان آکسفورڈ)

۲۶۷ — جذر ذیل کو مختصر کرو

$$\frac{\text{عہ}^{۳}}{(\text{عہ}-\text{بہ})(\text{عہ}-\text{جہ})(\text{عہ}-\text{لہ})(\text{عہ}-\text{کہ})}+\frac{\text{بہ}^{۳}}{(\text{بہ}-\text{عہ})(\text{بہ}-\text{جہ})(\text{بہ}-\text{لہ})(\text{بہ}-\text{کہ})}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{\text{کہ}^{۳}}{(\text{کہ}-\text{عہ})(\text{کہ}-\text{بہ})(\text{کہ}-\text{جہ})(\text{کہ}-\text{لہ})}$$

لنڈن یونیورسٹی

۲۶۸ —— پادریوں، ڈاکٹروں اور وکیلوں کی ایک جماعت کے متعلق یہ معلوم کیا گیا ہے کہ تمام حاضرین کی عمروں کا مجموعہ ۲۱۶۰ ہے، اُن کی اوسط عمر ۳۶ ہے۔ پادریوں اور ڈاکٹروں کی اوسط عمر ۳۹ ہے، ڈاکٹروں اور وکیلوں کی $۳۲\frac{۸}{۱۱}$، پادریوں اور وکیلوں کی $۳۶\frac{۲}{۳}$۔ اگر ہر ایک پادری ایک سال، ہر ایک وکیل ۷ سال اور ہر ایک ڈاکٹر ۶ سال بڑا ہوتا تو اُن کی اوسط عمر ۵ سال زیادہ ہوتی۔ بتاؤ کہ مختلف پیشوں کے آدمیوں کی تعداد کیا ہے؟ نیز اُن کی اوسط عمریں معلوم کرو۔

۲۶۹ —— بتاؤ کہ جملۂ ذیل:

$$\text{ا}_{\text{۰}}\text{لا}^{۴}+۴\,\text{ا}_{۱}\text{لا}^{۳}\text{ما}+۶\,\text{ا}_{۲}\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲}+۴\,\text{ا}_{۳}\text{لا}\,\text{ما}^{۳}-\text{ا}_{۴}\text{ما}^{۴}$$

کے کیا شرط پوری کریں کہ یہ جملہ لا اور ما میں دو خطی جملوں کی چوتھی قوتوں کے حاصل جمع کی شکل میں تحویل ہو سکے۔

[لنڈن یونیورسٹی]

۲۷۰ —— معادلاتِ ذیل کی حقیقی اصلیں معلوم کرو:-

$$\text{ی}^{۲}+\text{و}^{۲}-\text{ھ}^{۲}=\text{ا}^{۲}\qquad\qquad \text{وھ}+\text{ء}(\text{ما}+\text{ی})=\text{ب ج}$$

$$\text{ما}^{۲}+\text{ھ}^{۲}+\text{ء}^{۲}=\text{ب}^{۲}\qquad\qquad \text{ھء}+\text{و}(\text{ی}+\text{لا})=\text{ج ا}$$

$$\text{ی}^{۲}+\text{ء}^{۲}+\text{و}^{۲}=\text{ج}^{۲}\qquad\qquad \text{ءو}+\text{ھ}(\text{لا}+\text{ما})=\text{ا ب}$$

[ریاضی ٹرائی پاس]

۲۷۱ —— گالک زبان کے الفاظ میں یہ ایک کلیہ ہے کہ حروفِ تہجی کا کوئی حرف یا حروفِ صحیح کا مجموعہ ایک تام حرفِ علت اور ناقص حرفِ علت کے درمیان نہیں آسکتا۔ تام حروفِ علت a, o, u ہیں اور ناقص حروفِ علت e اور i ہیں۔

ثابت کرو کہ ان کُل لفظوں کی تعداد جو ن حروف صحیح اور حروف علت ۵۵ سے بن سکتے ہیں $\frac{{}^{2}\lfloor ن + ۳}{ن + ۲}$ ہے جبکہ ہر لفظ میں (ن + ۳) حروف ہوں اور کوئی حرف ایک لفظ میں مکرر نہ آئے۔

(کیئس کالج۔ کیمبرج)

۲۷۲۔ اگر $لا^2 + ما = ۲ ی^2$ جہاں لا، ما، ی اعداد صحیح ہیں تو ثابت کرو کہ $۲ لا = ر(ل^2 + ۲ ل ک - ک^2)$، $۲ ما = ر(ک^2 + ۲ ل ک - ل^2)$

$۲ ی = ر (ل^2 + ک^2)$

ر، ل، ک اعداد صحیح کو تعبیر کرتے ہیں۔

(کیئس کالج۔ کیمبرج)

۲۷۳۔ سلسلہ $\frac{1}{\lfloor 1} \; \frac{1}{\lfloor 1 + 1} \; \frac{2}{\lfloor 1 + 3} \; \frac{3}{\lfloor 1 + 5} \; \frac{4}{\lfloor 1 + 7}$ ...... تا لاتناہی کو جمع کرو۔

۲۷۴۔ سلاسل ذیل کو جمع کرو (۱) $\frac{لا^2}{۲ \times ۳} + \frac{۲ لا^3}{۳ \times ۴} + \frac{۳ لا^4}{۴ \times ۵} + \dots$ تا لاتناہی

(۲) $\frac{\lfloor 1}{ا + 1} + \frac{\lfloor 2}{(ا+1)(ا+2)} + \dots + \frac{\lfloor ن}{(ا+1)(ا+2)\dots(ا+ن)}$

۲۷۵۔ معادلات ذیل کو حل کرو۔

(۱) $۲ لا ما ی + ۳ = (۲ لا - ۱)(۳ ما + ۱)(۴ ی - ۱) + ۱۲$

$= (۲ لا + ۱)(۳ ما - ۱)(۴ ی + ۱) + ۸۰ = ۰$

(۲) $۳ د لا - ۲ د ما = د لا + د ما = ۳ د^2 + ۲ د^2 = ۱۴$، $لا ما = ۱۰ د د$

۲۷۶۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ا^2+ل & اب & اج & اد \\ اب & ب^2+ل & بج & بد \\ اج & بج & ج^2+ل & ج د \\ اد & ب د & ج د & د^2+ل \end{vmatrix}$$

لا^۲ پر تقسیم ہو سکتا ہے دوسرا جزوِ ضربی معلوم کرو۔

(کارپس کالج کیمبرج)

۲۷۷ — اگر ا، ب، ج ... مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ف}_{۱}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ف}_{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \cdots + \text{ف}_{\text{ن}-۱}\,\text{لا} + \text{ف}_{\text{ن}} = ۰$$

کی اصلیں ہوں تو $\text{ا}^۳ + \text{ب}^۳ + \text{ج}^۳ + \cdots$ کا حاصل جمع معلوم کرو کہ اور نیز ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}} + \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲}{\text{ج}} + \frac{\text{ج}^۲}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}^۲}{\text{ج}} + \frac{\text{ج}^۲}{\text{ب}} + \cdots\cdots$$

$$= \text{ف}_{۱} - \frac{\text{ف}_{\text{ن}-۱}\left(\text{ف}_{۱}^{۲} - ۲\,\text{ف}_{۲}\right)}{\text{ف}_{\text{ن}}}$$

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۷۸ — $\frac{۱ + ۲\text{لا}}{۱ - \text{لا}^۳}$ کی تفصیل سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ

$$۱ - ۳\text{ن} - \frac{(۳\text{ن}-۱)(۳\text{ن}-۲)}{۱\times۲} - \frac{(۳\text{ن}-۲)(۳\text{ن}-۳)(۳\text{ن}-۴)}{۱\times۲\times۳}$$

$$+ \frac{(۳\text{ن}-۳)(۳\text{ن}-۴)(۳\text{ن}-۵)(۳\text{ن}-۶)}{۱\times۲\times۳\times۴} \cdots\cdots = (-۱)^{\text{ن}}$$

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے اور سلسلہ پہلی رقم پر جو معدوم ہو جائے ختم ہو جاتا ہے۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۷۹ — دو شکاری ا اور ب شکار کھیلنے نکلے اور ۱۰۰ پرندے مار کر لائے دونوں نے جتنے نشانے مارے اُن کے مربعوں کا حاصل جمع ۲۸۰۰ ہے، دونوں کے نشانوں کا حاصل ضرب دونوں کے پرندوں کے حاصل ضرب کا ۱۸ گنا ہے۔ اگر ا جتنے نشانے مارتا جتنے ب نے مارے اور ا اتنے مارتا جتنے ب نے مارے ہیں تو ب، ا کی نسبت ۵ زیادہ پرندے مارتا۔ بتاؤ کہ ہر ایک نے کتنے

پہلے سے بڑے ۔

۲۸۰ — ثابت کرو کہ ۸ (ا^۳ + ب^۳ + ج^۳)^۲ > ۹ (ا^۲ + ب ج) (ب^۲ + ج ا) (ج^۲ + ا ب)

(پمبرک کالج ۔ کیمبرج)

۲۸۱ — ثابت کرو کہ $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۶}{۵}$ ..... کا ن واں مستدق

$$۲ - \frac{۲^{ن+۱}}{۳ (ن - ۱) !} \quad \text{ہے}$$

(کنگز کالج ، کیمبرج)

اگر ن لامتناہی ہو تو اس کی انتہا معلوم کرو۔

۲۸۲ — اگر $\frac{ق_ن}{ل_ن}$ کسر مسلسل

$$\frac{۱}{ا +}\ \frac{۱}{ب +}\ \frac{۱}{ج +}\ \frac{۱}{ا +}\ \frac{۱}{ب +}\ \frac{۱}{ج +} \ .....$$

کا ن واں مستدق ہو تو ثابت کرو کہ $ق_{۳ن+۳} = ب ق_{۳ن} + (ب ج + ۱) ل_{۳ن}$

(کوئنیز کالج ۔ کیمبرج)

۲۸۳ — ن خطوطِ مستقیم ہیں جن کے طول بالترتیب ۱ ، ۲ ، ۳ .... ن انچ ہیں ۔ ثابت کرو کہ جن مختلف طریقوں سے ان خطوطِ مستقیم میں سے ۴ ایسے خط منتخب کئے جا سکتے ہیں کہ ان سے بنے ہوئے ذو اربعۃ الاضلاع کے اندر ایک دائرہ کھینچا جا سکے ان کی تعداد $\frac{۱}{۴۸}$ { ۲ ن (ن - ۲) (۲ ن - ۵) - ۳ + ۳ (- ۱)^ن } ہے ۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۸۴ — جو عدد ن سے کم ہیں اور بلحاظ اس کے مفرد ہیں ۔ ان کے مربعوں اور مکعبوں کے اوسطِ حسابی بالترتیب $ی_۲$ ، $ی_۳$ ہیں ثابت کرو کہ

ن^۳ - ۶ ن $ی_۲$ + ۴ $ی_۳$ = ۰ جہاں ۱ کو بطور عدد مفرد کے شمار کیا گیا ہے ۔

(سینٹ جونز کالج ۔ کیمبرج)

$$\frac{لا_1}{ا_1-ب_1}+\frac{لا_2}{ا_1-ب_2}+\cdots+\frac{لا_ن}{ا_1-ب_ن}=1$$

$$\frac{لا_1}{ا_2-ب_1}+\frac{لا_2}{ا_2-ب_2}+\cdots+\frac{لا_ن}{ا_2-ب_ن}=1$$

. . . .

$$\frac{لا_1}{ا_ن-ب_1}+\frac{لا_2}{ا_ن-ب_2}+\cdots+\frac{لا_ن}{ا_ن-ب_ن}=1$$

(لنڈن یونیورسٹی)

۲۹۰ — ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} ا\,ی-لا^2 & ی\,لا-ا^2 & لا\,ا-ی^2 \\ ی\,لا-ا^2 & لا\,ا-ی^2 & ا\,ی-لا^2 \\ لا\,ا-ی^2 & ا\,ی-لا^2 & ی\,لا-ا^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ر^2 & و^2 & و^2 \\ و^2 & ر^2 & و^2 \\ و^2 & و^2 & ر^2 \end{vmatrix}$$

جہاں $ر^2 = لا^2 + ا^2 + ی^2$ اور $و^2 = ا\,ی + ی\,لا + لا\,ا$

(ٹرنٹی کالج کیمبرج)

۲۹۱ — ایک کام کو ا، ب، ج نے مل کر ختم کیا۔ پہلے ا اکیلا کام کرتا رہا، کچھ دنوں کے بعد ب شامل ہوا اور پھر کچھ دنوں کے بعد ا اور ب کے ساتھ ج بھی آکر شامل ہو گیا۔ جتنے دن ب اور ج نے جداگانہ کام کیا ہے اگر ان میں سے ہر ایک اس سے دگنے دن کام کرتا تو دونوں ⅔ کام ختم کر سکتے تھے، اگر وا اپنے ایام کار کی تعداد سے ⅔ دن کام کرتا اور ج اپنے ایام کار کی تعداد کے ۴ گنا دن کام کرتا تو دونوں اس کام کو ختم کر سکتے تھے، یا اگر ا اور ب بغیر ج کی مدد کے ۴۰ دن کام کرتے تو بھی کام ختم ہو سکتا تھا یا اگر تینوں مل کر اتنے دن کام کرتے جتنے دن ب نے کیا ہے تو بھی کام ختم ہو جاتا۔ ب کے شامل ہونے سے پہلے جتنے دن کام ہوتا رہا اور ج کے شامل ہونے سے پہلے جتنے دن کام ہوتا رہا ہے ان کی نسبت ۳ : ۵ ہے۔ بتاؤ کہ ہر ایک آدمی نے کتنے دن کام کیا۔

۲۹۲ — ثابت کرو کہ اگر مقادیر

$۱ ، لا ، لا^۲ ، لا^۳ ، ...... لا^{ن-۱}$

میں سے ر، ر رقموں کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو ج ر سے تعبیر کیا جائے تو

$ج_{ن، ر} = ج_ر \; لا^{\frac{1}{2}(ن-۱)(ن-۲ر)}$

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۹۳ ۔ اگر ا، ب اور ج مثبت ہوں اور ان میں سے ہر دو کا مجموعہ تیسرے سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\left(۱+\frac{ب-ج}{ا}\right)^{ا}\left(۱+\frac{ج-ا}{ب}\right)^{ب}\left(۱+\frac{ا-ب}{ج}\right)^{ج} > ۱$$

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۹۴ ۔ اجزائے ضربی میں تحلیل کرو

$$(ا+ب+ج)(ب+ج-ا)(ج+ا-ب)(ا+ب-ج)(ا^۲+ب^۲+ج^۲)-۸ا^۲ب^۲ج^۲$$

ثابت کرو کہ

$$۲\{عہ^۴+بہ^۴+جہ^۴+(عہ+بہ+جہ)^۴\}=(بہ+جہ)^۴+(جہ+عہ)^۴+(عہ+بہ)^۴$$
$$+۶(بہ+جہ)^۲(جہ+عہ)^۲+۶(جہ+عہ)^۲(عہ+بہ)^۲+۶(عہ+بہ)^۲(بہ+جہ)^۲$$

(جیسس کالج کیمبرج)

۲۹۵ ۔ ثابت کرو کہ اعداد ۱، ۲، ۳، .... ن اور ان کی قوتوں سے ر الابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کا مجموعہ یہ ہے

$$\frac{۱}{\lfloor ن-۱}\left\{ن^{ن+ر-۱}-\frac{ن-۱}{۱}\times۲^{ن+ر-۱}+\frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۱\times۲}۳^{ن+ر-۱}-\ldots\text{تا ن رقوم}\right\}$$

(ایمینول کالج کیمبرج)

۲۹۶ ۔ ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو

$$ن^ن-۳ن\frac{(۳ن-۳)}{۱\times۲}...$$

$$۱-۳ن+\frac{۳ن(۳ن-۳)}{۲\times۱}-\frac{۳ن(۳ن-۴)(۳ن-۵)}{۱\times۲\times۳}+\ldots=۲(-۱)^ن$$

(آکسفورڈ موڈز)

۲۹۷ــــ اگر لا(۲ ا ــ ما) = ما(۲ ا ــ ی) = ی(۲ ا ــ د) = د(۲ ا ــ لا) = ب^۲

تو ثابت کرو کہ لا = ما = ی = د باستثنائے اُس صورت کے جبکہ ب^۲ = ۲ ا^۲ اگر یہ شرط پوری ہو تو مساواتیں غیر تابع نہیں رہتیں۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۹۸ــــ ثابت کرو کہ اگر ا، ب، ج مثبت اور غیر مساوی ہوں تو مساواتیں

ا لا + ی ما + ی = ۰، ی لا + ب ما + ی = ۰، ما ی + ی لا + ج = ۰

سے لا، ما، ی کی حقیقی قیمتوں کے تین مختلف جُٹ حاصل ہوتے ہیں اور لا، ما میں سے ہر ایک کی تین قیمتوں کے حاصل ضربوں کی نسبت ب (ب ــ ج) : ا(ج ــ ا) ہے۔

آکسفورڈ موڈز

۲۹۹ــــ اگر اَ = ا لا ــ ب ما ــ ج ی، دَ = ب ی + ج ما

بَ = ب ما ــ ج ی ــ ا لا　　عَ = ج لا + ا ی

جَ = ج ی ــ ا لا ــ ب ما　　فَ = ا ما + ب لا

تو ثابت کرو کہ اَ بَ جَ ــ اَ دَ^۲ ــ بَ عَ^۲ ــ جَ فَ^۲ + ۲ دَ عَ فَ

= (ا^۲ + ب^۲ + ج^۲)(ا لا + ب ما + ج ی)(لا^۲ + ما^۲ + ی^۲)

(پبلک امتحان آکسفورڈ)

۳۰۰ ــ ایک طالب علم ایک پرانے دستی نسخہ کو پڑھنا چاہتا ہے، اِسی قسم کے گزشتہ تجربوں سے اُسے معلوم ہے کہ وہ روزانہ جتنے الفاظ پڑھ سکتا ہے اُنکی تعداد گھنٹوں میں اُس کے روزانہ کام اور میلوں میں اُس کی روزانہ سیر کے حاصل ضرب کے متناسب ہے، بنا بریں وہ روزانہ کام میں بحساب ایک گھنٹہ فی روز اور روزانہ ورزش میں بحساب ایک میل فی روز کا اضافہ کرنا

شروع کرتا ہے اور پہلے دن اپنی معمولی محنت اور ورزش سے شروع کرتا ہے۔ اس نے دیکھا کہ نسخہ میں کل ۲۳۲۰۰۰ الفاظ ہیں، پہلے دن اُس نے ۱۲۰۰۰ الفاظ پڑھے اور آخری دن ۷۲۰۰۰ نیز نصف وقت کے آخر تک اس نے کل ۶۲۰۰۰ لفظ پڑھے اُس کی روزانہ ورزش اور کام کی معمولی مقداریں دریافت کرو۔

تمّت

جوابات

جبر و مقابلہ حصہ دوم

امثلہ نمبری ۱۸ (ا) (صفحات ۷ و ۸)

۱- ۱۱۴۶ پونڈ ۱۴ شلنگ ۱۰ پنس ۲- ۷۲۰ پونڈ

۳- ۱۴٫۲ سال ۴- ۶۷۶۸ پونڈ ۷ شلنگ $10\frac{1}{2}$ پنس

۵- ۹٫۶ سال ۸- ۹۶۴ پونڈ ۱۹ شلنگ $4\frac{3}{4}$ پنس

۹- ۷ سال سے کچھ کم ۱۰- ۱۱۹ پونڈ ۱۰ شلنگ $5\frac{3}{4}$ پنس

امثلہ نمبری ۱۸ (ب) (صفحات ۱۴ تا ۱۷)

۱- ۶ فی صدی ۲- ۳۱۳۷ پونڈ ۲ شلنگ $2\frac{3}{4}$ پنس

۳- ۱۱۰ پونڈ ۴- ۳ فی صدی ۵- $28\frac{4}{7}$ سال

۶- ۱۲۷۵ پونڈ ۷- ۹۲۶ پونڈ ۲ شلنگ

۸- ۶۷۵۵ پونڈ ۱۳ شلنگ ۹- ۱۸۳ پونڈ ۱۸ شلنگ

۱۰- $3\frac{1}{5}$ فی صدی ۱۱- ۶۱۶ پونڈ ۹ شلنگ $1\frac{1}{2}$ پنس

۱۲- ۱۳۰۸ پونڈ ۱۲ شلنگ $4\frac{1}{2}$ پنس ۱۵- ۴۲۰۰ پونڈ

امثلہ نمبری ۱۹ (ا) (صفحات ۲۶ تا ۲۸)

۸۔ ار + ۲ب بڑا ہے ۱۲۔ لا > یا < لا + لا + ۲ جبکہ لا > یا < ۲
۱۴۔ لا کی بڑی سے بڑی قیمت ا ہے۔ ۱۵۔ ۴، ۸
۲۲۔ ۴ × ۵ جب کہ لا = ۳ ۲۳۔ ۹ جبکہ لا = ۱

امثلہ نمبری ۱۹ (ب) (صفحات ۳۳ تا ۳۵)

۱۰۔ ۳ × ۵ / ۲ ، ۳√(۳/۴) ، ۳√(۲/۵)

امثلہ نمبری ۲۰ (صفحات ۴۶ تا ۴۷)

۱۔ ۱۰/۷ ، ۹/۴ ۲۔ ۹ ، ۱/۹ ۳۔ ۱/۲ ، ۵/۳
۴۔ ۱۵/۸ ، ۲ ۵۔ ۱ ، صفر ۶۔ صفر ، ۳۰ ۷۔ ۳/۲
۸۔ لوک ا۔ لوک ب ۹۔ ۲ ۱۰۔ م و ار ۱۱۔ ۱/(۲ لا ار)
۱۲۔ ۱/۳ ۱۳۔ ۱ ۱۴۔ ۲ لا ار / (لا ار ۳ + ۱) ۱۵۔ لا ار ۱۶۔ صفر
۱۷۔ ۳/۲ ۱۸۔ و ار

امثلہ نمبری ۲۱ (ا) (صفحات ۶۶ تا ۶۸)

۱۔ مستدق ۲۔ مستدق ۳۔ مستدق
۴۔ لا < ۱ یا لا = ۱ مستدق ؛ لا > ۱ متسع
۵۔ نتیجہ مثال (۴) کے مطابق ہے۔ ۶۔ مستدق۔ ۷۔ متسع

۸۔ لا < ا مستدق؛ لا > ا یا لا = ا متسع
۹۔ متسع جب تک ق > ۲ نہ ہو۔ ۱۰۔ لا < ا یا لا = ا مستدق؛ لا > ا متسع
۱۱۔ اگر لا < ا مستدق؛ لا > ا یا لا = ا متسع۔ ۱۲۔ نتیجہ مثال (۱۱) کے مطابق ہے۔
۱۳۔ متسع جب تک ق > ۱ نہ ہو۔ ۱۴۔ لا < ا یا لا = ا مستدق؛ لا > ا متسع
۱۵۔ مستدق ۱۶۔ متسع ۱۷۔ (۱) متسع (۲) مستدق
۱۸۔ (۱) متسع (۲) مستدق۔

امثلہ نمبری ۲۱ (ب) (صفحات ۸۲ تا ۸۴)

۱۔ لا < ا یا لا = ا مستدق؛ لا > ا متسع
۲۔ نتیجہ مثال (۱) کے مطابق ہے۔ ۳۔ نتیجہ مثال (۱) کے مطابق ہے
۴۔ لا < $\frac{۱}{و}$ یا لا = $\frac{۱}{و}$ مستدق؛ لا > $\frac{۱}{و}$ متسع
۵۔ لا < و مستدق؛ لا > و یا لا = و متسع
۶۔ لا < ا مستدق؛ لا > ا یا لا = ا متسع ۷۔ متسع
۸۔ لا < $\frac{۱}{و}$ مستدق؛ لا > $\frac{۱}{و}$ یا لا = $\frac{۱}{و}$ متسع
۹۔ لا < ا مستدق؛ لا > ا متسع۔ اگر لا = ا اور اگر جہ ۔ ع ۔ ب ثبت ہو تو مستدق۔ اور اگر جہ ۔ ع ۔ ب منفی یا صفر ہو تو متسع۔
۱۰۔ لا < ا مستدق؛ لا > ا یا لا = ا متسع۔ یہ نتائج ق کی تمام قیمتوں پر صادق آتے ہیں خواہ ثبت ہو یا منفی۔
۱۱۔ ز منفی یا صفر، مستدق؛ ز ثبت، متسع۔

امثلہ نمبری ۲۲ (ا) (صفحات ۹۱ تا ۹۲)

۱۔ $\frac{۱}{۳}$ ن (۴ ن۲ - ۱) ۲۔ $\frac{۱}{۴}$ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳)

۳- $\frac{۱}{۱۲}$ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (۳ن + ۵) ۴- ن^{۲} (۲ ن^{۲} - ۱)

۵- $\frac{۱}{۳۰}$ ن (ن + ۱) (۲ن + ۱) (۳ ن^{۲} + ۳ ن - ۱) ۶- ق^{۳} = ل^{۲}

۷- ب^{۳} = ۲۷ ا^{۲} د، ج^{۳} = ۲۷ ا د^{۲}

۸- ا د = ب ف، ۴ ا^{۲} ج - ب^{۲} = ۸ ا^{۲} ف

۱۳- ا ب ج + ۲ ف گ ھ - ا ف^{۲} - ب گ^{۲} - ج ھ^{۲} = ۰

امثلہ نمبری ۲۲ (ب) (صفحات ۹۷ تا ۹۹)

۱- ۱ + ۳ لا + ۴ لا^{۲} + ۷ لا^{۳} ۲- ۱ - ۷ لا - لا^{۲} - ۴۳ لا^{۳}

۳- $\frac{۱}{۲}$ + $\frac{۱}{۴}$ لا - $\frac{۳}{۸}$ لا^{۲} + $\frac{۱}{۱۶}$ لا^{۳} ۴- $\frac{۳}{۲}$ + $\frac{۵}{۴}$ لا + $\frac{۱۱}{۸}$ لا^{۲} + $\frac{۲۱}{۱۶}$ لا^{۳}

۵- ۱ - ا لا + ا (ا + ۱) لا^{۲} - (ا^{۳} + ۲ ا^{۲} - ۱) لا^{۳}

۶- ا = ۱، ب = ۲ ۷- ا = ۱، ب = -۱، ج = ۲

۹- آیندہ کی رقم ۳ .... د + ب

۱۱- $\frac{ا^{ن}}{(۱ - ا)(۱ - ا^{۲})(۱ - ا^{۳})......(۱ - ا^{ن})}$

امثلہ نمبری ۲۳ (صفحات ۱۰۸ - ۱۱۰)

۱- $\frac{۴}{۱ - ۳ لا}$ - $\frac{۵}{۱ - ۲ لا}$ ۲- $\frac{۷}{۳ لا - ۵}$ - $\frac{۵}{۲ لا + ۳}$

۳- $\frac{۴}{۱ - ۲ لا}$ - $\frac{۳}{۱ - لا}$ ۴- $\frac{۲}{لا - ۱}$ + $\frac{۳}{لا - ۲}$ - $\frac{۴}{لا - ۳}$

۲۰- $\frac{۲}{(۱-لا)^۳} - \frac{۳}{(۱-لا)^۲} + \frac{۲}{۱-لا}$ ؛ $(ر^۲+۱)لا^ر$

۲۱- $\left\{\frac{ا^{ر+۲}}{(ا-ب)(ا-ج)} + \frac{ب^{ر+۲}}{(ب-ج)(ب-ا)} + \frac{ج^{ر+۲}}{(ج-ا)(ج-ب)}\right\}لا^ر$

۲۲- $\frac{۵}{(۲-لا)^۲} - \frac{۲}{۲-لا} + \frac{۱}{(۱-لا)^۲} + \frac{۲}{۱-لا}$ ؛ $\left\{ر+۳ - \frac{۵ر+۹}{۲^{ر+۲}}\right\}لا^ر$

۲۳- (۱) $\frac{۱}{لا(۱-لا)}\left\{\frac{۱}{۱+لا^{ن+۱}} - \frac{۱}{۱+لا}\right\}$

(۲) $\frac{۱}{(۱-ا)^۲}\left\{\frac{۱}{۱+ا^ن لا} - \frac{۱}{۱+ا^{ن+۱}لا} - \frac{۱}{۱+لا} + \frac{۱}{۱+ا لا}\right\}$

۲۴- $\frac{۱}{لا(۱-لا)(۱-لا^۲)}$

۲۵- $\frac{۱}{(۱-لا)^۲}\left\{\frac{لا}{۱-لا} - \frac{لا^۲}{۱-لا^۲} - \frac{لا^{ن+۱}}{۱-لا^{ن+۱}} + \frac{لا^{ن+۲}}{۱-لا^{ن+۲}}\right\}$

امثلہ نمبری ۲۴۔ (صفحات ۱۱۹ تا ۱۲۱)

۱- $\frac{۱+۳لا}{(۱-لا)^۲}$ ؛ $(۴ر+۱)لا^ر$

۲- $\frac{۲+لا}{۱+لا-۲لا^۲}$ ؛ $\left\{۱+(-۱)^ر ۲^ر\right\}لا^ر$

۳- $\frac{۲-۳لا}{۱-۳لا+۲لا^۲}$ ؛ $(۱+۲^ر)لا^ر$

۴- $\frac{۷-۲۰لا}{۱-۲لا-۳لا^۲}$ ؛ $\left\{\frac{۲۷}{۴}(-۱)^ر + \frac{۳}{۴}\right\}لا^ر$

۵- $\frac{۳-۱۲لا+۱۱لا^۲}{۱-۶لا+۱۱لا^۲-۶لا^۳}$ ؛ $(۱+۲^ر+۳^ر)لا^ر$

۶- $۳^ن+۲^{ن-۱}$ ؛ $\frac{۱}{۲}(۳^ن-۱)+۲^ن-۱$

۷- $(۲\times۳^{ن-۱}-۳\times۲^{ن-۱})لا^{ن-۱}$ ؛ $\frac{۲(۱-۳^ن لا^ن)}{۱-۳لا} - \frac{۳(۱-۲^ن لا^ن)}{۱-۲لا}$

۸- $(۴^{ن-۱}+۳^{ن-۱})لا^{ن-۱}$ ؛ $\frac{۱-۴^ن لا^ن}{۱-۴لا} + \frac{۱-۳^ن لا^ن}{۱-۳لا}$

۹- $(۱+۳^{ن-۱}-۲^{ن-۱})لا^{ن-۱}$ ؛ $\frac{۱-لا^ن}{۱-لا} + \frac{۱-۳^ن لا^ن}{۱-۳لا} - \frac{۱-۲^ن لا^ن}{۱-۲لا}$

۱۰۔ $\frac{۸}{۵}(-۱)^{ن} + \frac{۲^{۴ن-۳}}{۵}$ ؛ $\frac{۴}{۵}\left\{(-۱)^{ن}-۱\right\} + \frac{۱}{۳۰}(۲^{۴ن}-۱)$

۱۱۔ $ع_{ن} - ۳ع_{ن-۱} + ۲ع_{ن-۲} - ع_{ن-۳} = ۰$ ؛ $ع_{ن} - ۴ع_{ن-۱} + ۶ع_{ن-۲}$

$- ۴ع_{ن-۳} + ع_{ن-۴} = ۰$

۱۲۔ $س_{ن} = س_{ص} - ع$، جہاں ع = (ن + ۱) ویں رقم سے شروع کرکے لاتناہی تک حاصل جمع + بہ آسانی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ دفعہ ۳۲۵ کے نتیجہ سے مطابقت کرتا ہے۔

۱۳۔ $(۲ن+۱)^{۲} + \frac{۲}{۳}(۲^{۲ن+۱}+۱)$

امثلہ نمبری ۲۵ (ا) (صفحات ۱۲۹ تا ۱۳۱)

۱۔ $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۱۳}{۶}$، $\frac{۱۵}{۷}$، $\frac{۱۸}{۱۳}$، $\frac{۳۲۳}{۱۵۰}$، $\frac{۶۷۴}{۳۱۳}$

۲۔ $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۵}$، $\frac{۷}{۱۷}$، $\frac{۹}{۲۲}$، $\frac{۴۳}{۱۰۵}$، $\frac{۹۵}{۲۳۲}$، $\frac{۶۱۳}{۱۴۹۷}$

۳۔ $\frac{۳}{۱}$، $\frac{۱۰}{۳}$، $\frac{۱۳}{۴}$، $\frac{۳۶}{۱۱}$، $\frac{۸۵}{۲۶}$، $\frac{۱۲۱}{۳۷}$، $\frac{۱۱۷۴}{۳۵۹}$

۴۔ $۱ + \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{۲}$ ؛ $\frac{۱۶}{۱۳}$

۵۔ $۵ + \frac{۱}{+۴}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{۳}$ ؛ $\frac{۱۵۷}{۳۰}$

۶۔ $\frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{۳}$ ؛ $\frac{۳۳}{۱۰۹}$

۷۔ $\frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۵}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۳}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{۵}$ ؛ $\frac{۱۱}{۴۵}$

۸۔ $\frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۲}\ \frac{۱}{+۱}\ \frac{۱}{۳}$ ؛ $\frac{۷}{۹}$

۹- $۱ + \frac{۱}{۷+}\ \frac{۱}{۵+}\ \frac{۱}{۶+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۳}$ ؛ $\frac{۲۵۴}{۲۲۳}$

۱۰- $\frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۶+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۲+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱۰}$ ؛ $\frac{۶۳}{۲۰۸}$

۱۱- $۴ + \frac{۱}{۳+}\ \frac{۱}{۶+}\ \frac{۱}{۳}$ ؛ $\frac{۲۵۹}{۶۰}$

۱۳- $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۷}{۲۹}$ ، $\frac{۸}{۳۳}$ ، $\frac{۳۹}{۱۶۱}$ ، $\frac{۴۷}{۱۹۴}$

۱۴- $ن - ۱ + \frac{۱}{(ن+۱)+}\ \frac{۱}{(ن-۱)+}\ \frac{۱}{ن+۱}$ ؛ اور پہلے تین مستدق

$\frac{ن-۱}{۱}$ ، $\frac{ن^۲}{ن+۱}$ ، $\frac{ن^۳ - ن^۲ + ن - ۱}{ن^۲}$ ہیں۔

امثلہ نمبری ۲۵ (ب) (صفحات ۱۳۷ تا ۱۴۱)

۱- $\frac{۱}{(۲۰۳)^۲}$ اور $\frac{۱}{۲(۱۲۵)^۲}$　　۲- $\frac{۱۵۱}{۱۱۵}$

۴- $\frac{۱}{ا+}\ \frac{۱}{(ا+۱)+}\ \frac{۱}{(ا+۲)+}\ \frac{۱}{ا+۳}$ ؛ $\frac{ا^۲ + ۳ا + ۳}{ا^۳ + ۳ا^۲ + ۴ا + ۲}$

امثلہ نمبری ۲۶ (صفحات ۱۵۲ تا ۱۵۴)

۱- لا = ۷۱۱ د + ۱۰۰ اور ما = ۷۷۵ د + ۱۰۹ ؛

لا = ۱۰۰ اور ما = ۱۰۹

۲- لا = ۵۱۹ د = ۷۳ اور ما = ۴۵۵ د − ۶۴ ؛

لا = ۴۶۴ اور ما = ۳۹۱

۳- لا = ۲۹۳ د+۳۲۰ اور ما= ۳۳۶ د + ۳۵۵؛
لا = ۳۲۰ اور ما = ۳۵۵

۴- چار ۵- سات ۶- $\frac{۵}{۷}$، $\frac{۴}{۹}$

۷- $\frac{۵}{۱۲}$، $\frac{۳}{۸}$؛ $\frac{۱۱}{۱۲}$، $\frac{۷}{۸}$؛ یا $\frac{۱}{۸}$، $\frac{۱}{۱۲}$؛ $\frac{۵}{۸}$، $\frac{۷}{۱۲}$

۸- ۶ پونڈ ۱۳ شلنگ ۹- لا = ۹، ما = ۸، ی = ۳

۱۰- لا = ۵، ما = ۶، ی = ۷ ۱۱- لا = ۴، ما = ۲، ی = ۷

۱۲- لا = ۲، ما = ۹، ی = ۰

۱۳- لا = ۳، ۷، ۲، ۶، ۱؛ ما = ۱۱، ۴، ۸، ۱، ۵؛ ی = ۱، ۱، ۲، ۲، ۳

۱۴- لا = ۱، ۳، ۲؛ ما = ۵، ۱، ۳؛ ی = ۲، ۴، ۳

۱۵- ۲۸۰ د + ۹۳ ۱۶- ۱۸۱، ۴۱۲

۱۷- عشری ۲۴۸، سبعی ۵۰۳، تسعی ۳۰۵

۱۸- ا = ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۴، ۳؛ ب = ۶۶، ۳۰، ۱۸، ۱۲، ۶، ۳، ۲

۱۹- کسی سرے سے شروع کرکے ایک سوساتواں اور ایک سو چوتھا نشان۔

۲۰- پہلی دفعہ کے علاوہ ۵۰، ۴۱، ۳۵ دفعہ بجا۔

۲۱- ۴۲۵ ۲۲- ۸۹۹ ۲۳- ۱۸۲۹ اور ۱۳۶۳

امثلہ نمبری ۲۷ (ا) (صفحات ۱۵۸ تا ۱۶۰)

۱- ۱ + $\frac{۱}{+۱}$ $\frac{۱}{+۲}$ ......؛ $\frac{۲۶}{۱۵}$ ۲- ۲ + $\frac{۱}{+۴}$ ....؛ $\frac{۲۸۸۹}{۱۲۹۲}$

۳- $2 + \frac{1}{+3}\,\frac{1}{+4}\cdots\cdots$ ؛ $\frac{385}{198}$ ۴- $2 + \frac{1}{+1}\,\frac{1}{+4}\cdots$ ؛ $\frac{99}{35}$

۵- $3 + \frac{1}{+3}\,\frac{1}{+6}\cdots\cdots$ ؛ $\frac{3960}{1197}$

۶- $3 + \frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+6}\cdots\cdots$ ؛ $\frac{119}{33}$

۷- $3 + \frac{1}{+1}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+6}\cdots\cdots$ ؛ $\frac{116}{31}$

۸- $4 + \frac{1}{+1}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+3}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+8}\cdots$ ؛ $\frac{197}{42}$

۹- $3 + \frac{1}{+2}\,\frac{1}{+6}\cdots$ ؛ $\frac{1351}{390}$ ۱۰- $5 + \frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+10}\cdots$ ؛ $\frac{198}{35}$

۱۱- $6 + \frac{1}{+1}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+12}$ ؛ $\frac{161}{24}$

۱۲- $12 + \frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+5}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+24}$ ؛ $\frac{253}{20}$

۱۳- $\frac{1}{+4}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+8}\cdots\cdots$ ؛ $\frac{12}{55}$

۱۴- $\frac{1}{+5}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+10}\cdots$ ؛ $\frac{47}{260}$ ۱۵- $1 + \frac{1}{+10}\,\frac{1}{+2}\cdots$ ؛ $\frac{5291}{4830}$

۱۶- $\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+16}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+3}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+3}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+16}\cdots$ ؛ $\frac{280}{351}$

۱۷- $\frac{1}{(65)^2}$ اور $\frac{1}{3(528)^2}$ ۱۸- $\frac{1}{(191)^2}$ اور $\frac{1}{2(240)^2}$

۱۹- $\frac{4030}{401}$ ۲۰- $\frac{1970}{433}$ ۲۱- $\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+2}\cdots\cdots$

۲۲- $4 + \frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+4}\cdots$ ۲۳- $1 + \frac{1}{+2}\,\frac{1}{+3}\,\frac{1}{+1}\cdots\cdots$

۲۴- $4 + \frac{1}{+2}\,\frac{1}{+3}\cdots\cdots$ ، $\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+3}\,\frac{1}{+3}\,\frac{1}{+3}\cdots$ ۲۵- $\sqrt{107}$

۲۶- $لا^2 + 3لا - 3 = 0$ کی مثبت اصل

۲۷- $3لا^2 - 10لا - 4 = 0$ کی مثبت اصل ۲۸- ۴ $\sqrt{21}$ ۳۰- $\frac{1}{2}$

امثلہ نمبری ۲۷ (ب) (صفحات ۱۷۰ تا ۱۷۳)

۱- $ر + \frac{۱}{۲ر +}\;\frac{۱}{۲ر +}\;\frac{۱}{۲ر +}\cdots$ ، $\frac{۸ر^۴ + ۸ر^۲ + ۱}{۸ر^۳ + ۴ر}$

۲- $ر - ۱ + \frac{۱}{۲ +}\;\frac{۱}{۲(ر-۱) +}\;\frac{۱}{۲ +}\;\frac{۱}{۲(ر-۱) +}\cdots$ ؛ $\frac{۸ر^۲ - ۸ر + ۱}{۸ر - ۴}$

۳- $ر - ۱ + \frac{۱}{۱ +}\;\frac{۱}{۲(ر-۱) +}\;\frac{۱}{۱ +}\;\frac{۱}{۲(ر-۱) +}\cdots$ ؛ $\frac{۲ر^۲ - ۱}{۲ر}$

۴- $۱ + \frac{۱}{۲ر +}\;\frac{۱}{۲ +}\;\frac{۱}{۲ر +}\;\frac{۱}{۲ +}\cdots$ ؛ $\frac{۸ر^۲ + ۸ر + ۱}{۸ر^۲ + ۴ر}$

۵- $ر + \frac{۱}{ب +}\;\frac{۱}{۲ر +}\;\frac{۱}{ب +}\;\frac{۱}{۲ر +}\cdots$ ؛ $\frac{۲ر^۲ب^۲ + ۴رب + ۱}{۲رب^۲ + ۲ب}$

۶- $ر - ۱ + \frac{۱}{۱ +}\;\frac{۱}{۲(ن-۱) +}\;\frac{۱}{۱ +}\;\frac{۱}{۲(ر-۱) +}\cdots$ ؛ $\frac{۲ر(ن) - ۱}{۲(ن)}$

۷- $\frac{۴۳۲ر^۵ + ۱۸۰ر^۳ + ۱۵ر}{۱۴۴ر^۴ + ۳۶ر^۲ + ۱}$

امثلہ نمبری ۲۸- صفحات (۱۸۷ تا ۱۹۰)

۱- لا = ۷ یا ۱، ما = ۴؛ لا = ۷ یا ۵، ما = ۶ ۲- لا = ۲، ما ۔
۳- لا = ۲، ما = ۱، ۱۱؛ لا = ۷، ما = ۹، ۱۹؛ لا = ۱۰، ما = ۱۸، ۲۲
۴- لا = ۲، ۳، ۶، ۱۱؛ ما = ۱۲، ۷، ۴، ۳ ۵- لا = ۳، ۲؛ ما = ۱، ۴
۶- لا = ۶۹، ۲۷، ۱۶، ۱۳، ۱۱، ۹؛ ما = ۱۵۰، ۵۱، ۲۹، ۱۹، ۱۳، ۳
۷- لا = ۱۵، ما = ۴ ۸- لا = ۱۷۰، ما = ۲۹
۹- لا = ۳۲، ما = ۵ ۱۰- لا = ۱۶۴، ما = ۲۱ ۱۱- لا = م، ما = ۱
۱۲- ۲لا = $(۲ + \sqrt{۳})^ن + (۲ - \sqrt{۳})^ن$؛ ۲$\sqrt{۳}$ × ما = $(۲ + \sqrt{۳})^ن$ - $(۲ - \sqrt{۳})^ن$ جبکہ ن ایک صحیح عدد ہے۔

۱۳- $۲لا = (۲+\sqrt{۵})^{ن} + (۲-\sqrt{۵})^{ن}$ ؛ $۲\sqrt{۵} \times ما = (۲+\sqrt{۵})^{ن} - (۲-\sqrt{۵})^{ن}$

جبکہ ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۴- $۲لا = (۴+\sqrt{۱۷})^{ن} + (۴-\sqrt{۱۷})^{ن}$ ؛ $۲\sqrt{۱۷} \times ما = (۴+\sqrt{۱۷})^{ن} - (۴-\sqrt{۱۷})^{ن}$ جبکہ ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہے۔

سوالات ۱۵ تا ۱۷ اور ۱۹ اور ۲۰ کے جوابات مساوات کی دونوں طرفوں کے جزوِ ضربی کے طریقے کے مطابق تغیر پذیر ہونگے۔

۱۵- $لا = م^{۲} - ۳ن^{۲}$، $ما = م^{۲} - ۲م ن$

۱۶- $لا = -م^{۲} + ۲م ن + ن^{۲}$ ؛ $ما = م^{۲} - ن^{۲}$

۱۷- $لا = ۲م ن$، $ما = ۵م^{۲} - ن^{۲}$

۱۸- ۵۳، ۵۲، ۱۹، ۱۲؛ ۱۳، ۸؛ ۱۱، ۴

۱۹- $م^{۲} - ن^{۲}$ ؛ $۲م ن$ ؛ $م^{۲} + ن^{۲}$　۲۰- $م^{۲} - ن^{۲}$ ؛ $۲م ن + ن^{۲}$

۲۱- دیوی دیال کی بیوی مچھمی؛ متھرا داس کی کیسری؛ رام گوپال کی بسنتی

امثلہ نمبری ۲۹ (ا) (صفحات ۲۰۶ تا ۲۰۷)

۱- $\frac{۱}{۴} ن (ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)$

۲- $\frac{۱}{۵} ن (ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(ن+۴)$

۳- $\frac{۱}{۱۲} (۳ن-۲)(۳ن+۱)(۳ن+۴)(۳ن+۷) + \frac{۵۶}{۱۲} =$

$\frac{ن}{۴} (۲۷ن^{۳} + ۹۰ن^{۲} + ۴۵ن - ۵۰)$

۴- $\frac{ن}{۴} (ن+۱)(ن+۶)(ن+۷)$

۵- $\frac{ن}{۴} (ن+۱)(ن+۸)(ن+۹)$

۶- $\frac{ن}{ن+۱}$ ؛ ۱ ۷- $\frac{ن}{۳ن+۱}$ ؛ $\frac{۱}{۳}$ ۸- $\frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۴(۲ن+۱)(۲ن+۳)}$ ؛ $\frac{۱}{۱۲}$

۹- $\frac{۱}{۲۴} - \frac{۱}{۶(۳ن+۱)(۳ن+۴)}$ ؛ $\frac{۱}{۲۴}$ ۱۰- $\frac{۵}{۴} - \frac{۲ن+۵}{۲(ن+۱)(ن+۲)}$ ؛ $\frac{۵}{۴}$

۱۱- $\frac{۱}{۶} - \frac{۱}{ن+۲} + \frac{۲}{(ن+۳)(ن+۴)}$ ؛ $\frac{۱}{۶}$

۱۲- $\frac{۳}{۴} - \frac{۲}{ن+۲} + \frac{۱}{۲(ن+۱)(ن+۲)}$ ؛ $\frac{۳}{۴}$

۱۳- $\frac{ن}{۱۰}(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(۲ن+۳)$

۱۴- $\frac{۱}{۴}ن^۲(ن^۲-۱)$ ۱۵- $\frac{ن}{۱۰}(ن-۱)(ن+۱)(ن+۲)(۲ن+۱)$

۱۶- $\frac{۱}{۱۵}(ن+۱)(ن+۲)(۳ن^۳+۳۶ن^۲+۱۵۱ن+۲۴)-۳۲$

۱۷- $\frac{(ن-۱)ن(ن+۱)(ن+۲)}{۶(۲ن+۱)}$ ۱۸- $\frac{ن(ن+۱)(ن+۲)}{۳} - \frac{ن}{ن+۱}$

۱۹- $\frac{ن(ن+۳)}{۲} + \frac{۳}{۲} - \frac{۲}{ن+۲} - \frac{۱}{(ن+۱)(ن+۲)}$

۲۰- $ن + ۱ - \frac{۱}{ن+۱}$

امثلہ نمبری ۲۹ (ب) (صفحات ۲۲۵ تا ۲۲۷)

۱- $۳ن^۲ + ن$ ؛ $ن(ن+۱)^۲$ ۲- $۵ن^۲ + ۲ن$ ؛ $\frac{۱}{۴}ن(ن+۱)(۵ن+۷)$

۳- $ن^۲(ن+۱)$ ؛ $\frac{۱}{۱۲}ن(ن+۱)(ن+۲)(۳ن+۱)$

۴- $۴ن^۲(ن-۳)$ ؛ $-ن(ن+۱)(ن^۲-۳ن-۲)$

۵- $ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)$ ؛ $\frac{۱}{۲۰}ن(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)(۴ن+۲۱)$

۶- $\frac{۱+\text{لا}^{۲}}{(۱-\text{لا})^{۳}}$ ۷- $\frac{۱-\text{لا}+۴\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}^{۳}}{(۱-\text{لا})^{۳}}$ ۸- $\frac{۲-\text{لا}+\text{لا}^{۲}}{(۱-\text{لا})^{۳}}$

۹- $\frac{۱-\text{لا}}{(۱+\text{لا})^{۳}}$ ۱۰- $\frac{۱+۱۱\text{لا}+۱۱\text{لا}^{۲}+\text{لا}^{۳}}{(۱-\text{لا})^{۵}}$ ۱۱- $\frac{۹}{۴}$

۱۲- $\frac{۲۵}{۵۴}$ ۱۳- $۳\times۲^{\text{ن}}+\text{ن}+۲$ ؛ $۶(۲^{\text{ن}}-۱)+\frac{\text{ن}(\text{ن}+۵)}{۲}$

۱۴- $\text{ن}^{۳}-(\text{ن}+۱)^{۲}$ ؛ $\frac{\text{ن}}{۱۲}(۳\text{ن}^{۳}+۲\text{ن}^{۲}-۱۵\text{ن}-۲۶)$

۱۵- $۳^{\text{ن}-۱}+\text{ن}$ ؛ $\frac{۳^{\text{ن}}+\text{ن}^{۲}+\text{ن}-۱}{۲}$

۱۶- $۲^{\text{ن}+۱}-\text{ن}^{۲}-۲\text{ن}$ ؛ $۲^{\text{ن}+۲}-۴-\frac{۱}{۶}\text{ن}(\text{ن}+۱)(۲\text{ن}+۷)$

۱۷- $۳^{\text{ن}}-۱+\frac{۱}{۲}\text{ن}(\text{ن}+۳)$ ؛ $\frac{۱}{۲}(۳^{\text{ن}+۱}-۳)+\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۵)}{۶}-\text{ن}$

۱۸- $\frac{۱-\text{لا}^{\text{ن}}}{(۱-\text{لا})^{۲}}-\frac{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{۱-\text{لا}}$ ۱۹- $\frac{۱-\text{لا}^{\text{ن}}}{(۱-\text{لا})^{۳}}-\frac{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{(۱-\text{لا})^{۲}}-\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)\text{لا}^{\text{ن}}}{۲(۱-\text{لا})}$

۲۰- $۱-\frac{۱}{\text{ن}+۱}\times\frac{۱}{۲^{\text{ن}}}$ ۲۱- $\frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+۲}\times\frac{۲^{\text{ن}+۱}}{۴}+\frac{۱}{۲}$

۲۲- $\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(۳\text{ن}^{۳}+۲۷\text{ن}^{۲}+۵۸\text{ن}+۲)}{۱۵}$

۲۳- $\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(۱۲\text{ن}^{۳}+۳۳\text{ن}^{۲}+۳۷\text{ن}+۸)}{۶۰}$

۲۴- $\frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(۹\text{ن}^{۲}+۱۳\text{ن}+۸)}{۱۲}$

۲۵- $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱\times۳\times۵\times۷\cdots(۲\text{ن}+۱)}$ ۲۶- $۱-\frac{۲^{\text{ن}+۱}}{\text{ن}+۲}$

۲۷- $(\text{ن}^{۲}-\text{ن}+۴)۲^{\text{ن}}-۴$ ۲۸- $(\text{ن}-۱)۳^{\text{ن}+۱}+۳$

۲۹- $\frac{۱}{۲}-\frac{۱\times۳\times۵\cdots(۲\text{ن}+۱)}{۲\times۴\times۶\cdots(۲\text{ن}+۲)}$ ۳۰- $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+۱}\times۲^{\text{ن}}$

۳۱- $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{2(ن+1)(ن+2)}$ × $\frac{1}{3^ن}$ ۳۲- $\frac{1}{2}$ - $\frac{ن+1}{ن+2}$

۳۳- ۱- $\frac{ن+4}{(ن+1)(ن+2)}$ × $\frac{1}{2^{ن+1}}$

امثلہ نمبری ۲۹ (ج) (صفحات ۲۳۲ تا ۲۳۹)

۱- $\frac{1}{2}$ (و^لا - و^-لا) - لا ۲- ۱ + $\frac{1-لا}{لا}$ لوک (۱-لا)

۳- $\frac{1}{4}$ (و^لا - و^-لا - خ و^خ لا + خ و^-خ لا)

۴- $\frac{1}{(ر-1)(ر-2)}$ ۵- (۱ + لا) و^لا - ۶- $\frac{(ف+ق)^ر}{ر}$

۷- ۱ ۸- ن (۲ن - ۱) ۹- صفر ۱۰- ۴

۱۱- لوک ۲ - $\frac{1}{2}$ ۱۲- ۲ (و-۱) ۱۳- و^لا - لوک (۱ + لا)

۱۴- (۱) $\frac{ن^7}{7}$ + $\frac{ن^6}{2}$ + $\frac{ن^6}{2}$ - $\frac{ن^5}{2}$ + $\frac{ن^3}{6}$ + $\frac{ن}{42}$

(۲) $\frac{ن^8}{8}$ + $\frac{ن^7}{2}$ + $\frac{7ن^6}{12}$ - $\frac{7ن^4}{24}$ + $\frac{ن^2}{12}$

۲۵- ۱۵ و ۱۷- (۱) ن + ۱

۱۹- (۱) $\frac{1}{2}$ (۱ - $\frac{1}{ن+1}$)؛ (۲) ۳ - $\frac{2 + (-1)^ن}{ن+1}$

۲۰- $\frac{(1+لا)^2}{2لا^2}$ لوک (۱ + لا) - $\frac{3لا + 2}{4لا}$

۲۱- ن (ن + ۱) $2^{ن-3}$

۲۲- (۱) $\frac{1}{2}$ {۱ + $\frac{(-1)^{ن+1}}{2^{ن+1} + (-1)^{ن+1}}$} (۲) $\frac{1}{2}$ {$\frac{3}{2}$ + (۱-)$^{ن+1}$ $\frac{2ن + 3}{(ن+1)(ن+2)}$}

امثلہ نمبری ۳۰ (ا) (صفحات ۲۵۲ تا ۲۵۵)

۱- ۳، ۶، ۱۵، ۴۲ ۲- ۱۶۱۷، ۱۸۰، ۱۸۵۹، ۶- ۴۸

۷- ۲۳ ۳۳- ۸۹۸۷

امثلہ نمبری ۳۰ (ب) (صفحات ۲۶۸ تا ۲۷۱)

۲۰- لا = ۱۳۹ د + ۶۱ جہاں د ایک صحیح عدد ہے۔

امثلہ نمبری ۳۱ (ا) (صفحات ۲۸۶ تا ۲۸۹)

۲- ۱ + $\frac{۱}{-لا}$ $\frac{۱}{+۴}$ $\frac{۱}{لا}$ ۱۸- ۱؛ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ل ن = ۱ + ن ق

امثلہ نمبری ۳۲ (ا) (صفحات ۳۰۰ تا ۳۰۱)

۱- (۱) $\frac{۱}{۹}$ ؛ (۲) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲- $\frac{۸}{۶۶۳}$ ۳- $\frac{۱}{۵۴}$ ۴- $\frac{۳}{۸}$

۵- ۲ تا ۳ ۶- $\frac{۴}{۲۷۰۷۲۵}$ ۸- ۴۳ تا ۴۴ ۹- ۳۶ : ۳۰ : ۲۵

۱۰- $\frac{۲۱۹۷}{۲۰۸۲۵}$ ۱۱- ۹۵۲ تا ۷۱۵ ۱۴- $\frac{۱}{۶}$ ۱۵- $\frac{۲}{۷}$

۱۶- $\frac{۱۱}{۴۱۶۵}$ ۱۷- $\frac{ن (ن-۱)}{(م+ن)(م+ن-۱)}$

امثلہ نمبری ۳۲ (ب) (صفحات ۳۱۲ تا ۳۱۵)

۱- $\frac{۵}{۳۶}$ ۲- $\frac{۱۶}{۵۵۲۵}$ ۳- $\frac{۵۲}{۷۷}$ ۴- $\frac{۱۶}{۲۱}$ ۵- $\frac{۸}{۱۵}$

۶- $\frac{۷۲}{۲۸۹}$ ۷- (۱) $\frac{۲۱۹۷}{۲۰۸۲۵}$ ؛ (۲) $\frac{۲۸۱۶}{۴۱۶۵}$ ۸- $\frac{۴۶۵۱}{۷۷۷۶}$

۹- $\frac{۲۰۹}{۳۴۴}$ ۱۰- $\frac{۱}{۷}$ ۱۱- $\frac{۹۱}{۲۱۶}$ ۱۳- $\frac{۱۰}{۱۹}$ ۱۴- $\frac{۶۳}{۲۵۶}$

۱۵- $\frac{۱}{۳۲}$ ۱۶- $\frac{۱۶}{۳۶}$، $\frac{۱۲}{۳۶}$، $\frac{۹}{۳۶}$ ۱۷- $\frac{۲۲}{۳۵}$، $\frac{۱۳}{۳۵}$

۱۸- ن-۳ تا ۲ ۱۹- ۱۳ تا ۵ ۲۰- $\frac{۴۵۹۲۷}{۵۰۰۰۰}$

امثلہ نمبری ۳۲ (ج) (صفحات ۳۲۳ تا ۳۲۶)

۱- $\frac{۲۱۳۳}{۳۱۲۵}$ ۲- $\frac{۵}{۱۶}$ ۳- $\frac{۴}{۹}$ ۴- فلارن ۵- $\frac{۱}{۲}$

۶- ۱۷ شلنگ ۲$\frac{۲}{۵}$ پنس ۷- $\frac{۴}{۶۳}$ ۸- $\frac{۷}{۲۷}$ ۹- ۱۱ تا ۵

۱۰- $\frac{۱}{۸}$ ۱۱- (ا) ۵ پونڈ؛ (ب) ۱۱ پونڈ ۱۲- $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۱۳- ۴$\frac{۴}{۵}$ شلنگ

۱۴- (۱) $\frac{۲۵۰}{۷۷۷۶}$ ؛ (۲) $\frac{۲۷۶}{۷۷۷۶}$ ۱۵- ۴ پنس ۱۶- $\frac{۳}{۴}$

۱۷- م + $\frac{۱}{۲}$ م

امثلہ نمبری ۳۲ (د) صفحات ۳۳۸ تا ۳۴۱

۱- $\frac{۲}{۵}$ ۲- $\frac{۱}{۳۵}$ ۳- $\frac{۱۲}{۱۷}$ ۴- ب $\frac{۲}{۵}$ ؛ ج $\frac{۴}{۱۵}$

۵- $\frac{۲}{ن(ن+۱)}$ ۶- $\frac{۳۲}{۴۱}$ ۷- $\frac{۳۷۷}{۵۵۰}$ ۸- ۲ شلنگ ۳ پنس

۹- $\frac{۱}{۵}$ ۱۰- $\frac{۱}{۳}$ ۱۱- $\frac{۴۰}{۴۱}$ ۱۲- $\frac{۱۱}{۵۰}$ ۱۳- ۱ پونڈ

۱۴- (۱) $\frac{۳}{۵}$ ؛ (۲) $\frac{۷}{۸}$ ۱۵- ۸ پونڈ ۱۷- $\frac{ن-۱}{م ن-۱}$، $\frac{ن-۱}{م ن-(ن-۱)}$

۱۸- $\frac{۱۳}{۱۴}$

امثلہ نمبری ۳۲ (ر) (صفحات ۳۵۰ تا ۳۵۶)

۱- ۷ تا ۵ ۲- $\frac{۱}{۱۲۶}$ ۳- $\frac{۱۲۳۹۳}{۱۲۵۰۰}$ ۵- $\frac{۲۶۵}{۵۰۴}$

۶- ۱ : $\frac{۵}{۹}$: $(\frac{۵}{۹})^۲$: $(\frac{۵}{۹})^۳$ ۷- $\frac{۱۶}{۲۱}$

۸- ۶ ؛ ہر ایک $\frac{۱}{۹}$ کے برابر ۹- $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۱۰- $\frac{۳۲۳}{۱۹۹۵}$ ۱۱- ۱۱ تا ۵

۱۳- ا ؛ $\frac{۱۶۹}{۳۲۴}$ ب $\frac{۱۵۵}{۳۲۴}$ ۱۴- $\frac{۱}{۷}$ ، $\frac{۴}{۲۱}$ ۱۶- $\frac{۲۵}{۲۱۶}$

۱۷- $\frac{۱۴۹}{۲۴۰۱}$ ۱۸- $\frac{۳۳}{۱۰۰۰}$ ، $\frac{۱}{۶۰}$ ۲۰- ایک گنی Guinea

۲۲- $\frac{۱۴۰}{۱۴۱}$ ۲۳- $\frac{ن(ن+۱)}{۲}$ شلنگ ۲۶- ۱۵ تا ۱

۲۸- $\frac{۱}{۴}$ ۲۹- $\frac{۱}{۴}$ ۳۰- $\frac{۱۲۶۵}{۱۲۸۶}$ ؛ $\frac{۵۰۸۷}{۵۱۴۴}$ پونڈ

۳۱- $(\frac{ا-ب}{ا})^۲$ ۳۲- اگر ب > $\frac{ا}{۲}$ تو احتمال ۱-۳ $(\frac{ا-ب}{ا})^۲$ ہے

اگر ب < $\frac{ا}{۲}$ تو احتمال $(\frac{۳ب-ا}{ا})^۲$ ہے۔

امثلہ نمبری ۳۳ (ا) (صفحات ۳۷۲ تا ۳۷۶)

۱- ۷ ۲- صفر ۳- ۱

۴- ابج + ۲ ف گ ھ - ا ف^۲ - ب گ^۲ - ج ھ^۲

۵- ۱ + لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ ۶- لاما ۷- صفر ۸- ۴ ابج

۹- صفر ۱۰- ۳ ۱۱- ۳ ابج - ا^۳ - ب^۳ - ج^۳ = ۰

۱۳- (۱) لا = ا یا ب ؛ (۲) لا = ۴

۲۰- $\begin{vmatrix} ب^2+ج^2 & اب & اج \\ با & ج^2+ا^2 & بج \\ جا & جب & ا^2+ب^2 \end{vmatrix}$

۲۲- $لہ^3 (لہ + ا^2 + ب^2 + ج^2)$

۲۶- مقطعہ $\begin{vmatrix} ا^2 & ا & ۱ \\ ب^2 & ب & ۱ \\ ج^2 & ج & ۱ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۱ & ۲-لا & لا^2 \\ ۱ & ۲-ما & ما^2 \\ ۱ & ۲-ی & ی^2 \end{vmatrix}$ کے برابر ہے

۲۷- $\begin{vmatrix} ا & جَ & بَ \\ جَ & ب & اَ \\ بَ & اَ & ج \end{vmatrix} = ۰$ ۲۸- $\begin{vmatrix} ا & جَ & بَ \\ جَ & ب & اَ \\ بَ & اَ & ج \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} ا & جَ & بَ & عہ \\ جَ & ب & اَ & بہ \\ بَ & اَ & ج & جہ \\ عہ & بہ & جہ & ۰ \end{vmatrix}$

امثلہ نمبری ۳۳ (ب) (صفحات ۳۸۴-۳۸۷)

۱- ۱ ۲- صفر؛ جمع کرو پہلی اور دوسری قطار اور تیسری اور چوتھی قطار -

۳- $(ا+۳)(ا-۱)^3$ ۴- $ا^2 + ب^2 + ج^2 - ۲ب ج - ۲ج ا - ۲اب$

۵- ۶؛ پہلے ستون میں سے تیسرا ستون ۳ دفعہ تفریق کرو، دوسرے ستون میں سے تیسرا ستون ۲ دفعہ تفریق کرو، اور چوتھے میں سے تیسرا چار دفعہ تفریق کرو۔

۶- $ا ب ج د \left(۱ + \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} + \frac{۱}{د}\right)$

۷- $-(لا + ما + ی)(ما + ی - لا)(ی + لا - ما)(لا + ما - ی)$

۸- $(ا لا - ب ما + ج ی)^2$ ۹- $ا^3$

۱۲- لا = (ک - ب) (ک - ج) / (ا - ب) (ا - ج) ؛ وغیرہ ۱۳- لا = ک (ک - ب) (ک - ج) / ا (ا - ب) (ا - ج) ؛ وغیرہ

۱۴- لا = (ک - ب) (ک - ج) (ک - د) / (ا - ب) (ا - ج) (ا - د) ؛ وغیرہ

امثلہ نمبری ۳۴ (ا) (صفحات ۱۰۴۱ تا ۱۰۴۴)

۱- −۱۰۲ ۲- ۳ا + ب = ۲۷

۳- لا^{۳} − ۲لا^{۲} + لا + ۱ ؛ ۱۵لا + ۱۱

۴- ا = ۳ ۵- لا$^{-۴}$ + ۵لا$^{-۵}$ + ۱۸لا$^{-۶}$ + ۴۵لا$^{-۷}$ ؛
۱۲۰لا$^{-۴}$ − ۳۵۶لا$^{-۵}$ + ۹۰لا$^{-۶}$ + ۴۳۲لا$^{-۷}$

۶- (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (ا + ب + ج)

۷- −(ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)

۸- ۲۴ ا ب ج ۹- (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)

۱۰- (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲} + ب ج + ج ا + ا ب)

۱۱- ۳ ا ب ج (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)

۱۲- ۲ ا ب ج (ا + ب + ج) ۱۳- ۸۰ ا ب ج (ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲})

۱۴- ۳ (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب) (لا - ا) (لا - ب) (لا - ج)

۲۸- لا / (لا - ا) (لا - ب) (لا - ج) ۲۹- ۲

۳۰- $\dfrac{(\text{ف}-\text{لا})(\text{ق}-\text{لا})}{(\text{ا}+\text{لا})(\text{ب}+\text{لا})(\text{ج}+\text{لا})}$ ۳۱- -1 ۳۲- $\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}+\text{د}$

اشلہ نمبری ۳۴ (ب) (صفحات ۴۰۸ تا ۴۱۰)

۵ صفر ۷- $\text{لا} = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ا}\,\text{ما}$، $\text{ما} = \text{ب}\,\text{لا} - \text{ا}\,\text{ما}$

۲۸- $(\text{ا}^2+\text{ب}\,\text{ج})(\text{ب}^2+\text{ج}\,\text{ا})(\text{ج}^2+\text{ا}\,\text{ب})$

اشلہ نمبری ۳۴ (ج) (صفحات ۴۱۰ تا ۴۱۹)

۱- $\text{لا}^2+\text{لا}\,\text{ما}^2+\text{ا}\,\text{ما}^2=0$ ۲- $\text{لا}+\text{ا}=0$ ۳- $\text{لا}^2+\text{ما}^2=\text{ا}^2$

۴- $\text{ما}^2=\text{ا}(\text{لا}-3\text{ا})$ ۵- $\text{ا}^2-\text{ا}^3=1$ ۶- $\text{لا}^2+\text{ما}^2=2\text{ا}^2$

۷- $\text{ب}^2\text{ج}^2+\text{ج}^2\text{ا}^2+\text{ا}^2\text{ب}^2=\text{ا}^2\text{ب}^2\text{ج}^2$

۸- $\text{ما}^2-4\text{ا}\,\text{لا}=\text{ک}^2(\text{لا}+\text{ا})^2$ ۹- $\text{ا}^2-4\text{ا}\,\text{ج}^3+3\text{ب}^3=0$

۱۰- $\text{ا}^4-2\text{ا}^2\text{ب}^2-\text{ب}^4+2\text{ج}^4=0$

۱۱- $\dfrac{\text{ا}}{1+\text{ا}}+\dfrac{\text{ب}}{1+\text{ب}}+\dfrac{\text{ج}}{1+\text{ج}}+\dfrac{\text{د}}{1+\text{د}}=1$

۱۲- $5\,\text{ا}^2\text{ب}^3=6\,\text{ج}^5$ ۱۳- $\text{ا}\,\text{ب}=1+\text{ج}$

۱۴- $\text{ا}^3+\text{ب}^3+\text{ج}^3+\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}=0$ ۱۵- $(\text{ا}+\text{ب})^{\frac{2}{3}}-(\text{ا}-\text{ب})^{\frac{2}{3}}=4\,\text{ج}^{\frac{2}{3}}$

۱۶- $\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2\pm2\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}=1$ ۱۷- $\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}=(4-\text{ا}-\text{ب}-\text{ج})^2$

۱۸- $\text{ا}^3-4\,\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ج}+\text{ا}\,\text{ج}^3+4\,\text{ب}^3-\text{ب}^2\text{ج}^2=0$

۲۰- $\text{ج}^2(\text{ا}+\text{ب}-1)^2-\text{ج}(\text{ا}+\text{ب}-1)(\text{ا}^2-2\text{ا}\,\text{ب}+\text{ب}^2-\text{ا}-\text{ب})$
$+\text{ا}\,\text{ب}=0$

۲۲- $$\frac{1}{(\text{ب}-\text{ا})\text{ج}\,\text{ر}+(\text{ا}-\text{ج})\text{ب}\,\text{ق}}+\frac{1}{(\text{ب}-\text{ج})\text{ا}\,\text{ف}+(\text{ا}-\text{ب})\text{ج}\,\text{ر}}$$
$$+\frac{1}{(\text{ج}-\text{ا})\text{ب}\,\text{ق}+(\text{ج}-\text{ب})\text{ا}\,\text{ف}}=\frac{1}{\text{ب}\,\text{ج}\,\text{ق}\,\text{ر}+\text{ج}\,\text{ا}\,\text{ر}\,\text{ف}+\text{ا}\,\text{ب}\,\text{ف}\,\text{ق}}$$

۲۳- | اَب - اَب　　اجَ - اَج　　ادَ - اَد |
| اجَ - اَج　　ادَ - اَد + بجَ = بَج　　بدَ - بَد |
| ادَ - اَد　　بدَ + بَد　　جدَ - جَد | = ۰

امثلہ نمبری ۳۵ (ا) (صفحات ۴۲۷-۴۲۸)

۱- ۶لا^{۴} - ۱۳لا^{۳} - ۱۲لا^{۲} + ۳۹لا - ۱۸ = ۰　۲- لا^{۶} + ۲لا^{۵} - ۱۱لا^{۴} - ۱۲لا^{۳} + ۳۶لا^{۲} = ۰

۳- لا^{۶} - ۵لا^{۵} - ۸لا^{۴} + ۴۰لا^{۳} + ۱۶لا^{۲} - ۸۰لا = ۰

۴- لا^{۴} - ۲(ا^{۲} + ب^{۲})لا^{۲} + (ا^{۲} - ب^{۲})^{۲}　۵- ۱، ۳، ۵، ۷

۶- $\frac{۳}{۲}$، -$\frac{۳}{۲}$، -۴　۷- $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، -۶　۸- ۶، ۲، $\frac{۲}{۳}$

۹- -$\frac{۳}{۲}$، -۲، ۴　۱۰- -$\frac{۳}{۲}$، -$\frac{۳}{۴}$، $\frac{۱}{۳}$

۱۱- ±$\sqrt{۳}$، $\frac{۳}{۴}$، -$\frac{۱}{۲}$　۱۲- $\frac{۸}{۹}$، -$\frac{۲}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$

۱۳- $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۴}$　۱۴- $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۲}$، ۱ ± $\sqrt{۲}$　۱۵- -۴، -۱، ۲، ۵

۱۶- $\frac{۸}{۹}$، $\frac{۴}{۳}$، ۲، ۳　۱۷- -$\frac{۴}{۳}$، -$\frac{۳}{۲}$، -$\frac{۵}{۳}$

۱۸- (۱) $\frac{ق^{۲} - ۲ف ر}{ر^{۲}}$ ؛ (۲) $\frac{ف^{۲} - ۲ق}{ر^{۲}}$

۱۹- (۱) -۶ق ؛ (۲) $\frac{ق}{ر}$　۲۰- -۲ق، -۳ر　۲۱- ۲ق^{۲}

امثلہ نمبری ۳۵ (ب) (صفحات ۴۳۳ تا ۴۳۵)

۱- ۳، -$\frac{۲}{۳}$، $\frac{۱ ± \sqrt{-۳}}{۲}$　۲- -$\frac{۳}{۲}$، -$\frac{۱}{۳}$، ۲ ± $\sqrt{۳}$

۳- ۱ ± $\sqrt{۲}$، -۱ ± $\sqrt{-۱}$　۴- ± $\sqrt{-۱}$، -۲ ± $\sqrt{-۱}$

۵- ۱- ، ± $\sqrt{3}$ ، ۱ ± ۲$\sqrt{-1}$ ۶- لا^{4} - ۲لا^{2} + ۲۵ = ۰

۷- لا^{4} - ۸لا^{2} + ۳۶ = ۰   ۸- لا^{4} + ۱۶ = ۰

۹- لا^{6} - ۱۰لا^{3} + ۱ = ۰   ۱۰- لا^{6} - ۱۰لا^{5} - ۱۹لا^{4} + ۴۸۰لا - ۱۳۹۲ = ۰

۱۱- لا^{5} - ۶لا^{3} + ۸لا^{2} - ۲۶لا + ۲۱ = ۰

۱۲- لا^{8} - ۱۶لا^{6} + ۸۸لا^{4} + ۱۹۲لا^{2} + ۱۴۴ = ۰

۱۳- ایک مثبت، ایک منفی، دو خیالی [مقابلہ کرو دفعہ ۵۵۲]

۱۵- ایک مثبت، ایک منفی، کم از کم چار خیالی [مقابلہ کرو دفعہ ۵۵۴]

۱۶- چھ   ۱۷- (۱) ف ق = ر (۲) ف^{3}ر = ق^{3}

۲۰- ق^{2} - ۲ف ر   ۲۱- ف ق - ر   ۲۲- $\frac{\text{ف ق}}{\text{ر}}$ - ۳

۲۳- ف ق - ۳ر   ۲۴- ف ر - ۴س

۲۵- ف^{4} - ۴ف^{2}ق + ۲ق^{2} + ۴ف ر - ۴س

امثلہ نمبری ۳۵ (ج) (۴۴۸ تا ۴۵۰)

۱- لا^{4} - ۶لا^{3} + ۱۵لا^{2} - ۱۲لا + ۱   ۲- لا^{4} - ۳۷لا^{2} - ۱۲۳لا - ۱۱۰

۳- ۲لا^{4} + ۸لا^{3} - لا^{2} - ۸لا - ۲۰   ۴- لا^{4} - ۲۴لا^{2} - ۱

۵- ۱۶ا لا ھ (لا^{6} + ۷لا^{4}ھ^{2} + ۷لا^{2}ھ^{4} + ھ^{6}) + ۲ب ھ (۵لا^{4} + ۱۰لا^{2}ھ^{2} + ھ^{4}) + ۲ج ھ

۱۰- ۲، ۲، -۱، -۳   ۱۱- ۱، ۱، ۱، ۳   ۱۲- ۳، ۳، ۳، ۲، ۲

۱۳- ۲، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

۱۴- $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، -۲ ۱۵- ۱، ۱، ۱، -۱، -۱، ۲

۱۶- $\pm\sqrt{۳}$، $\pm\sqrt{۳}$، $۱ \pm \sqrt{-۱}$ ۱۷- لا، لا، -لا ب

۱۸- $\pm\sqrt{\frac{۲}{۲}}$، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۷}}{۲}$؛ $\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}$، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۲۳}}{۴}$

۱۹- ۰، ۱، $-\frac{۳}{۲}$، $-\frac{۵}{۲}$؛ ۰، ۱، $-\frac{۳}{۲}$، $-\frac{۵}{۲}$

۲۰- $ن^{ن} ر^{ن-۲} = ۲ ف^{ن} (ن-۲)^{ن-۲}$

۲۲- (۱) -۲، (۲) -۱ ۲۷- ۵ ۲۸- ۹۹، ۹۵،

امثلہ نمبری ۳۵ (د) (صفحات ۴۶۱ تا ۴۶۳)

۱- $ما^{۳} - ۲۴ ما^{۲} + ۹ ما - ۲۴ = ۰$

۲- $ما^{۴} - ۵ ما^{۳} + ۳ ما^{۲} - ۹ ما + ۲۷ = ۰$

۳- ۱، ۱، -۲، $-\frac{۱}{۲}$ ۴- $۳ \pm ۲\sqrt{۲}$، $۲ \pm \sqrt{۳}$

۵- ۱، $\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$، $\frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ ۶- ۲، ۲، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}(۱ \pm \sqrt{-۳})$

۷- ۴، ۲، $\frac{۴}{۳}$ ۸- ۶، ۳، ۲ ۱۰- $\frac{۱}{۴}$، ۱، $-\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۱}{۵}$

۱۱- $ما^{۳} - ۲ ما + ۱ = ۰$ ۱۲- $ما^{۳} - ۴ ما^{۲} + ۱ = ۰$

۱۳- $ما^{۵} - ۷ ما^{۳} + ۱۲ ما^{۲} - ۷ ما = ۰$

۱۴- $ما^{۵} - ۶۰ ما^{۴} - ۳۲۰ ما^{۳} - ۷۱۷ ما^{۲} - ۷۷۳ ما - ۴۲ = ۰$

۱۵- $ما^{۳} - \frac{۹ ما^{۲}}{۲} + \frac{۱۳ ما}{۲} - \frac{۱۵}{۴} = ۰$

۱۶- ما^{۵} + ۱۱ما^{۴} + ۴۲ما^{۳} + ۷۵ما^{۲} - ۱۳ما - ۶۰ = ۰

۱۷- ما^{۳} - ۸ما^{۲} + ۱۹ما - ۱۵ = ۰ ۔ ۱۸- ما^{۴} + ۳ما^{۳} + ۴ما^{۲} + ۳ما + ۱ = ۰

۱۹- ما^{۳} + ۲۳ما^{۲} + ۱۲ما + ۸ = ۰ ۔ ۲۰- رما^{۳} + ک ق ما^{۲} + ک^{۳} = ۰

۲۱- ما^{۳} - ق^{۲}ما^{۲} - ۲ق ر^{۲}ما - ر^{۳} = ۰ ۔ ۲۲- رما^{۳} - ق ما^{۲} - ۱ = ۰

۲۳- رما^{۳} + ق(۱-ر)ما^{۲} + (۱-ر)^{۳} = ۰ ۔ ۲۴- ما^{۳} - ۲ق ما^{۲} + ق^{۲}ما + ر^{۲} = ۰

۲۵- ما^{۳} + ۳رما^{۲} + (ق^{۳} + ۳ر^{۲}) ما + ر^{۳} = ۰

۲۶- ر^{۳}ما^{۳} + ۳ر^{۲}ما^{۲} + (۳ر^{۲} + ق^{۳}) رما + ر (ر^{۲} + ۲ق^{۳}) = ۰

۲۸- ± ۱، ± ۲، ۵

اشلہ نمبری ۳۵ (ع) (صفحات ۴۷۶ تا ۴۷۸)

۱- ۵، $\frac{-۵ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

۲- ۱۰، $-۵ \pm ۷\sqrt{-۳}$

۳- ۴، $-۲ \pm ۵\sqrt{-۳}$

۴- -۶، $۳ \pm ۴\sqrt{-۳}$

۵- $-\frac{۱}{۴}$، $\frac{۲ \pm \sqrt{-۳}}{۷}$

۶- ۱۱، ۱۱، ۷

۷- $-\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$

۹- ۴، -۱، $-\frac{۱}{۲}(۳ \pm \sqrt{-۳۱})$؛

۱۰- ۴، -۲، $-۱ \pm \sqrt{-۱}$

۱۱- ± ۱، $-۴ \pm \sqrt{۶}$

۱۲- ۱، ۲، -۲، -۳

۱۳- $۱ \pm \sqrt{۲}$، $-۱ \pm \sqrt{-۱}$

۱۴- ۱، -۳، $۲ \pm \sqrt{۵}$

۱۵- ۲، ۲، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$

۱۶- ۱، ۴ ± $\sqrt{}$۱۵ ، $\frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ ۱۷- ۔۲، ۔۲، ۔۲، ۳

۱۸- ق^{۲} + ۸ر^{۳} = ۰ ؛ $\frac{۳}{۲}$ ، $\frac{-۳ \pm ۳\sqrt{۵}}{۴}$

۲۲- ۲ ± $\sqrt{}$۶ ، ± $\sqrt{}$۲ ، ۲ ± $\sqrt{}$۲

۲۳- س^{۳} ما^{۲} + ق س (۱ - س)^{۲} ما + ر (۱ - س)^{۳} ما + (۱-س)^{۳} = ۰

۲۵- ۲ ± $\sqrt{}$۳ ۲۶- $\frac{۵ \pm \sqrt{۱۳}}{۲}$

۲۸- لا^{۴} - ۸لا^{۳} + ۲۱لا^{۲} - ۲۰لا + ۵ = (لا^{۲} - ۵لا + ۵)(لا^{۲} - ۳لا + ۱)

اگر لا = ۴ - ما ہو تو جملات لا^{۲} - ۵لا + ۵ اور لا^{۲} - ۳لا + ۱ علی الترتیب ما^{۲} - ۳ما + ۱ اور ما^{۲} - ۵ما + ۵ بن جاتے ہیں۔ اس طرح ہم نے صرف اصل مساوات کو پھر حاصل کر لیا ہے۔

متفرق مثالیں (صفحات ۴۷۹ تا ۵۳۴)

۲- ۶، ۸ ۳- ا^{۲} ۴- (۱) ۱ ± $\sqrt{}$۵ ؛ ۱ ± ۲$\sqrt{}$۵

(۲) لا = ۱، ما = ۳، ی = - ۵ ؛

یا لا = -۱، ما = -۳ ؛ ی = ۵

۶- (۱) ۱، - $\frac{ا + ۲ب}{۲ا + ب}$ (۲) ۳، ۳، ۱ ۷- پہلی رقم ۱ ؛ فرقِ مشترک $\frac{۱}{۲}$

۸- ف^{۲} - ق ؛ - ف(ف^{۲} - ۳ق)^{۲} (ف^{۲} - ق) (ف^{۲} - ۳ق)

۹- $\frac{۱}{۲}$ (اب + ا^{۳}ب^{۳}) ۱۰- $\frac{۷}{۱۲}$

۱۳- ا، منٹ ؛ ب، منٹ ۱۴- ا^{۲} - ب^{۲} = ج^{۲}

۱۵- $لا^2 - ما^2 = \frac{د}{ا+ب+ج}$ ؛ یا $\frac{لا}{ج-ا} = \frac{ما}{ا-ب} = ک$

جہاں $ک^2 ا(ا^2+ب^2+ج^2-ب\,ج-ج\,ا-ا\,ب) = د$

۱۶- ایک میل فی گھنٹہ

۱۷- (۱) $(ب+ج)(ج+ا)(ا+ب)$ (۲) $\sqrt{\frac{۵-۴لا}{۲}} + \sqrt{\frac{۲لا-۳}{۲}}$

۱۸- $\frac{۳۵}{۹}$ ؛ ۲۲۶۸

۱۹- (۱) $\frac{۲۱ \pm \sqrt{۱۰۵}}{۱۴}$

(۲) $لا = ما = \pm\sqrt{اب}$ ؛ $\frac{لا}{۲ا+ب} = \frac{ما}{-(۳ا+۲ب)} = \pm\sqrt{\frac{اب}{ب^2+اب-۲ا^2}}$

۲۲- اگ ت ۵ ؛ ۹

۲۳- $\frac{۱}{۲}\{(۱+۲+۳+\dots+ن)^2 - (۱^2+۲^2+۳^2+\dots+ن^2)\}$

۲۴- مزدوری ۱۵ شلنگ ؛ روٹی ۶ پنس ۲۵- ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸

۲۶- (۱) ۱، $\frac{ج(ا-ب)}{ا(ب-ج)}$ (۲) $\frac{اب(ج+د)-ج\,د(ا+ب)}{اب-ج\,د}$

۲۸- $۸۸\frac{۴}{۵}$ میل

۲۹- لا = ۳ک، ما = ۴ک، ی = ۵ک

جہاں $ک^3 = ۱$، پس ک = ۱، س، یا $س^2$

۳۰- ۴۸۰ ۳۱- ۳۳ نصف کراؤن، ۱۹ شلنگ، ۸ پنس ؛ یا

۳۷ نصف کراؤن، ۶ شلنگ، ۷ پنس

۳۲- ا = ۶، ب = ۷ ۳۳- ۴۰ منٹ

۳۵۔ $۱ + لا + \frac{۱}{۲} لا^{۲} - \frac{۱}{۲} لا^{۳} - \frac{۱۳}{۸} لا^{۴}$

۳۶۔ $\frac{۱ \pm \sqrt{-۳}}{۲}$ ، یا $\frac{۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۲}$ [$(لا^{۲} - لا - ۵)(لا^{۲} + لا + ۱) = ۰$]

۳۸۔ $ل = ۸$ ؛ $\frac{لا - ۴}{لا - ۵}$ ۴۰۔ پہلی رقم ۴۱۔ ۱۳، ۹

۴۲۔ $\frac{۱ + ۴ ب^{۲} ج^{۲} + ۹ ج^{۲} ا^{۲} + ا^{۲} ب^{۲}}{ا^{۲} + ب^{۲} + ج^{۲}}$

۴۳۔ (۱) ۳، −۲، $\frac{-۱ \pm \sqrt{-۳۹}}{۲}$ [دونوں طرف $لا^{۲} + ۴$ شامل کر دو]

(۲) لا = ۱، $-\frac{۱}{۲}$، −۱، ۰، . ؛

لا = ۱، $-\frac{۱}{۲}$، ۰، −۱، ۰ ؛

ی = ۱، $-\frac{۱}{۲}$، ۰، ۰، −۱ ؛

۴۶۔ ۵۷۸۰

۴۸۔ ۱۵۰ اشخاص نے اپنی رائے بدل لی ؛ پہلے قلت ۲۵۰ اشخاص کی تھی اور کثرت ۳۵۰ کی۔

۵۰۔ ۹۳۶ آدمی

۵۱۔ (۱) ۰، $\frac{\sqrt{۲} - ۱}{\sqrt{۲} + ۱} ا$ (۲) $\frac{اد - ب ج}{ا - ب - ج + د}$

[فرض کرو $(ا - ج)(ب - د) = \{(لا - ج) - (لا - ا)\}\{(لا - د) - (لا - ب)\}$ ؛ پھر مربع کرو]

۵۳۔ ۶، $-\frac{۱۶۱}{۳۰}$ ۵۵۔ $م = \frac{۲ ب \sqrt{ا}}{\sqrt{ا} + \sqrt{ب}}$ ، $ن = \frac{۲ ا \sqrt{ب}}{\sqrt{ا} + \sqrt{ب}}$

۵۸۔ (۱) ۱، (۲) $۴ \pm ۲\sqrt{۲}$ [اگر $لا^{۲} - ۱۶ = ما^{۲}$ فرض کیا جائے تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $ما^{۴} - ۱۶ - ۴ ما (ما^{۲} - ۴) = ۰$]

۶۰۔ $\frac{(ا - ج) ف}{ب - ج}$ مرد ؛ $\frac{(ب - ا) ف}{ب - ج}$ عورتیں

۶۳۔ ۰، ا + ب، (ا² + ب²) / (ا + ب)

۶۴۔ سلسلۂ حسابیہ کا فرق مشترک (ب − ا) / (ن − ۱) ہے؛ سلسلۂ حسابیہ کا وہ فرق مشترک جو سلسلۂ موسیقیہ کا مقلوب ہے (ا − ب) / (اب (ن − ۱)) ہے۔

[ر ویں رقم (ا(ن − ر) + ب (ر − ۱)) / (ن − ۱) ہے؛ (ن − ر + ۱) ویں رقم (اب (ن − ۱)) / (ا(ن − ر) + ب(ر − ۱))]

۶۸۔ ۱۹ ۶۹۔ ۷۰۸ پونڈ

۷۰۔ ۰، (۱ ± √−۳) / ۲، (−۱ ± √−۳) / ۲

[(ا + ب)³ − ا³ − ب³ = ۳ اب (ا + ب)، اور (ا − ب)³ − ا³ + ب³ = −۳ اب (ا − ب)]

۷۲۔ (۱) لا = ± (لوک ۳ / لوک ۶) = ± ٫۶۱۴

(۲) لا = ± (۳ (۱ − ۲ لوک ۲)) / (۱ − لوک ۲) = ± ۱٫۱۳۹

۷۳۔ ۲٫۷ ۷۴۔ ۸ گھنٹے

۷۹۔ (۱) لا/ا = ما/ب = ی/ج = ۰، یا (ا + ب + ج) / (اب ج)

(۲) لا = ما = ی = ۱

۸۰۔ ا = ۳، ب = ۱ ۸۱۔ [فرض کرو لا − ا = ل اور ما − ب = م]

۸۲۔ لا = ۳ ۸۴۔ ۱۲۶

۸۵۔ اسٹاک میں جمع کردہ رقوم ۷۷۰۰ پونڈ اور ۳۵۰۰ پونڈ تھیں: اور ہر ایک لڑکی کو ۱۴۰۰ پونڈ ملینگے۔

۸۶۔ ۲۰۵ سات کے پیمانہ میں۔ ۹۱۔ لندن سے ۲۵ میل

۹۵- لا = ۵، ۱، $\frac{۱۵ \pm ۶\sqrt{-۱}}{۲۹}$؛ ما = ۳، $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۲۵ \pm ۱۰\sqrt{-۱}}{۲۹}$

۹۶- $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$　　۹۸- $\frac{۱}{۲\text{لو}}$

۱۰۰- تفاعلِ تکوینی $\frac{۱+۴\text{لا}}{۱-\text{لا}-۲\text{لا}^۲}$ ہے؛ حاصلِ جمع = $\frac{۲(۱-۲^{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}})}{۱-۲\text{لا}}$ - $\frac{۱-(-۱)^{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}}}{۱+\text{لا}}$؛ ن ویں رقم = $\{۲^{\text{ن}} + (-۱)^{\text{ن}}\}\text{لا}^{\text{ن}-۱}$

۱۰۶- $\text{ا}^۲$ + ب - $\text{ج}^۲$ - د　　۱۰۸- ۱۲ آدمی، ۱۴ پونڈ ۱۸ شلنگ

۱۰۹- (۱) لا = ا، ما = ب، ی = ج

(۲) لا = ۳، یا ۱؛ ما = ۱، یا ۳

۱۱۱- ۱ + $\frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱۲+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۱+}\ \frac{۱}{۹}$؛ لا = ۹۴۸، ما = ۳۹۲

۱۱۳- ۱۲ پونڈ ۱۵ شلنگ

۱۱۶- (۱) لا = ا، ما = ب؛ لا = ا، ما = ۲ا؛ لا = ۲ب، ما = ب

(۲) لا = ۳ یا ۱، ما = ۲، ی = ۱ یا ۳

لا = $\frac{-۱ \pm \sqrt{۲۹}}{۲}$، ما = -۳؛ ی = $\frac{-۱ \mp \sqrt{۲۹}}{۲}$

۱۲۰- (۱) ۱ - $\frac{۱}{(\text{ن}+۱)^۲}$

(۲) $\frac{\text{ا}(\text{لا}^{\text{ن}}-۱)}{\text{لا}-۱} + \frac{\text{ب}}{(\text{لا}-۱)^۳}\{\text{لا}^{\text{ن}+۲} + \text{لا}^{\text{ن}+۱} - (\text{ن}+۱)^۲\text{لا}^۲ + (۲\text{ن}^۲+۲\text{ن}-۱)\text{لا} - \text{ن}^۲\}$

۱۲۱- $\frac{۱}{۳}$　　۱۲۲- (۱) $\frac{-۵ \pm \sqrt{-۱۱}}{۹}$ یا $\frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

(۲) لا = ۰، ما = ۰، ی = ۰؛ لا = ±۲، ما = ±۱، ی = ±۳

۱۲۴- $\frac{۲۳ - ۱۳لا}{۳(لا^۲ - ۳لا - ۱)}$ - $\frac{لا - ۱}{۳(لا^۲ + لا + ۱)}$ ؛ - $\frac{ر + ۴}{۲^{ر+۱}}$

۱۲۵- ل = ۱ ؛ پیمانۂ ربط ۱ - لا - ۲لا^۲ ہے ؛ رقم عام $\{۲^{ن+۲} + (-۱)^{ن-۱}\}$ لا^{ن-۱} ہے۔

۱۲۶- (۱) لا = ۶، -۹، ۲ ؛ ما = ۹، -۳　(۲) لا = $\frac{۱}{و}$ ؛ ما = $\frac{۱}{ب}$

۱۲۸- (۱) $\frac{۲}{۲}$　(۲) $\frac{۲ \sqrt{۲}}{۹}$　　۱۲۹- ۱۲، ۱۶ ؛ یا ۴۸، ۴

۱۳۰- (۱) لا = ± ،

(۲) $\frac{لا}{و} = \frac{ما}{ب} = \frac{ی}{ج} = \pm \frac{ک}{۲وبج}$ جہاں ک^۲ = ۲ب^۲ج^۲ + ۲ج^۲و^۲ + ۲و^۲ب^۲ - و^۴ - ب^۴ - ج^۴

۱۳۳- ۱۱، ر - ۱　　　۱۳۴- ۳۸۴ مربع گز

۱۳۶- و = ± ۲، ب = ۳، ج = ± ۲

۱۳۷- (۱) لا = ± $\frac{۶}{\sqrt{۲۶}}$ ، ما = ± $\frac{۹}{\sqrt{۲۶}}$　(۲) ± $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ؛ ± $\sqrt{\frac{۱۳}{۱۰}}$

۱۳۸- ۳ پونڈ ۲ شلنگ پہلی فروخت پر اور ۲ پونڈ ۱۲ شلنگ دوسری فروخت پر۔

۱۳۹- (۱) $\frac{۱}{۶}$ ن(ن + ۱)(۲ن + ۱)

(۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ن(ن + ۱)(ن + ۲)(۳ن^۲ + ۶ن + ۱)

(۳) $\frac{۱}{۶}$ ن(ن + ۱)(۴ن - ۱)

۱۴۱- (۱) لا = ۱ یا $\frac{۲۴}{۵}$ ؛ ما = ۳ یا $\frac{۱۵}{۲}$

(۲) لا، ما، ی ۳، ۵، ۶ کی قیمتوں کی ترتیب رکھ سکتے ہیں۔

۱۴۲- ما^۳ + ق ما^۲ - ق^۲ ما - ق^۳ - ۸ر = ۰

۱۴۳- (۱) لا(لاⁿ − ۱) / (لا − ۱)² − ن / (لا − ۱)　(۲) (۳ + ۱۴لا − ۱۵۷ لا²) / (۱ + ۵لا − ۵۰لا² + ۸لا³)

(۳) ۲ ^ن+۱ + ½ ن (ن + ۷) − ۲

۱۴۴- ۲(ب³ − د³) = ۳(ب² − ج²)(ب − ا)

۱۴۵- −۲، −۲، −۲، ۲/۳

۱۴۶- ا چلتا ہے متواتر دنوں میں

ا چلتا ہے متواتر دنوں میں	۱، ۳، ۵، ۷، ۹	۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳	میل
ب 〃 〃 〃 〃	۱۲، ۱۳	۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰	

اِس طرح ب، ا کو ۲ دن میں پکڑلیتا ہے اور تیسرے دن اُس سے آگے گذر جاتا ہے؛ لیکن انجام کار ا، ب پر سبقت لے جاتا ہے اور ب کے نویں دن اُس کو پکڑلیتا ہے۔

۱۴۷- (√۳۷ − ۴) / ۷

۱۴۸- − (ا + ب + ج)، − (ا + سہ ب + سہ² ج)، − (ا + سہ² ب + سہ ج)

۱۵۰- ن ویں رقم ن (اⁿ − بⁿ) لا^ن−۱ / (ا − ب)؛ حاصل جمع = ا − ب

جہاں ا = ا(۱ − ن اⁿ لاⁿ) / (۱ − ا لا) + ا² لا (۱ − ا^ن−۱ لا^ن−۱) / (۱ − ا لا)²،

اور ب سے ب کا تفاعل مطابق ظاہر ہوتا ہے۔

۱۵۱- ق ما³ − ۲ ف² ما² − ۵ ف ق ما − ۲ ف³ − ق² = ۰

۱۵۳- (۱) −۷، (۷ ± ۳√−۳) / ۲　(۲) ± ۱، ± ۳، ۴　۱۵۴- ۳ دن

۱۵۶- (۱) $-\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۱۲}$، $\frac{۵ \pm \sqrt{۳۹}}{۲۴}$ [(۲لا−۱)(۲لا−۲)(۲لا−۳)(۲لا−۴) = ۱۲۰]

(۲) ۱ ± $\sqrt{۱۹}$ [$\frac{۹۲}{۵۸۵} = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۹} - \frac{۲}{۱۳}$]

۱۵۷- تقریباً ۲۲ سال ۱۶۱- ۴۴ گھنٹے

۱۶۲- (۱) لا^{۲} = ما^{۲} = $\frac{-۷ \pm \sqrt{۲۱۷}}{۴}$ ؛ لا = ± ۱، ± ۲؛

ما = ∓ ۲، ∓ ۱؛ لا = − ما = ± $\sqrt{۳}$

(۲) لا = ک (ب^{۴} + ج^{۴} − ا^{۲}ب^{۲} − ا^{۲}ج^{۲})، وغیرہ

جہاں ۲ک^{۲} (ا^{۶} + ب^{۶} + ج^{۶} − ۳ ا^{۲}ب^{۲}ج^{۲}) = ۱

[یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ ا^{۲}لا + ب^{۲}ما + ج^{۲}ی = ۰ اور

ا^{۲}ما + ب^{۲}ی + ج^{۲}لا = لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} − ۳ لاما ی = ا^{۲}ی

+ ب^{۲}لا + ج^{۲}ما]

۱۶۳- ۲(ا+ب+ج)لا = (ب ج + ج ا + ا ب) ±

$\sqrt{(\text{ب ج + ج ا + ا ب})^{۲} - ۴\,\text{ا ب ج (ا + ب + ج)}}$

[مساوات (ا+ب+ج)لا^{۲} − (ب ج + ج ا + ا ب) لا

+ ا ب ج = ۰ میں تحویل ہو جاتی ہے]

۱۶۴- (۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (۳ن + ۱۳)

(۲) ۲ و − ۵

۱۶۶- (۱) لا = $\frac{۵۱ + ۳۰\sqrt{۲}}{۸۰}$ ، ۱؛ ما = $\frac{۱۷}{۸}$ [لا کو ساقط کرو۔]

(۲) لا، ما، ی مقادیر ۲، $\frac{۱ + \sqrt{-۳}}{۲}$ ، $\frac{-۱ - \sqrt{-۳}}{۲}$ کی ترتیبیں ہیں۔

۱۶۷- $(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})^{2} = ۳\text{ک}^{2}$ ۱۶۸- ۲

۱۶۹- $\text{لا}^{3} + \text{ما}^{3} + \text{ی}^{3} - ۳\text{لاما ی}$

۱۷۰- وہ $\frac{۳}{۴}$ میل پیدل چلتا ہے، $۷\frac{۱}{۲}$ میل گاڑی میں جاتا ہے، ۱۰ میل فی گھنٹہ کے حساب سے گھوڑے پر جاتا ہے۔

اب = $۳۷\frac{۱}{۲}$، ب ج = ۳۰، ج ا = ۱۵ میل

۱۷۲- (۱) لا = ۱۳ یا ۱۰، ما = ۱۰ یا ۱۳،

(۲) $\text{لا} = \frac{\text{د (ا - ب)}}{\text{د - ج}}$؛ $\text{ما} = \frac{\text{ج (ا - ب)}}{\text{د - ج}}$؛

$\text{ی} = \frac{\text{ب (د - ج)}}{\text{ا - ب}}$؛ $\text{ع} = \frac{\text{ا (د - ج)}}{\text{ا - ب}}$

۱۷۴- ۳۲۰۰ پونڈ ۱۷۶- $\text{رما}^{3} + ۳\text{رما}^{2} + (۳\text{ر} - \text{ش}^{3})\text{ما} + \text{ر}^{3} = ۰$

۱۷۷- ل = (اج ± ب د) (عگ ± ف ھ) (ب ج ∓ ا د) (ف گ ∓ ع ھ)

م = (ب ج ∓ اد) (عگ ± ف ھ) - (ا ج ± ب د) (ف گ ∓ ع ھ)

۱۷۸- لا = ۶، -۵؛ $\frac{۱۳ \pm \sqrt{-۴۷}}{۲}$؛ $\frac{-۱۳ \pm \sqrt{-۴۷}}{۲}$

ما = ۵، -۶؛ $\frac{-۱۳ \pm \sqrt{-۴۷}}{۲}$؛ $\frac{۱۳ \pm \sqrt{-۴۷}}{۲}$

[فرض کرو لا - ما = ع اور لاما = و تب $\text{ع}^{2} + ۲\text{و} = ۶۱$، ع(۶۱ + و) = ۹۱]

۱۸۲- ۸۹۸۷

۱۸۳- ما² - ب ما - ا ج ما - ج = ۰ ۔ ۱-، ۲-، $-\frac{۱}{۴}$، $\frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

۱۸۴- (۱) لا، ما کی مقادیر ۱، $\frac{۱+\sqrt{-۳}}{۲}$، $\frac{۱-\sqrt{-۳}}{۲}$ کی ترتیبیں ہیں۔

(۲) لا $= \pm \left(\frac{ا(ب^۲+ج^۲)}{۲ب ج}\right)$، وغیرہ

۱۸۷- قدامت پسند — انگریز ۲۸۶، سکاچ ۱۹، آئرش ۳۵، ویلش ۱۱

جدّت پسند — انگریز ۱۷۳، سکاچ ۴۱، آئرش ۶۸، ویلش ۱۹

۱۹۱- (۱) ۷، ۹، ۳۰ (۲) $۱ \pm \sqrt{-۳}$، $-۲ \pm \sqrt{-۱}$

۱۹۲- $۲ا_ن = ا + ب + \frac{ا-ب}{۳^ن}$ ؛ $۲ب_ن = ا + ب - \frac{ا-ب}{۳^ن}$

۲۰۱- $\frac{(م+ن-۲)!}{(م-۱)!\,(ن-۱)!}$　　۲۰۲- ۵۴، ۲۶-، $۱۴ \pm ۸۴۰\sqrt{-۱}$

۲۰۴- $\frac{ن}{ن+۱}$، $\frac{۴^{ن+۱} + ۴(-۱)^{ن+۱}}{۴^{ن+۱} - (-۱)^{ن+۱}}$

۲۰۶- $\frac{۳ر م^۲ + ن م^۲ ق - ۳ن^۳}{ر م^۳ + ن م^۲ ق + ن^۳}$　　۲۰۷- تقریباً ۱۸ سال

۲۰۹- ۷ پول، ۱۴ ترک، ۱۵ یونانی، ۲۴ جرمن، ۲۰ اٹلی والے

۲۱۰- $\frac{۱}{۲} - \frac{لا}{۴} - \frac{۱+لا^۲}{۲لا}$ لوک (۱ + لا)

۲۱۲- (۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ن (ن + ۱) (ن + ۲) (ن + ۳)؛

(۲) $\frac{۴ + ۳لا + لا^۲}{(۱+لا)^۳}$　(۳) ۲۳

۲۱۳- $-\frac{۱۱}{۹۷}$　　۲۱۵- لا $= ا \pm \sqrt{\frac{(ا^۲+ب)(ا^۲+ج)}{ا^۲+ع}}$، وغیرہ　۲۱۷- ۳۲۰

۲۲۳- (۱) لا = ما = $\frac{۱}{۲}$ (± ۵ ± $\sqrt{-۳}$)، ی = $\frac{۱}{۳}$ (± ۱۵ ∓ ۲$\sqrt{-۳}$)

یا لا = ۴، ۶، -۴، -۶

ما = ۶، ۴، -۶، -۴

ی = ۵، ۵، -۵، -۵

(۲) $\frac{لا - ا}{ا(ب - ج)} = \frac{ما - ب}{ب(ج - ا)} = \frac{ی - ج}{ج(ا - ب)}$ = ل

جہاں (ب-ج)(ج-ا)(ا-ب) ل = $ا^۲ + ب^۲ + ج^۲$ - ب ج - ج ا - ا ب

۲۲۶ - ۱۲ گھوڑے، ۱۵ گائے، ۲۰ بکری

۲۲۹- نہا {ن ($ن^{\frac{۱}{ن+۱}}$ - ۱)} = $\frac{۳}{۲}$ ؛ مستدق

۲۳۰- سلسلہ کا پیمانہ ۱ - ۱۲لا + ۳۲$لا^۲$ ؛ ن ویں رقم = $\frac{۱}{۲}$ {$۴^{ن-۱} + ۸^{ن+۱}$}؛

$س_ن$ = $\frac{۲^{۲ن-۱}}{۳} + \frac{۲^{۳ن-۱}}{۷} - \frac{۵}{۲۱}$

۲۳۱- $\frac{۱۱}{۲۴۴}$ ۲۳۲- ۲لا = ± $\sqrt{ا^۲ - ب^۲ + ج^۲}$ ± $\sqrt{ا^۲ + ب^۲ - ج^۲}$، وغیرہ

۲۳۳- $ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ = ا^۲(ب + ج) + ب^۲(ج + ا) + ج^۲(ا + ب)$

۲۳۵- (۱) $(۱ - لا)^۳$ س = ۱ + ۴لا + $لا^۲$ - $(ن+۱)^۳ لا^ن$ + $(۳ن^۳ + ۶ن^۲ - ۴) لا^{ن+۱}$

- $(۳ن^۳ + ۳ن^۲ - ۳ن + ۱) لا^{ن+۲}$ + $ن^۳ لا^{ن+۳}$

(۲) $\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{(ن+۱)^۲ (ن+۲)^۲}$

۲۳۶- ۱ + ۆلا + ۆلا + ۆلا + ۆلا + ۆلا + ۆلا + ۆلا + ۆلا + ۆلا
+ ۆلا

۲۳۷- ۳ گھنٹے ۱۵ منٹ ۲۴۰- ۲ یا - ۲/۳ ۲۴۲- ۱۴۰-

۲۴۴- ۳، ۴، ۵، ۶ ۲۴۶- ۆ(ج۲ - ۳د۲)۲ = (اب۲ + ۲د۲) (اب۲ - د)۲

۲۴۷- ۲، ۶، ۱، ۳ ۲۴۸- ۷/۱۳

۲۴۹- (۱) ۲^(ن+۱) - ۲ - ۱/۶ ن (ن+۱)(۲ن+۱)

(۲) ۲^(ن+۱) / ((ن+۱)(ن+۲)) - ۲/۳

(۳) (۱ - لا^(ن+۱)) / (۱ - لا) + ۲(۱ - ۲^ن لا^ن) / (۱ - ۴لا۲) جہاں ن جفت ہے؛

(۱ - لا^(ن+۱)) / (۱ - لا) + ۲(۱ - ۲^(ن+۱) لا^(ن+۱)) / (۱ - ۴لا۲) جہاں ن طاق ہے۔

۲۵۰- (۱) لا = ما = ی = ۰ یا ا/۳ اگر لا۲ + ما۲ + ی۲ + مای + یلا + لاما = ۰ ہو تو لا + ما + ی = - ا اور حل غیر معین ہے۔

(۲) لا / (ا(-ا+ب+ج)) = ما / (ب(ا-ب+ج)) = ی / (ج(ا+ب-ج))

= ۱ / (±√(ا(-ا+ب+ج)) (ا-ب+ج) (ا+ب-ج))

۲۵۳- -(الا + بما + جی)(الا + بما + جی)(الا - بما + جی) × (الا + بما - جی) جہاں ا = √ما(ب-ج) وغیرہ

۲۵۶- (۱) لا = ۱، سہ، سہ۲

ما = ۱، سہ۲، سہ

ی = - (ا + ب)^۲ - (ا س^۲ + ب س^۲)^۲ - (ا س^۲ + ب س^۲)

(۲) لا = ۳، یا ۷ ؛ ی = ۲، یا -۴ ؛ ما = ۷، یا ۳ ؛ ۶ = ۴، یا -۲

۲۵۷- کم از کم ۳ ر - ۲ مقام تک

۲۵۸- چائے ۲ شلنگ ۲ پنس، کافی ۱ شلنگ ۸ پنس

۲۶۲- ۲ ق^۲ - ۲ ف ر + ۲۴ س

۲۶۳- ۱۱ فیل مرغ، ۹ راج ہنس، ۳ بطخیں

۲۶۶- (۱) لا، ما، ی کی ترتیبیں حسب ذیل قیمتوں کی ہیں :-

ا^۲، ½ ا (ب - ۱ + √(ب^۲ - ۲ ب - ۳))، ½ ا (ب - ۱ - √(ب^۲ - ۲ ب - ۳))

(۲) لا = ما = ی = ۱؛ لا = (ا + ب + ج)/(ا - ب - ج) ؛ وغیرہ ۲۶۷- صفر

۲۶۸- ۱۲ پادری جن کی اوسط عمر ۴۵ سال

۲۴ ڈاکٹر جن کی اوسط عمر ۳۵ سال

۲۰ وکیل جن کی اوسط عمر ۳۰ سال

۲۶۹- (ا۱ ا۲ - ا۳^۲) (ا۲ ا۳ - ا۱^۲) = (ا۱ ا۳ - ا۲^۲)^۲

یا ا۱ ا۲ ا۳ + ۲ ا۱ ا۲ ا۳ - ا۱ ا۲^۳ - ا۱^۲ ا۳ - ا۲^۳ = ۰

۲۷۰- لا = ± ا^۲ / √(ا^۲ + ب^۲ + ج^۲)، وغیرہ ؛ ء = ± ب ج / √(ا^۲ + ب^۲ + ج^۲)، وغیرہ ۲۷۳- و + ۲

۲۷۴- (۱) (۱ - ۲/لا) لوک (۱ - لا) - ۲ (۲) ۱/(۱ - ء) {۱ - ن + ۱ / ((ء + ۱)(ء + ۲)...(ء + ن))}

۲۷۵- (۱) لا = ۳/۲، ۳/۲، ۲؛

ما = -۱، -۴/۳، -۱؛

ی = ۱، ۳/۴، ۳/۴؛

(۲) لا = ±۴، ما = ±۵، ع ±۲، و ±۱

لا = ± ۵/۳ √(۲/۳)، ما = ∓ ۲ √(۲/۳)، ع = ∓ ۱/۳ √(۲/۳)،

و = ± √(۲/۳)

۲۷۶- ا² + ب² + ج² + د² + ہ

۲۷۷- - ف₁³ + ۳ ف₁ ف₂ - ۳ ف₃

۲۷۹- ا، چھ پرندے؛ ب، ۴ پرندے

۲۸۱- ۲ ‏ ‏ ‏ ۲۸۷- ا، -۵ا، -۵ا

۲۸۹- لا₁ = - (ب₁ - ا₁)(ب₁ - ا₂)...(ب₁ - اₙ) / (ب₁ - ب₂)(ب₁ - ب₃)...(ب₁ - بₙ)، وغیرہ۔

۲۹۱- ا نے ۴۵ دن کام کیا؛ ب نے ۲۴ دن؛ ج نے ۱ دن

۲۹۴- (ب² + ج² - ا²) (ا² - ب² + ج²) (ا² + ب² - ج²)

۳۰۰- ۳ میل سیر کی، روزانہ ۴ گھنٹے کام کیا؛

یا ۴ میل سیر کی، روزانہ ۳ گھنٹے کام کیا؛

فہرست اصطلاحات

جبر و مقابلہ حصّہ دوم

انگریزی	اُردو
A	
Advisible solutions	قابلِ قبول حل
Algebraical equivalent	جبریہ متعادل
Algebraical form	صورتِ جبریہ
Alternating	متبادل
Ambiguity	اشتباہ
Ambiguities	مشتبہ علامتیں
Amount	سرح
Analytical geometry	ہندسۂ تحلیلی
Annuity	سالیانہ
A posteriori probability	احتمالِ موخر
A priori probability	احتمالِ مقدم
Arbitrary number	اختیاری اعداد
Arithmetical order	ترتیبِ حسابی
Arithmetical progression	حسابی سلسلہ
Auxiliary series	معاون سلسلہ

انگریزی	اُردو
Axes	
Axioms	متعارفہ
B	
Banken's discount	کاری بتی
Biquadratie equations	ربعہ چہارم
C	
Certainty	یقینی
Chance	ت
Combination	ع
Commensurable root	نق اصل
Common ratio	رک نسبت
Compact form	بط شکل
Complete quotient	خارج قسمت
Complex numbers	ن اعداد
Components	ئے ترکیبی
Composite number	ب عدد
Concurrent testimony	ہم شہادت

انگریزی	اُردو
Congruence	استطابق
Congruent	مستطابق
Consecutive co-efficient	متصل سر
Consecutive terms	مسلسل رقوم
Conservative	قدامت پسند
Consonants	حروفِ صحیح
Constituents (of a determinant)	افرادی جزو
Continuations	تسلسل
Continued fraction	کسورِ مسلسل
Convergence	استدقاق
Convergent	مستدق
Cycle	دَور
D	
Deffered annuity	ملتوی سالیانہ
Deffered perpetuity	ملتوی دوامی
Denary	عشری
Denary scale	عشری پیمانہ
Dependant	تابع
Derivative	مستخرجہ
Derived function	تفاعلِ مستخرجہ
Descending powers	نزولی قوتیں
Detached co-efficient	منفردہ سر

انگریزی	اُردو
Determinant	مقطع (واحد) مقطعات (جمع)
Dice	مُہرہ
Discount	بٹی
Discriminating cubic	ممیز کعبی
Divergence	اتساع
Divergent	متسع
E	
Elementary algebra	ابتدائی جبر و مقابلہ
Elements of a determinant	مقطع کے ترکیبی جزو
Elimination	اسقاط
Eliminant	مسقط
Equivalent function	تفاعلِ معلول
Expansion	تفصیل
Expression	جملہ
F	
Figurate numbers	اعدادِ مشکّل، اشکالی اعداد
Fundamental	مسلمہ اور اساسی
G	
General term	عمومی رقم
Generating function	تفاعلِ تکوینی
Geometrical methods	ہندسی طریقے
H	
Harmonic mean	وسطِ موسیقی (واحد) اوساطِ موسیقی (جمع)

انگریزی	اردو
Harmonic progression	سلسلۂ موسیقی
Homogeneous equations	مساوات متجانس
Homogeneous linear	متجانس خطی
Homogeneous products	متجانس حاصلِ ضرب
Hydropathic establishment	آبی شفاخانہ
I	
Incommensurable	متباین
Inconsistent	غیر مطابق
Indeterminate (equations)	غیر معین (مساواتیں)
Inequalities	لامساوات (جمع) لامساوی (واحد)
Infinite	لاانتہا
Infinite series	لامتناہی سلسلہ
Infinity	لامتناہی
Insertion	ادخال
Instalment	قسط
Integral calculus	احصائے تکملات
Integral function	صحیح تفاعل
Integral values	صحیح قیمتیں
Integers	صحیح اعداد
Inverse probability	منقلب احتمال
Irrational parts	غیر ناطق حصے
Irreducible	ناقابل تحویل

انگریزی	اردو
L	
Large integers	بڑے صحیح عدد
Law of commutation	قانونِ مبادلہ
Law of distribution	کلیۂ تقسیم
Laws of indices	کلیاتِ قوت نما
Leading element	جزوِ رئیس
Lease	اجارہ
Liberals	حریت پسند
Life annuity	حیاتی سالیانہ
Lim	نہا
Limiting values	انتہائی قیمتیں
Limits	حدود یا انتہائیں
Linear equations	خطی مساواتیں
Logarithmic series	لوگارثمی سلسلے
Lottery	قرعہ
M	
Mean root	وسطی اصل
Minors (of a determinant)	صغائر
Modulus	مقیاس
N	
Natural numbers	طبعی اعداد
Nominal annual rate	ظاہری سالانہ شرح
Nonary	تسعی
Nonary scale	تسعی پیمانہ

انگریزی	اُردو
Notation	ترقیم
Numerator	شمار کنندہ
O	
Observation	مشاہدہ
Occurrences	واقعات
Octahedral die	ہشت سطحی مُہرہ
Operations	اعمال
Oscillating series	اہتزازی سلسلے
P	
Partial fractions	کسورِ جُزوی
Pentagonal	مخمس
Penultimate	ماقبل الآخر
Perfect square	مربعِ کامل
Periodic continued fractions	دَوری کسورِ مسلسل
Polygonal numbers	کثیر ضلعی اعداد
Polynomial	کثیر الارقام
Positive integers	مثبت صحیح عدد
Positive root	مثبت اصل
Present value	قیمتِ حاضرہ
Prime	مفرد
Probability	احتمال
R	
Radix	اصل

انگریزی	اُردو
Rational integral function	منطق صحیح تفاعل
Real quantity	حقیقی مقدار
Reciprocal	مکافی مقلوب
Recurring series	سلسلۂ متوالی
Resulting equation	مساواتِ محصلہ
Reversion of series	سلسلوں کی تقلیب
S	
Scale of relation	پیمانۂ ربط
Second term	دُوسری رقم
Septenary scale	پیمانۂ سبعی
Series	سلاسل۔ سلسلہ
Spades	حُکم
Suffixes	لاحقے
Synthetic division	ترکیبی تقسیم
T	
Target	چاندماری کا چاند
Tenant	پٹہ دار
Terminating	مختتم
U	
Undetermined co-efficients	نامعلوم سر
V	
Vanishing fractions	کسورِ منعدم

۱

اغلاط نامہ

جبر و مقابلہ

حصۂ دوم

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۰	۲	حملہ	جملہ	۴۲	۲	ب	ر
۱۸	۱۲	-۱۴۶	۲۴۶	〃	۹	=۰	=
۱۹	۱۱	ا-ر-ب)	-ا-(-ب)	۴۴	۶	۱۷ما	ما
۳۵	۱۰	(لا ر ق)	(ر-ق)	۴۵	۱۷	اصل رہ	اصل یعنی - ج/ب
۳۷	۳	و ۰ ،	۱ ۰ ،	۵۴	۱۹	ن ئے	ن کے
〃	۶	۱ ۵ ،	۱ ۰ ،	〃	۲۰	یہاایک	یہہ ایک
۳۸	۱۳	ر	لا	۶۲	۱۲	ما/وا	ما/وا
〃	۲۰و۲۱	مذکورہ	مذکورہ	۶۳	۲	۱/ی لوک ی/لوک ا	۱/ی × لوک ی/لوک ا
۳۹	۱۳	ن-۲	ن - ۲	۶۴	۱۳	لوک ع ن	+ لوک ع ن
۴۰	۲	ا	ب	۶۵	۱۱	۱/(۱-لاَ)۲	۱/(۱-لا)۲
۴۱	۱۵	صعر/صغر	صفر/صفر				

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۷۰	۶	د۲	و۲	۱۲۹	۱۲	قن/لن − قن−/لن−۱	قن/لن − قن−۱/لن−۱
″	۱۱	ر	و	″	۱۷	۱/+۲ +	۱/+۲
۷۱	۶	ر	و	۱۳۰	۱۰	ذنوں	دنوں
۷۲	۱۳	(۲ن−۱	(۲ن−۱)	۱۳۴	۲	۱/ل۲ن	۱/ل۲ن
۷۳	۲	۱/نق	۱/نق	۱۳۷	۵	<ل	>ل
۷۷	۱۳	=	=	۱۳۸	۹	......+	......
۷۹	۱	ستدلال	استدلال	۱۳۹	۶	ق−۲	قن−۲
۸۱	۱۵	لارماً	لازماً	۱۴۷	۱۰	تب	تب
۸۳	۹	(جہ+۱	(جہ+۱)	۱۴۸	۱۴	دج/اب +	ج/اب
″	۱۲	عن/عن+۱	عن/عن+۱	۱۵۰	۱۴	ج	جَ
۸۷	۴	قم	قم	″	۱۸	ب۱	ب۱
۹۴	۱۱	+۱	+۱	۱۵۱	۱۳	ا	اَ
۱۰۰	۱۲	رقم	رقم	″	۱۴	مناسب	مناسب
۱۰۸	۷	لا۲......	لا۲......	۱۵۲	۲	ب	بَ
۱۱۳	۱۳	بنالے	بنانے	″	۳	ج بَ ا	ج بَ
″	۱۴	لہ	کہ	۱۵۴	۴	بچتے	بجتے
۱۱۴	۷	ہمہ	ہم	۱۵۶	۱۳	۴	۳
″	۱۵	ق ا لا	ق ر لا	۱۵۸	۵	۰≠	۰=
۱۲۰	۱۴	ا	أ	۱۶۰	۱۵	+ا/۲	ا/۲ +
۱۲۳	۱۵	لکالنے	نکالنے	۱۶۷	۱	ان−	ان−۲
۱۲۴	۵	۸۰۳	۸۰۲	″	۱۴	+......	......
۱۲۶	۱۰	وان	وال	″	۱۹	= قن/لن	قن ۷/لن

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۶۹	۱	(۲)	(۱) .....
۱۶۱	۲	$+\frac{1}{ر^2+}$	$\frac{1}{ر^2+}$
۱۶۴	۱۶	جوق ۲	جو ق۲
۱۶۸	۱۴	= ۱	= - ۱
۱۶۹	۱۹	ث	ث۱
۱۸۰	۱۷	$\frac{ق}{ل}$	$\frac{قَ}{لَ}$
۱۸۲	۲۰	فورا	فوراً
۱۸۶	۲	$\frac{ر}{م^2+۲ن-ن^2}$	$\frac{ر}{م^2+۲م ن-ا ن^2}$
〃	۸	ق -	ق =
۱۹۱	۵	شال	-۳۸۲
〃	۸	-	+
〃	۳	اور ا+ و$^{ن-۱}$ لا	اور ا+ و^{ن} لا
۱۹۳	۱۸	قسمت	قیمت
۱۹۴	۱۷	(۱۷۰)	(۷۰)
۲۰۲	۲۰	لـ۳	لـ۳
۲۰۳	۹	ارٹھمیٹک	ارتھمیٹک
۲۰۵	۱۲	......ی	.....
۲۰۹	۱	△۴ ع۴	△۳ ع۳
۲۱۰	۳	△۴ ا۴	△۴ ا۴
〃	۱۷	......	...... +
۲۱۲	۱۴	لـ۲	لـ۳
۲۱۵	۲۲	(ا-لا)	(ا - لا)
۲۱۶	۸	لا^{ن}+ر	لا^{ن}+۱
۲۱۸	۱۶	جروی	جُزوی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۲۵	۷	-۶۴+	-۶۴
۲۲۷	۱۴	۲۵،	۵۰،
۲۳۶	۱۳	۳|	۳|
〃	۱۷	+۳	+۲
۲۳۰	۱۱	$\frac{۷}{۳\times۳\times۱}$	$-\frac{۷}{۳\times۲\times۱}$
۲۴۸	۵	....	- ....
۲۵۲	۱۵	لا - ا^{ف}	لا - ا^{ف} ف
۲۵۷	۶	(ق - قَ ب	(ق - قَ) ب
۲۵۸	۱۰	ورما	فرما
۲۵۹	۷	(۲) = ا	(۲) = ا،
۲۶۱	۱۲	ج	ج
〃	۱۶	ہے	سے
۲۶۲	۱۲	÷	+
〃	۱۴	جن	جس
۲۶۶	۷	استقراء	استقرائے
۲۶۹	۲۲		غ $\frac{ع}{۹}$(ا - $\frac{1}{و}$)(ا - $\frac{1}{ب}$)(ا - $\frac{1}{ج}$) ص $\frac{ع}{۹}$(ا - و)(ا - ب)(ا - ج)....
۲۷۰	۲		غ $\frac{ع}{۴}$(ا - $\frac{1}{و}$)(ا - $\frac{1}{ب}$)(ا - $\frac{1}{ج}$) ص $\frac{ع}{۴}$(ا - و)(ا - ب)(ا - ج)....
۲۷۱	۳	$\frac{لا^{۵}}{ا+لا^{۱۰}}$	$\frac{لا^{۵}}{ا+لا^{۱۰}}$
۲۷۷	۳	انتہاؤں	انتہاؤں
〃	۴	$\frac{ق^{ن}-۱}{ل^{ن}-۱}$	$-\frac{ق^{ن}-۱}{ل^{ن}-۱}$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۷۷	۸	$ل_{ن+۲}$	$ل_{ن-۱}$	۳۰۱	۲۳	کراؤں	کراؤن
۲۷۹	۱	$\frac{ب_۱}{و_۱} - \frac{ب_۲}{و_۲} ، \frac{ب_۳}{و_۲} \cdots$	$\frac{ب_۱}{و_۱} ، \frac{ب_۲}{و_۲} ، \frac{ب_۳}{و_۳} \cdots$	"	۲۴	مرول	سرول
				"	"	سکون	سکوں
"	۱۰	$\frac{ب_۳}{و_۲} - \frac{ب}{و_۲} - \frac{ب_۴}{و_۴}$	$\frac{ب_۲}{و_۴} - \frac{ب_۳}{و_۲} \frac{ب}{و_۴}$	۳۰۲	۱۰	ہوکی	ہوگی
۲۸۰	۳	ل	$ل_۱$	۳۰۳	۱۹	$\frac{اَب}{(اَ + ب)}$	$\frac{اَب}{(اَ + ب)}$
۲۸۲	۱۳	≡	=	۳۰۴	۶	پذیر	پذیر
۲۸۴	۷	$ک_۶$	$ک_۲$	"	۱۹	کولی نہ کولی	کوئی نہ کوئی
۲۸۸	۳	$۲۱۶ \ و^۳ + ۱)$	$۶(۲ \ و^۳ + ۱)$	۳۰۷	۱۵	پہلے	پہلی
"	۴	$ع_۴ -$	$ع_۳ =$	۳۰۹	۱۲	سے	کے
"	۱۲	$-\frac{ل_۳}{ل_۲ + ۱ -}$	$\frac{ل_۳}{ل_۳ + ۱ -}$	۳۱۰	۲۴	۳ یا ۵	۳ یا ۷
				۳۱۲	۱۱	گیے	گئے
۲۹۰	۶	$\frac{ع^۲}{ع_۱ - ع_۲ -}$	$\frac{ع^۲_۱}{ع_۱ + ع_۲ -}$	۳۱۳	۱۷	یا موافق	موافق
				"	۲۴	پھیکا	پھینکا
۲۹۲	۱۰	کسیر	کسر	۳۱۴	۵	ہٹوے	بٹوے
۲۹۳	۱۳	$\frac{۱}{و-}$	$-\frac{۱}{و}$	۳۱۷	۱	پار	چار
				"	۱۱	کے	سے
۲۹۴	۶	$\frac{۱}{ل_۱}$	$-\frac{۱}{ل_۱}$	۳۱۸	۱۳	اشیائے	اشیاء
۲۹۵	۵	کرنے	کرتے	۳۱۹	۵	=۰۰	=۱۰
۲۹۶	۳	صرور	ضرور	۳۲۱	۱۳	پہلے پہلے	پہلے پہل
"	۱۴	احتمال	۴۵۲- احتمال	۳۲۳	۲	لاؤن	لاق ن
۳۰۰	۷	گپیند	گیند	۳۲۶	۱۴	متنج	منتج
"	۲۳	۳۰	۳	۳۲۸	۲۱	$ق_۱$	$ق_ر$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۳۰	۲۰	کے	کا	۴۰۷	۱۲	جد	جدہ
۳۳۳	۱۱	اب	۴۷۴- اب	۴۰۹	۱۸	=	=
۳۳۶	۱۸	چھوٹا	جھوٹا	۴۲۰	۱۸	(لا	(لا)
۳۵۳	۱۰	$\frac{۵^ن - ۳^ن}{۱۰ک}$	$\frac{۵^ن - ۳^ن}{۱۰^ن}$	۴۲۳	۱	فم	فم۲
				〃	۱۳	ا(۲)	ا۲
۳۵۷	۱۱	متجالس	متجانس	۴۲۹	۱۵	اصلون	اصلوں
〃	۱۷	بد	ب۲	۴۳۷	۱۳	ف ن	فن
۳۵۸	۱۰	ب ب	ب ب۲	۴۵۸	۱۹	=.ربط	= . ربط
〃	۲۱	ب ما	ب ما	۴۶۴	۱۱	ر/۲	ر/۲
۳۵۹	۴	ا ب ج	ا ب۳	۴۶۶	۵	ر	ر
۳۶۰	۳	ج	ج۳	۴۶۸	۱	۰۳	۳
〃	۱۳	- (۲)	... (۲)	۴۷۶	۱۶	۲۱	۲۰
۳۶۹	۲	اجزائے	اجزا	۴۷۸	۱	ر	ر
〃	۱۶	ب۲	ب۲	۴۸۷	۳	کرسٹ	کرائسٹ
۳۸۰	۵	زیریں	زبریں	〃	۱۵	(۱- لا + لا۲ لا۳	(۱-لا+لا۲-لا۳)۱-
۳۸۱	۱۳	ر	ر۲	۴۹۸	۱۶	(۱-x ی)۲	(۱- ی)۲
۳۹۳	۱۵	فم لا^ن-۳	قم لا^ن-۳	۵۰۲	۲۰	)۲	)۲- ر
۳۹۴	۹	ن-اب	ن - اب	۵۱۴	۷	(-۱)	(-۱)
۳۹۶	۱۵	+ - - ۴	+ - ۰ ۴	۵۱۹	۱	۱لا	لا
۳۹۹	۲۱	مثال ۲-	مثال ۲ —	〃	۱۱	ر۳	ر۳
〃	۲۱	(ج۳ + ر۳) +	(ج۳ + ر۳)	۵۲۴	۵	کامی	کافی
۴۰۰	۹	ا=۱ ب = ۱.	ا=۰ ب = ۱	〃	۱۴	تعادمات	تعادلات
۴۰۱	۱۰و۵	ر۳	ر	〃	۱۸	--(ع ن+۱ + وغیرہ)	(ع ن+۱ + وغیرہ)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۵۲۷	۳	گرر	کرر	۵۴۹	۶	$\frac{لا}{و}$—	$\frac{لا}{و}$
〃	۱۸	ر	ل	۵۵۱	۱۴	م ن - (ن-۱)	م ن - ن ۱۰
				۵۵۵	۱۵	$ب^{۳}$	$ب^{۲}$
۵۲۹	۵	$ک^{ن}_{ر}$(ن-ر)	$ک^{ن}_{۲}$(ن-ر)	۵۵۶	۲	ب جَ =	ب جَ -
۵۳۸	۸	$\frac{۱}{۳۰}$	$\frac{۱}{۳}$	۵۶۱	۱۲	$\frac{۳}{۹}$	$\frac{۸}{۹}$
۵۳۹	۲	۲(لا+۲)	$(لا+۲)^{۲}$	۵۶۶	۱	$۵۰لا^{۲}$ $۸لا^{۳}$	$۵۰لا^{۲}$ - $۸لا^{۳}$
〃	۵	۴(لا+۱)	$(لا+۱)^{۴}$	〃	۳	($د^{۲}$	($د^{۳}$
۵۴۱	۹	$\frac{۱۸}{۱۳}$	$\frac{۲۸}{۱۳}$	۵۶۸	۳	۳ $\frac{۳}{}$	۳ $\frac{۳}{۴}$
۵۴۲	۱۳	۱۹ ۵ د =	۱۹ ۵ د -	〃	۱۰	(ب ج)(ف ھ	(ب ج)+(ف ھ
۵۴۵	۳	ر-۱ $\frac{۱}{+۲+}$	ر-۱+ $\frac{۱}{+۲}$	〃	۱۴	-۱۴ =	-۱۴ ±
〃	۸	۳۶ $ر^{۳}$	۳۶ $ر^{۲}$	۵۷۲	۱۵	ر $\frac{ر^{۲}}{۲}$	ر $\frac{ر^{۲}}{۲}$
〃	۱۱	= $۲^{۶}$	= $۳^{۶}$	.	.	.	.